О ДОГОНЕ ОДНОГО ТРЕУГОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ ДАВЛЕНИЯ ДРУГИМ В АСИМПТОТИКЕ УДАРНЫХ ВОЛН

М. А. Цикулин

(*Москва*)

Асимптотические законы распространения ударных волн в наиболее общем виде получены в работе [1]. На основании результатов указанной работы рассматривается догон одного треугольного профиля давления другим, среда принимается однородной и неподвижной.

Амплитуда давления волны Δ убывает с увеличением расстояния по закону [1]

$$\Delta = \frac{\alpha \sqrt{\rho_0 c_0}}{L} \tag{1}$$

Здесь ρ_0 и c_0 — плотность и скорость звука в невозмущенном газе, L — геометрический фактор. Для плоского случая $L = 1$, для цилиндрического $L = \sqrt{r/r_0}$, для сферического $L = r/r_0$, характеристическая координата α определяются решением [1]:

$$r - r_0 = c_0 t + \alpha \frac{\gamma + 1}{2\sqrt{\rho_0 c_0}} \int_0^t \frac{dt}{L} + f(\alpha) \tag{2}$$

Здесь γ — отношение удельных теплоемкостей газа, r_0 — координата фронта волны в момент времени $t = 0$, функция $f(\alpha)$ определяется из заданного в начальный момент распределения давления в волне.

Пусть в начальный момент $t = 0$ фронт первой ударной волны с длиной λ_1 находится в точке $r = r_0$, а фронт второй ударной волны с длиной λ_2 находится в точке $r = r_0 - \lambda_1$. Фронт первой волны распространяется так же, как при отсутствии догоняющей волны, и $\alpha_{1\Phi}$ (значение α на фронте первой волны) определятся по уравнению [1]

$$\alpha^2 \int_0^t \frac{dt}{L} = \frac{4\sqrt{\rho_0 c_0}}{\gamma + 1} \int_\alpha^{\alpha_{10}} \alpha f'(\alpha)\, d\alpha \tag{3}$$

Для линейного профиля давления [1]

$$\alpha_{1\Phi} = \frac{\alpha_{10}}{\Phi(r)}, \qquad \Phi(r) = \left(\frac{\gamma + 1}{2c_0\sqrt{\rho_0 c_0}} \frac{a_{10}}{\lambda_1} \Lambda(r) + 1\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \Lambda(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{L}. \tag{4}$$

Здесь α_{10} есть начальное значение $\alpha_{1\Phi}$ при $r = r_0$. Скорость фронта первой волны равна

$$\frac{dr_1}{dt} = c_0 + \frac{\gamma + 1}{4} \frac{\Delta}{\rho_0 c_0} = c_0 + \frac{\gamma + 1}{4\sqrt{\rho_0 c_0} L} \frac{\alpha_{10}}{\Phi(r)}$$

Обозначим $\delta_1 = r - r_0 - c_0 t$ величину приращения длины первой волны с увеличением расстояния и заменим $t = (r - r_0)/c_0$, пренебрегая малыми величинами δ_1 и λ_1 по сравнению с расстоянием, пройденным фронтом. Тогда для δ_1 имеем уравнение:

$$\frac{d\delta_1}{dr} = \frac{\gamma + 1}{4c_0\sqrt{\rho_0 c_0} L} \frac{\alpha_{10}}{\lambda_1} \frac{\lambda}{\Phi(r)}$$

Отсюда при начальном условии $\delta_1 = 0$ при $r = r_0$ находится δ_1

$$\delta_1 = \lambda_1 (\Phi(r) - 1) \tag{5}$$

где $\Phi(r)$ — согласно (4).

В первом приближении, в котором решается задача, скорость фронта второй волны равна:

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{c_1 + u_1 + c_2 + u_2}{2}$$

где c_1 и u_1 — скорости звука и газа непосредственно перед фронтом, c_2 и u_2 — непосредственно за фронтом; скорость фронта второй волны равна

$$\frac{dr_2}{dt} = c_0 + \frac{\gamma + 1}{4\rho_0 c_0} (\Delta_1 + \Delta_2) = c_0 + \frac{\gamma + 1}{4\sqrt{\rho_0 c_0} L} (\alpha_1 + \alpha_2) \tag{6}$$

По (2) величины α_1 и α_2 выражаются через r и t и через произвольные функции $f(\alpha)$. В данном случае

$$f_1(\alpha_1) = \lambda_1 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_{10}} - 1\right), \qquad f_2(\alpha_2) = \lambda_2 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_{20}} - 1\right) - \lambda_1$$

Следовательно,

$$\alpha_1 = \frac{r - r_0 - c_0 t + \lambda_1}{\dfrac{\gamma+1}{2c_0\sqrt{\rho_0 c_0}}\Lambda(r) + \dfrac{\lambda_1}{\alpha_{10}}}, \qquad \alpha_2 = \frac{r - r_0 - c_0 t + \lambda_1 + \lambda_2}{\dfrac{\gamma+1}{2c_0\sqrt{\rho_0 c_0}}\Lambda(r) + \dfrac{\lambda_2}{\alpha_{20}}}$$

где $\Lambda(r)$ — согласно (4).

Обозначим $\delta_2 = r - r_0 - c_0 t + \lambda_1$ величину приращения длины второй волны с увеличением расстояния и заменим $t = (r - r_0)/c_0$. Тогда уравнение для δ_2 получается в виде

$$\frac{d\delta_2}{dr} = \frac{1}{2L}\left[\frac{R_1\delta_2}{R_1\Lambda(r)+1} + \frac{R_2(\delta_2+\lambda_2)}{R_2\Lambda(r)+1}\right]$$

Отсюда

$$\delta_2 = \frac{\lambda_2 R_2 / R_1}{1 - R_2/R_1} z_1 \left(1 - \frac{\sqrt{z_2}}{\sqrt{z_1}}\right) \tag{7}$$

Здесь

$$z_1 = R_1\Lambda(r) + 1, \quad z_2 = R_2\Lambda(r) + 1, \qquad R_1 = \frac{\gamma+1}{2c_0\sqrt{\rho_0 c_0}}\frac{\alpha_{10}}{\lambda_1}, \qquad R_2 = \frac{\gamma+1}{2c_0\sqrt{\rho_0 c_0}}\frac{\alpha_{20}}{\lambda_2}$$

Координата догона r_k, при которой фронт второй волны догонит фронт первой по условию $\delta_2 = \delta_1 + \lambda_1$, определяется формулой

$$\int_{r_0}^{r_k}\frac{dr}{L} = \frac{4\lambda_1}{\gamma+1}\frac{\rho_0 c_0^2}{\Delta_{10}}\frac{\alpha_{10}^2}{\alpha_{20}^2}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + \sqrt{\frac{R_2}{R_1} + \frac{\alpha_{20}^2}{\alpha_{10}^2}}\right] \tag{8}$$

Значения $\alpha_1°$ и $\alpha_2°$ (перед и за фронтом второй волны) выражаются формулами:

$$\alpha_1° = \frac{\alpha_{10}}{\lambda_1}\frac{\delta_2}{z_1} = \frac{\alpha_{20}}{1 - R_2/R_1}\left(1 - \frac{\sqrt{z_2}}{\sqrt{z_1}}\right) \tag{9}$$

$$\alpha_2° = \frac{\alpha_{20}}{\lambda_2}\frac{\delta_2+\lambda_2}{z_2} = \frac{\alpha_{20}}{1 - R_2/R_1}\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\frac{\sqrt{z_1}}{\sqrt{z_2}}\right)$$

При этом $\alpha_1°$ и $\alpha_2°$ связаны между собой соотношением:

$$\alpha_1° + \sqrt{\frac{z_2}{z_1}}\,\alpha_2° = \alpha_{20} \tag{10}$$

Импульс волн в процессе догона изменяется по закону:

$$I = \frac{I_{10} + I_{20}}{L} \qquad (I_{10} \text{ и } I_{20} \text{ — начальные импульсы волн}) \tag{11}$$

Рассмотрим, как изменится амплитуда волны после того, как вторая волна догонит первую.

Продифференцируем (2) по α_1 и α_2 соответственно и подставим вместо dr/dt его выражение (6) через α_1 и α_2, тогда:

$$2\int_0^t\frac{dt}{L} + \frac{\alpha_2}{L}\frac{dt}{d\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{L}\frac{dt}{d\alpha_2} + \frac{4\sqrt{\rho_0 c_0}}{\gamma+1}f_2'(\alpha_2) = 0$$

$$2\int_0^t\frac{dt}{L} + \frac{\alpha_1}{L}\frac{dt}{d\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{L}\frac{dt}{d\alpha_1} + \frac{4\sqrt{\rho_0 c_0}}{\gamma+1}f_2'(\alpha_2) = 0$$

Умножим эти уравнения соответственно на α_1 и α_2, напишем их в дифференциалах и вычтем второе из первого. Тогда после интегрирования в интервале времени от 0 до t имеем

$$\alpha_2^2\int_0^t\frac{dt}{L} - \frac{4\sqrt{\rho_0 c_0}}{\gamma+1}\int_{\alpha_2}^{\alpha_{20}}\alpha_2 f_2'(\alpha_2)\,d\alpha_2 = \alpha_1^2\int_0^t\frac{dt}{L} + \frac{4\sqrt{\rho_0 c_0}}{\gamma+1}\int_0^{\alpha_1}\alpha_1 f_1'(\alpha_1)\,d\alpha_1$$

В момент догона α_1 есть значение на фронте первой волны (3), тогда:

$$\frac{\alpha_2^2}{c_0}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{L} - \frac{4\sqrt{\rho_0 c_0}}{\gamma+1}\int_{\alpha_2}^{\alpha_{20}}\alpha_2 f_2'(\alpha_2)\,d\alpha_2 = \frac{4\sqrt{\rho_0 c_0}}{\gamma+1}\int_0^{\alpha_{10}}\alpha_1 f_1'(\alpha_1)\,d\alpha_1 \tag{12}$$

Подставляя сюда $f_1'(\alpha_1) = \lambda_1/\alpha_{10}$ и $f_2'(\alpha_2) = \lambda_2/\alpha_{20}$ и интегрируя, получим:

$$\alpha_{2\phi} = \frac{\sqrt{(R_2/R_1)\,\alpha_{10}^2 + \alpha_{20}^2}}{\sqrt{R_2\,\Lambda(r) + 1}} \tag{13}$$

Таким образом, амплитуда волны после догона увеличивается в отношении:

$$\frac{\alpha_{2\phi}}{\alpha_{1\phi}} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1} + \frac{\alpha_{20}^2}{\alpha_{10}^2}}\,\frac{\sqrt{R_1\,\Lambda(r) + 1}}{\sqrt{R_2\,\Lambda(r) + 1}}$$

На большом расстоянии $R\,\Lambda(r) \gg 1$, тогда:

$$\frac{\alpha_{2\phi}}{\alpha_{1\phi}} = \sqrt{1 + \frac{R_1}{R_2}\frac{\alpha_{20}^2}{\alpha_{10}^2}} = \sqrt{\frac{I_{10} + I_{20}}{I_{10}}} \tag{14}$$

Возрастание амплитуды в результате догона двух волн произвольного профиля на большом расстоянии также подчиняется этому соотношению. В случае многих догоняющих волн последовательное рассмотрение пар волн приводит к тому же результату, то есть возрастание амплитуды после догона многих волн произвольного профиля будет выражаться на большом расстоянии соотношением:

$$\frac{\alpha_{n\phi}}{\alpha_{1\phi}} = \sqrt{\frac{\Sigma I_{n0}}{I_{10}}} \tag{15}$$

Коэффициент R, входящий в формулы, характеризует форму профиля: чем больше R, тем острее форма профиля. Практически наиболее часто профили по форме не сильно отличаются друг от друга. Тогда можно положить $R_1 = R_2$, и формулы (7), (9) и (10) значительно упрощаются:

$$\delta_2 = \frac{R\lambda_2}{2}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{L} \tag{16}$$

$$\alpha_1^0 + \alpha_2^0 = \alpha_{20}, \qquad \alpha_1^0 = \frac{\alpha_{20}}{2}\left(1 - \frac{1}{R\Lambda(r) + 1}\right), \qquad \alpha_2^0 = \frac{\alpha_{20}}{2}\left(1 + \frac{1}{R\Lambda(r) + 1}\right) \tag{17}$$

Амплитуда волны после догона увеличивается в $\sqrt{1 + \alpha_{20}^2/\alpha_{10}^2}$ раз.

Приведем пример двух волн треугольного профиля одинаковой амплитуды и длины. Координата догона вычисляется из соотношения

$$\Lambda(r_k) = \int_{r_0}^{r_k}\frac{dr}{L} = \frac{4\lambda_0}{\gamma + 1}\,\frac{\rho_0 c_0^2}{\Delta_0}(1 + \sqrt{2})$$

В плоском, в цилиндрическом и в сферическом случаях имеем соответственно:

$$\frac{r_k - r_0}{\lambda_0} = \frac{4(1 + \sqrt{2})}{\gamma + 1}\,\frac{\rho_0 c_0^2}{\Delta_0}, \qquad \frac{r_k}{r_0} = \left[1 + \frac{\lambda_0}{r_0}\,\frac{2(1 + \sqrt{2})}{\gamma + 1}\,\frac{\rho_0 c_0^2}{\Delta_0}\right]^2$$

$$\frac{r_k}{r_0} = \exp\left[\frac{\lambda_0}{r_0}\,\frac{4(1 + \sqrt{2})}{\gamma + 1}\,\frac{\rho_0 c_0^2}{\Delta_0}\right]$$

В момент догона

$$\Delta_2 = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)\frac{\Delta_0}{L} = 0.586\frac{\Delta_0}{L}, \qquad \Delta_1 = (\sqrt{2} - 1)\frac{\Delta_0}{L} = 0.414\frac{\Delta_0}{L}$$

При $\lambda_0/r_0 = 0.1$ и для волны с $\Delta_0 = 0.1$ *атм* получим для воздуха ($\rho_0 c_0^2 = 1.45$ *атм*): в плоском, цилиндрическом и сферическом случаях

$$\frac{r_k - r_0}{\lambda_0} = 58, \qquad \frac{r_k - r_0}{\lambda_0} = 142, \qquad \frac{r_k - r_0}{\lambda_0} = 3300$$

Амплитуда волны во всех случаях возрастает в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с одиночной волной.

Поступила
20 I 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Губкин К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.