

УДК 532.526

## Асимптотические граничные условия для расчета положения ламинарно-турбулентного перехода $\epsilon^N$ -методом\*

А.В. Бойко<sup>1,2</sup>, К.В. Демьянко<sup>1,3</sup>, Ю.М. Нечепуренко<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Тюменский государственный университет

<sup>3</sup>Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, Москва

E-mail: boiko@itam.nsc.ru

Работа посвящена использованию асимптотических граничных условий для инженерных расчетов положения ламинарно-турбулентного перехода в гидродинамических течениях  $\epsilon^N$ -методом. Показано, что асимптотические граничные условия позволяют существенно сократить общие вычислительные затраты.

**Ключевые слова:** пограничный слой, ламинарно-турбулентный переход,  $\epsilon^N$ -метод, гидродинамическая устойчивость, уравнения распространения малых возмущений, локально-параллельный подход, асимптотические граничные условия.

### Введение

От положения ламинарно-турбулентного (Л-Т) перехода в пограничном слое на обтекаемой поверхности существенно зависит экономичность летательных аппаратов (при прочих равных условиях ламинарное обтекание оказывается предпочтительнее), поэтому расчет положения Л-Т перехода является актуальной инженерной задачей. Современные технологии расчета положения Л-Т перехода должны надежно работать в рамках систем автоматизации проектирования без вмешательства человека и быть ориентированы на анализ большого числа близких конфигураций за приемлемое время. Одной из технологий, удовлетворяющей этим требованиям, является технология, предложенная в работах [1, 2] и представляющая собой оригинальную реализацию  $\epsilon^N$ -метода. Так, в её рамках решаются в полном объеме задачи временной устойчивости, что позволяет гарантированно находить положения начала пространственной неустойчивости, соответствующие временные частоты, продольные и поперечные волновые числа колебаний. Вычислительная эффективность этой технологии обеспечивается тем, что основной объем вычислений в ней приходится на стандартные матричные алгоритмы.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект №18-19-00460).

В работах [1, 2] предлагалось на границе расчетной области ставить однородные граничные условия для возмущений. Настоящее исследование посвящено использованию в рамках той же технологии асимптотических граничных условий, предложенных в работе [3]. Авторами приводятся и обсуждаются результаты расчета положения Л-Т перехода для крылового профиля *NACA23012*, показывающие значительное преимущество асимптотических граничных условий.

Напомним, что моды дискретного спектра, являющиеся наиболее значимыми возмущениями при расчете положения перехода, пренебрежимо малы лишь вдали от пограничного слоя (см., например, [4]). Следовательно, если на границе расчетной области ставить однородные граничные условия для возмущений, то расчетная область должна выбираться достаточно большой (порядка десяти толщин пограничного слоя и выше) [5]. При этом в каждом случае для получения результата с заданной точностью требуется подбирать достаточный размер расчетной области экспериментально. Кроме того, проведение расчетов в таких больших областях приводит к увеличению общего числа узлов сетки за счет включения в расчетную область той области течения, в которой основное течение с высокой точностью постоянное, а поведение мод дискретного спектра не влияет на положение Л-Т перехода [6, 7].

В качестве альтернативы нулевым граничным условиям в ряде работ предлагалось использовать асимптотические граничные условия, полученные аналитически как условие убывания возмущения вдали от пограничного слоя (см., например, [8–10]). В работе [11] был описан общий подход к выводу таких граничных условий с помощью аналитически вычисленных собственных функций сопряженной проблемы собственных значений. Однако этот подход может приводить к некорректным постановкам из-за неполноты системы собственных функций, характерной для задач гидродинамической устойчивости. В работе [3] для вывода асимптотических граничных условий предлагалось использовать аналитически вычисленное инвариантное подпространство решений, затухающих на бесконечности, что позволяет гарантированно избежать указанной проблемы.

### **1. Постановка задач линейной устойчивости в локально-параллельном приближении**

Анализ устойчивости течения вязкой несжимаемой жидкости над поверхностью малой кривизны в локально-параллельном приближении, детальное обоснование которого можно найти, например, в [12], выполняется в криволинейных координатах  $x$  и  $y$ , где  $x$  — длина дуги вдоль поверхности (продольная координата) и  $y$  — расстояние до поверхности по нормали к ней (вертикальная координата). При этом кривизна учитывается только параметрически через длину дуги вдоль поверхности. Таким образом, в области  $\{(x, y): x_{\min} < x < x_{\max}, 0 \leq y < \infty\}$ , где граница  $y = 0$  является жесткой с условием прилипания, рассматривается двумерное стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости с компонентами скорости  $U$  и  $V$  вдоль координат  $x$  и  $y$  соответственно с заданными постоянными плотностью и кинематической вязкостью. Это течение будем называть основным. Компоненты скорости считаются достаточно гладкими, ограниченными по абсолютной величине и имеющими предел при  $y \rightarrow \infty$  и любом фиксированном  $x$  из интервала  $x_{\min} < x < x_{\max}$ . Под линейной устойчивостью такого течения понимают его устойчивость к бездивергентным инфинитезимальным возмущениям с компонентами скорости, равными нулю при  $y = 0$  и на бесконечности.

Далее, в предположении, что компонента  $U$  скорости основного течения слабо зависит от  $x$ , а компонента  $V$  и ее производная по  $y$  пренебрежимо малы, в интервале  $x_{\min} < x < x_{\max}$  строится некоторая сетка, в окрестности каждого фиксированного узла  $x = x_0$  которой рассматриваются уравнения распространения малых возмущений с профилем

скорости  $U = U(y) = U(x_0, y)$ , пренебрегая его зависимостью от  $x$  и полагая  $V = 0$ . Полученные уравнения обезразмериваются путем ввода локального (то есть при  $x = x_0$ ) числа Рейнольдса  $Re$ , при определении которого референтная скорость выбирается согласно соотношению

$$U_\infty = \lim_{y \rightarrow \infty} U(y).$$

Таким образом, сохраняя за обезразмеренными переменными старые обозначения, получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Re} \Delta u', \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{1}{Re} \Delta v', \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

описывающую распространение возмущений с компонентами скорости  $u'$  и  $v'$  вдоль координат  $x$  и  $y$  соответственно, с давлением  $p'$  в малой окрестности внешней нормали к обтекаемой поверхности с основанием в точке  $x = x_0$ , где  $\lim_{y \rightarrow \infty} U(y) = 1$ .

В качестве возмущений рассматриваются функции вида

$$\begin{bmatrix} u'(t, x, y) \\ v'(t, x, y) \\ p'(t, x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(y) \\ v(y) \\ p(y) \end{bmatrix} \exp(i\alpha x - i\omega t), \quad (2)$$

где

$$u(0) = v(0) = u(\infty) = v(\infty) = 0. \quad (3)$$

При сделанных выше предположениях амплитуды  $u(y)$ ,  $v(y)$  и  $p(y)$  таких возмущений удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \lambda u &= \left[ -iRe\alpha(U-1) + \frac{d^2}{dy^2} \right] u - vRe \frac{dU}{dy} - i\alpha p, \\ \lambda v &= \left[ -iRe\alpha(U-1) + \frac{d^2}{dy^2} \right] v - \frac{dp}{dy}, \\ i\alpha u + (dv/dy) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\lambda = \alpha^2 + iRe(\alpha - \omega)$ , а произведение  $Re p$  обозначено через  $p$ .

Различают задачи временной и пространственной устойчивости. В случае анализа временной устойчивости  $\alpha$  — произвольное фиксированное положительное вещественное число,  $\omega$  — комплексные числа, подлежащие определению из системы (4), (3). Эта система является проблемой собственных значений, в которой  $\lambda$  играет роль собственного значения, а  $(u, v, p)^T \neq 0$  — отвечающей ему собственной функции. Каждой такой паре отвечает решение вида (2), локально удовлетворяющее системе (1). Если мнимая часть  $\omega = \alpha + i(\lambda - \alpha^2)/Re$  больше нуля, то соответствующее решение (2) растет во времени, если меньше нуля, то убывает, а если равна нулю, то является нейтрально устойчивым. Таким образом, условием локальной временной устойчивости основного

течения при  $x = x_0$  является отрицательность мнимых частей  $\omega$ , отвечающих каждому собственному значению  $\lambda$  проблемы (4), (3) при всех значениях  $\alpha > 0$ .

В случае анализа пространственной устойчивости  $\omega$  — произвольное фиксированное положительное вещественное число, а  $\alpha$  — комплексные числа, подлежащие определению из системы (4), (3). Эта система является квадратичной проблемы собственных значений относительно комплексного собственного значения  $\alpha$  и собственной функции  $(u, v, p)^T \neq 0$ . При каждом рассматриваемом значении  $\omega$ , как правило, требуется найти только одно конкретное собственное значение  $\alpha$ , вещественная часть которого положительная, и отвечающий ему собственный вектор. Для искомого собственного значения имеется хорошее начальное приближение, полученное из решения задачи временной устойчивости.

На практике при анализе устойчивости пограничных слоев в локально-параллельном приближении, используется еще одно полезное упрощение: профиль основного течения при каждом рассматриваемом значении  $x$  считают постоянным выше некоторого достаточно большого значения  $y = y_{BL}$ , которое интерпретируют как границу пограничного слоя при данном значении  $x$ . При этом профиль, рассчитанный до  $y = y_{BL}$  и продолженный далее константой, аппроксимируют достаточно гладким сплайном (например, кубическим). Будем предполагать далее, что такое упрощение сделано на этапе формирования системы (4), то есть профиль  $U$  в (4) обладает свойством  $U(y) = 1$  при  $y \geq y_{BL}$  и имеет непрерывную первую производную.

## 2. Асимптотические граничные условия

Систему уравнений (4) можно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$d\eta/dy = C(y, \lambda)\eta, \quad (5)$$

где

$$C(y, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -i\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1(y, \lambda) & 0 & -i\alpha \\ c_1(y, \lambda) & c_2(y) & i\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ du/dy \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$c_1(y, \lambda) = \lambda + i\text{Re } \alpha(U(y) - 1), \quad c_2(y) = \text{Re } \frac{dU}{dy}(y).$$

Элементы матрицы  $C$  непрерывно зависят от  $y$ . Поэтому при любых фиксированных величинах: комплексном числе  $\lambda$ , вещественном  $y_0$  и 4-компонентном комплексном векторе  $\eta^0$ , существует единственная непрерывная векторная функция  $\eta(y)$ , удовлетворяющая (5), (6) при  $y \neq y_0$  и равная  $\eta^0$  при  $y = y_0$ . Эта векторная функция является также и непрерывно дифференцируемой.

В новых обозначениях проблема собственных значений (4), (3) может быть сформулирована следующим образом:

$$\eta_1(0) = \eta_2(0) = 0, \quad d\eta/dy = C(y, \lambda)\eta, \quad y > 0, \quad \eta_1(\infty) = \eta_2(\infty) = 0, \quad (7)$$

где  $\eta_i$  —  $i$ -ая компонента вектора  $\eta$ . Фиксируя произвольное положительное значение  $y_0$ , проблему (7) можно разбить на две недоопределенные проблемы собственных значений

$$\eta_1^{(1)}(0) = \eta_2^{(1)}(0) = 0, \quad \frac{d\eta^{(1)}}{dy} = C(y, \lambda^{(1)}) \eta^{(1)}, \quad 0 < y < y_0, \quad (8)$$

и

$$\frac{d\eta^{(2)}}{dy} = C(y, \lambda^{(2)}) \eta^{(2)}, \quad y_0 < y < \infty, \quad \eta_1^{(2)}(\infty) = \eta_2^{(2)}(\infty) = 0, \quad (9)$$

и условие сшивки

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}, \quad \eta^{(1)}(y_0) = \eta^{(2)}(y_0). \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что если пара  $\lambda, \eta$  удовлетворяет (7), то пары  $\lambda^{(1)} = \lambda, \eta^{(1)}(y) = \eta(y)$  ( $0 \leq y < y_0$ ) и  $\lambda^{(2)} = \lambda, \eta^{(2)}(y) = \eta(y)$  ( $y_0 \leq y < \infty$ ) будут удовлетворять соответственно (8) и (9) и условию сшивки (10). Верно и обратное утверждение: если пары  $\lambda^{(1)}, \eta^{(1)}$  и  $\lambda^{(2)}, \eta^{(2)}$  удовлетворяют соответственно (8) и (9) и условию сшивки (10), то пара

$$\lambda = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}, \quad \eta(y) = \begin{cases} \eta^{(1)}(y), & 0 \leq y < y_0, \\ \eta^{(2)}(y), & y_0 \leq y < \infty \end{cases}$$

будет удовлетворять (7).

В случае, когда  $U(y) = 1$  при всех  $y \geq y_0$ , общее решение проблемы (9) имеет вид

$$\eta^{(2)}(y) = \exp\{(y - y_0)C(y_0, \lambda^{(2)})\} \eta^{(2)}(y_0),$$

где  $\lambda^{(2)}$  — произвольное комплексное число,  $\eta^{(2)}(y_0)$  — произвольный ненулевой вектор из инвариантного подпространства матрицы

$$C(y_0, \lambda^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -i\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{(2)} & 0 & -i\alpha \\ \lambda^{(2)} & 0 & i\alpha & 0 \end{bmatrix},$$

отвечающего ее собственным значениям с отрицательными вещественными частями. Несложные выкладки показывают, что матрица

$$C(y_0, \gamma^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -i\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 & 0 & -i\alpha \\ \gamma^2 & 0 & i\alpha & 0 \end{bmatrix},$$

где  $\gamma$  — произвольное комплексное число, имеет собственные значения

$$\delta_{1,2} = \pm \gamma, \quad \delta_{3,4} = \pm \alpha, \quad (11)$$

и справедливо следующее тождество:

$$C(y_0, \gamma^2)X(\alpha, \gamma) = X(\alpha, \gamma)\Omega(\alpha, \gamma), \quad (12)$$

где

$$X(\alpha, \gamma) = \begin{bmatrix} -i\alpha & i \\ \alpha & 0 \\ \gamma^2 - \alpha^2 & \alpha + \gamma \\ i\alpha^2 & -i(\alpha + \gamma) \end{bmatrix}, \quad \Omega(\alpha, \gamma) = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}.$$

Поскольку здесь рассматривается случай  $\text{Real}(\alpha) > 0$ , из (11) и (12) следует, что множество решений проблемы (9) состоит из собственных пар вида

$$\lambda^{(2)} = \gamma^2, \quad \eta^{(2)}(y) = X(\alpha, \gamma) \exp\{(y - y_0)\Omega(\alpha, \gamma)\} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где  $\gamma$ ,  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  — произвольные комплексные константы, удовлетворяющие условию

$$\text{Real}(\gamma) > 0 \vee \kappa_2 = 0. \quad (14)$$

Таким образом, проблема собственных значений (7) сводится к проблеме собственных значений (8) с дополнительными условиями

$$\lambda^{(1)} = \gamma^2, \quad \eta^{(1)}(y_0) = \kappa_1 \begin{bmatrix} -i\alpha \\ \alpha \\ \gamma^2 - \alpha^2 \\ i\alpha^2 \end{bmatrix} + \kappa_2 \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ \alpha + \gamma \\ -i(\alpha + \gamma) \end{bmatrix}$$

и (14). Возвращаясь к уравнениям второго порядка, получим как окончательный вариант систему уравнений

$$\begin{aligned} \gamma^2 u &= \left[ -i\text{Re}\alpha(U-1) + \frac{d^2}{dy^2} \right] u - v\text{Re} \frac{dU}{dy} - i\alpha p, \\ \gamma^2 v &= \left[ -i\text{Re}\alpha(U-1) + \frac{d^2}{dy^2} \right] v - \frac{dp}{dy}, \\ i\alpha u + dv/dy &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0) = v(0) = 0, \quad u(y_0) = -\kappa_1 i\alpha + \kappa_2 i, \quad v(y_0) = \kappa_1 \alpha, \\ p(y_0) = \kappa_1 (\gamma^2 - \alpha^2) + \kappa_2 (\alpha + \gamma), \quad \frac{du}{dy}(y_0) = \kappa_1 i\alpha^2 - \kappa_2 i(\alpha + \gamma) \end{aligned} \quad (16)$$

и условием (14).

В случае анализа временной устойчивости, когда  $\alpha$  — произвольное фиксированное положительное вещественное число, а  $\omega$  — комплексные частоты, подлежащие определению, система (15), (16) является квадратичной проблемой собственных значений относительно собственного значения  $\gamma$  и собственной функции, состоящей из векторной функции  $(u, v, p)^T$  и чисел  $\kappa_1, \kappa_2$ ; при этом  $\omega = \alpha + i(\gamma^2 - \alpha^2)/\text{Re}$ . Граничные условия (16), заменившие граничные условия на бесконечности, называют асимптотическими граничными условиями. Эти условия подразумевают наличие среди решений

проблемы (15), (16) всех решений исходной проблемы (4), (3). Однако среди решений проблемы (15), (16) могут оказаться также и решения с  $\text{Real}(\gamma) \leq 0$  и  $\kappa_2 \neq 0$ , продолжение которых не будет затухать на бесконечности. Дополнительное условие (14) позволяет исключить эти лишние решения после того, как все решения проблемы (15), (16) будут найдены.

В случае анализа пространственной устойчивости, когда  $\omega$  — произвольное фиксированное положительное вещественное число, а  $\alpha$  — комплексные числа, подлежащие определению, система (15), (16) рассматривается как нелинейная проблема собственных значений относительно собственного значения  $\alpha$  и собственной функции, состоящей из векторной функции  $(u, v, p)^T$  и чисел  $\kappa_1, \kappa_2$ . При этом  $\gamma = \sqrt{\lambda(\alpha)}$ , где  $\lambda(\alpha) = \alpha^2 + i \text{Re}(\alpha - \omega)$ , а знак при вычислении корня выбирается так, чтобы вещественная часть  $\gamma$  была неотрицательной. Например, для этого можно использовать стандартную формулу вычисления квадратного корня из комплексного числа, выбирая значение, имеющее неотрицательную вещественную часть:

$$\gamma(\alpha) = \sqrt{\frac{|\lambda(\alpha)| + \lambda_r(\alpha)}{2}} + i \text{sign}(\lambda_i(\alpha)) \sqrt{\frac{|\lambda(\alpha)| - \lambda_r(\alpha)}{2}}, \quad (17)$$

где  $\lambda_r(\alpha)$  и  $\lambda_i(\alpha)$  — действительная и мнимая части  $\lambda(\alpha)$  соответственно.

Таким образом, проблема (4), (3) сведена к проблеме (15), (16), (14) в предположении, что  $U(y) = 1$  при всех  $y \geq y_0$ . Для выполнения этого условия, учитывая предположения об основном течении, сделанные в разделе 1, достаточно выбрать  $y_0 = y_{\text{BL}}$ .

### 3. Пространственная аппроксимация

При численном решении задач линейной устойчивости расчеты проводятся в интервале

$$0 \leq y \leq y_0, \quad (18)$$

на границах которого для  $u$  и  $v$  ставятся либо нулевые граничные условия, либо нулевые граничные условия при  $y = 0$  и асимптотические при  $y = y_0$ . В случае нулевых граничных условий величина  $y_0$  выбирается настолько большой, чтобы дальнейшее ее увеличение не оказывало на решение существенного влияния. В случае асимптотических граничных условий полагается  $y_0 = y_{\text{BL}}$ .

Для дискретизации по  $y$  будем использовать метод коллокаций [13], выбрав в качестве узлов сетки точки  $y_j = y(s_j)$ , где

$$y(s) = \frac{1+s}{2+\sigma(1-s)} y_0, \quad -1 \leq s \leq 1, \quad (19)$$

где  $\sigma > 0$  — масштабирующий множитель,  $s_0 = 1$ ,  $s_{n+1} = -1$ , а  $s_j = \cos \frac{\pi j}{n+1}$ ,  $j = 1, \dots, n$  — корни многочлена Чебышева второго рода степени  $n$ . Таким образом, введенная сетка будет удовлетворять следующим соотношениям:  $y_0 > y_1 > \dots > y_n > y_{n+1} = 0$ .

Для аппроксимации производных давления в узлах сетки  $y_1 > \dots > y_n$  используем интерполяционные многочлены Лагранжа на сетке (19), для аппроксимации производных

компонент скорости в тех же узлах используем интерполяционные многочлены Лагранжа на сетке (19) с добавлением узлов  $\pm 1$ . Для расчета значений производных элементарных интерполяционных многочленов Лагранжа используем методы, описанные в работе [14]. Как показывает практика, такая аппроксимация ввиду ее малой погрешности позволяет получать вполне адекватные результаты, во всяком случае для задач, связанных с исследованием устойчивости пограничных слоев и определения в них положения Л-Т перехода (см., например, работы [1, 2, 15]).

Обозначим через  $\mathbf{v}_u$  и  $\mathbf{v}_v$   $n$ -компонентные векторы (столбцы) значений компонент скорости  $u$  и  $v$  в узлах сетки  $y_1 > \dots > y_n$ , через  $\mathbf{p}$  —  $n$ -компонентный вектор (столбец) значений давления в узлах той же сетки, через  $u_0$  и  $v_0$  — величины  $u(y_0)$  и  $v(y_0)$  соответственно. Кроме того, обозначим через  $D_p$  квадратную матрицу порядка  $n$ , являющуюся дискретным аналогом оператора первой производной в узлах  $y_1 > \dots > y_n$  для давления, заданного в узлах той же сетки, через  $D_v$  — квадратную матрицу порядка  $n + 1$ , являющуюся дискретным аналогом оператора первой производной в узлах  $y_0 > \dots > y_n$  для компоненты скорости, заданной в узлах той же сетки с учетом нулевого граничного условия при  $y = 0$ , то есть в узле  $y_{n+1}$ , через  $L_v$  — прямоугольную матрицу размера  $n \times (n + 1)$ , являющуюся дискретным аналогом оператора второй производной в узлах  $y_1 > \dots > y_n$  для компоненты скорости, заданной в узлах  $y_0 > \dots > y_n$ , с учетом нулевого граничного условия при  $y = 0$ , а через  $\Pi$  обозначим  $n$ -компонентную строку, такую, что  $\Pi \mathbf{p}$  является значением давления в узле  $y_0$ , вычисленным с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, построенного на сетке (19). Матрицы  $D_v$  и  $L_v$  разобьем на блоки следующим образом:

$$D_v = \begin{bmatrix} d & r \\ c & D \end{bmatrix}, \quad L_v = [l \quad L],$$

где  $d$  — число,  $r$  —  $n$ -компонентная строка,  $c$  и  $l$  —  $n$ -компонентные столбцы, а  $D$  и  $L$  — квадратные матрицы порядка  $n$ . Через  $A$  и  $B$  обозначим квадратные диагональные матрицы порядка  $n$  значений соответственно  $-\text{Re}(U - 1)$  и  $-\text{Re } dU / dy$  в узлах  $y_1 > \dots > y_n$ . Введенные обозначения позволяют записать полученный методом коллокаций дискретный аналог проблемы (4), (3) следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{v}_u &= (i\alpha A + L) \mathbf{v}_u + B \mathbf{v}_v - i\alpha \mathbf{p}, \\ \lambda \mathbf{v}_v &= (i\alpha A + L) \mathbf{v}_v - D_p \mathbf{p}, \\ i\alpha \mathbf{v}_u + D \mathbf{v}_v &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

а дискретный аналог проблемы (15), (16) переписется в виде

$$\begin{aligned} \gamma^2 \mathbf{v}_u &= (i\alpha A + L) \mathbf{v}_u + l u_0 + B \mathbf{v}_v - i\alpha \mathbf{p}, \\ \gamma^2 \mathbf{v}_v &= (i\alpha A + L) \mathbf{v}_v + l v_0 - D_p \mathbf{p}, \\ i\alpha \mathbf{v}_u + D \mathbf{v}_v + c v_0 &= 0, \\ u_0 &= -\kappa_1 i\alpha + \kappa_2 i, \quad v_0 = \kappa_1 \alpha, \\ \Pi \mathbf{p} &= \kappa_1 (\gamma^2 - \alpha^2) + \kappa_2 (\alpha + \gamma), \\ r \mathbf{v}_u + d u_0 &= \kappa_1 i \alpha^2 - \kappa_2 i (\alpha + \gamma), \end{aligned} \tag{21}$$

Исключая в (21)  $u_0$  и  $v_0$  с помощью двух последних уравнений из всех остальных уравнений, в которые входят эти переменные, и исключая  $\gamma$  из предпоследнего уравнения с помощью последнего, эту квадратичную алгебраическую проблему собственных значений можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\gamma^2 \mathbf{v}_u &= (i\alpha A + L) \mathbf{v}_u + B \mathbf{v}_v - i\alpha \kappa_1 + i\kappa_2 - i\alpha \mathbf{p}, \\ \gamma^2 \mathbf{v}_v &= (i\alpha A + L) \mathbf{v}_v + a\kappa_1 - D \mathbf{p}, \\ i\alpha \mathbf{v}_u + D \mathbf{v}_v + a\kappa_1 &= 0, \\ \gamma^2 \kappa_1 &= \mathbf{P} \mathbf{p} - i r \mathbf{v}_u - \alpha d \kappa_1 + d \kappa_2, \\ \gamma \kappa_2 &= i r \mathbf{v}_u + (\alpha d + \alpha^2) \kappa_1 - (d + \alpha) \kappa_2.\end{aligned}\quad (22)$$

#### 4. Методы решения алгебраических проблем собственных значений

Опишем сначала алгоритмы решения проблем собственных значений, возникающих при анализе временной устойчивости, то есть когда  $\alpha$  — произвольное фиксированное положительное вещественное число, а  $\omega$  — комплексные частоты, подлежащие определению.

Запишем алгебраическую проблему собственных значений (20) в более компактном виде:

$$\lambda \mathbf{v} = J \mathbf{v} + G \mathbf{p}, \quad F \mathbf{v} = 0, \quad (23)$$

где

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_u \\ \mathbf{v}_v \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} i\alpha A + L & B \\ 0 & i\alpha A + L \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -i\alpha I \\ -D \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad F = [i\alpha I \quad D],$$

$I$  — единичная матрица порядка  $n$ ; блочная структура всех матриц соответствует блочной структуре вектора  $\mathbf{v}$ .

Обозначим через  $Q_F$  и  $Q_G$  унитарные прямоугольные матрицы размера  $2n \times n$ , столбцы которых образуют ортонормированные базисы в ядрах матриц  $F$  и  $G^*$  соответственно. Эти матрицы можно найти, вычислив полные QR-разложения [16] матриц  $F^*$  и  $G$ . Произвольный вектор  $\mathbf{v}$ , удовлетворяющий второму уравнению в (23), однозначно представим в виде  $\mathbf{v} = Q_F \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u} = Q_F^* \mathbf{v}$ . Подставив это представление в первое уравнение (23) и умножив полученное выражение слева на  $Q_G^*$ , приходим к равенству

$$\lambda Q_G^* Q_F \mathbf{u} = Q_G^* J Q_F \mathbf{u},$$

разделив которое слева на матрицу  $Q_G^* Q_F$ , приходим к обыкновенной проблеме собственных значений

$$\lambda \mathbf{u} = H \mathbf{u}$$

с матрицей  $H = (Q_G^* Q_F)^{-1} (Q_G^* J Q_F)$ . Детальное обоснование такого типа редукций приведено в работе [17]. Вычислив матрицу  $H$  и решив для нее полную проблему собственных значений, например, QR-алгоритмом [16], найдем все конечные собственные значения проблемы (23).

Рассмотрим теперь алгебраическую проблему собственных значений (22). Запишем ее в следующем более компактном виде:

$$\gamma^2 \mathbf{v} = J \mathbf{v} + a \kappa_2 + G \mathbf{p}, \quad F \mathbf{v} = 0, \quad \gamma \kappa_2 = b \mathbf{v} + f \kappa_2, \quad (24)$$

где

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_u \\ \mathbf{v}_v \\ \kappa_1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} i\alpha A + L & B & -i\alpha l \\ 0 & i\alpha A + L & \alpha l \\ -ir & 0 & -\alpha d \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} il \\ 0 \\ d \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -i\alpha I \\ -D_p \\ \Pi \end{bmatrix},$$

$$F = [i\alpha I \quad D \quad \alpha c], \quad b = [ir \quad 0 \quad \alpha d + \alpha^2], \quad f = -d - \alpha;$$

блочная структура всех матриц соответствует блочной структуре вектора  $\mathbf{v}$ .

К проблеме (24) можно применить редукцию, аналогичную описанной для проблемы (23). Обозначим через  $Q_F$  и  $Q_G$  унитарные прямоугольные матрицы размера  $(2n+1) \times (n+1)$ , столбцы которых образуют ортонормированные базисы в ядрах матриц  $F$  и  $G^*$  соответственно. Произвольный вектор  $\mathbf{v}$ , удовлетворяющий второму уравнению в (24), однозначно представим в виде  $\mathbf{v} = Q_F \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u} = Q_F^* \mathbf{v}$ . Подставив это представление в первое уравнение (24) и умножив полученное уравнение слева на  $Q_G^*$ , получим

$$\gamma^2 Q_G^* Q_F \mathbf{u} = Q_G^* J Q_F \mathbf{u} + (Q_G^* a) \kappa_2. \quad (25)$$

Разделив уравнение (25) слева на матрицу  $Q_G^* Q_F$ , приходим к уравнению

$$\gamma^2 \mathbf{u} = H \mathbf{u} + h \kappa_2 \quad (26)$$

с квадратной матрицей  $H = (Q_G^* Q_F)^{-1} (Q_G^* J Q_F)$  порядка  $n+1$  и  $n+1$ -компонентным столбцом  $h = (Q_G^* Q_F)^{-1} (Q_G^* a)$ . Подставив  $\mathbf{v} = Q_F \mathbf{u}$  в последнее уравнение в (24), получим уравнение

$$\gamma \kappa_2 = g \mathbf{u} + f \kappa_2, \quad (27)$$

где  $g = b Q_F$ .

Таким образом, проблема собственных значений (24) сводится к проблеме собственных значений (26), (27). Линеаризовав (26) путем формирования сопровождающей матрицы, получим обыкновенную алгебраическую проблему собственных значений, решив которую с помощью QR-алгоритма и отобрав собственные пары, удовлетворяющие условию (14), найдем приближенные решения исходной проблемы собственных значений (4), (3):

$$\lambda = \gamma^2, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v}_u \\ \mathbf{v}_v \end{bmatrix} = \tilde{Q}_F \mathbf{u},$$

где  $\tilde{Q}_F$  — матрица размером  $2n \times (n+1)$ , образованная первыми  $2n$  строками матрицы  $Q_F$ .

Перейдем теперь к описанию алгоритмов решения проблем собственных значений, возникающих при анализе пространственной устойчивости, то есть когда  $\omega$  — произвольное фиксированное положительное вещественное число, а  $\alpha$  — комплексные числа, подлежащие определению. Соответствующие нелинейные проблемы собственных значений запишем в виде

$$A(\alpha) \mathbf{x} = 0, \quad (28)$$

полагая  $\lambda(\alpha) = \alpha^2 + i \operatorname{Re}(\alpha - \omega)$  в случае однородных граничных условий и определяя  $\gamma(\alpha)$  согласно формуле (17) в случае асимптотических граничных условий.

Как уже было отмечено в разделе 1, в задачах пространственной устойчивости, возникающих при вычислении положения Л-Т перехода, при каждом рассматриваемом

значении  $\omega$  обычно требуется найти только одно конкретное собственное значение  $\alpha$ , вещественная часть которого является положительной, и отвечающий ему собственный вектор. Более того, для искомого собственного значения имеется хорошее начальное приближение, взятое из решения задачи временной устойчивости, что позволяет эффективно применять метод последовательных линейных проблем. Для этого, задав  $\alpha$  и некоторое число  $\text{tol} > 0$ , находим наименьшее по абсолютной величине собственное значение  $\mu$  и отвечающий ему собственный вектор  $\mathbf{x}$  линейной обобщенной проблемы собственных значений  $\mathcal{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mu\mathcal{A}'(\alpha)\mathbf{x}$ , где штрих означает производную по  $\alpha$ , и полагаем  $\alpha$  равным  $\alpha - \mu$ . Если  $\|\mathcal{A}(\alpha)\mathbf{x}\|_2 < \text{tol}$ , то расчет прекращается. Иначе вычисления повторяются с найденным новым значением  $\alpha$ . Частичные линейные проблемы собственных значений будем решать либо с помощью обратных итераций, либо их комбинацией с методом ньютоновского типа, как это было предложено в работе [18].

Все упомянутые в данном разделе стандартные матричные алгоритмы могут быть реализованы, например, в пакете LAPACK [19]. Программная реализация описанных алгоритмов решения проблем собственных значений не вызывает особых проблем, при этом основной объем вычислений полученного кода будет приходиться на стандартные, тщательно отработанные матричные процедуры.

### 5. Численные эксперименты

В рамках технологии вычисления положения Л-Т перехода, предложенной в работах [1, 2], основной объем вычислений приходится на решение временных и пространственных проблем собственных значений. В текущем разделе сравним вычислительные затраты, связанные с решением этих проблем с использованием однородных и асимптотических граничных условий, на примере задачи вычисления положения Л-Т перехода в пограничном слое на верхней части крылового профиля NACA23012, расположенного под нулевым углом атаки к набегающему потоку воздуха при нормальных условиях и скорости  $U_\infty = 50$  (здесь и далее значения всех размерных величин даются в системе СИ).

По данным о ламинарном обтекании из работы [2] был рассчитан профиль продольной компоненты скорости в криволинейных координатах  $x$  и  $y$ , где  $x$  — длина дуги вдоль поверхности (продольная координата) и  $y$  — расстояние до поверхности по нормали к ней (вертикальная координата). Для расчета использовалась прямоугольная сетка

$$\{(x_k, \tilde{y}_j) : k = 1, 2, \dots, N_x; j = 0, 1, \dots, N_y + 1\},$$

которая по  $x$  ( $x_1 < \dots < x_{N_x}$ ) была выбрана равномерной с числом узлов  $N_x = 200$ , а по  $y$  ( $\tilde{y}_0 > \dots > \tilde{y}_{N_y+1}$ ) — преобразованной чебышевской, то есть была аналогична сетке, определенной в разделе 3, с числом внутренних узлов  $N_y = 200$ , параметром  $\sigma = 2$  и достаточно большим  $\tilde{y}_0$ . Рассчитанный профиль продольной компоненты скорости был затем модифицирован в соответствии с описанием, данным в конце раздела 1. А именно: при каждом значении  $x = x_k$ , находящимся выше границы  $\tilde{y}_{j_{\text{вл}}(k)}$  пограничного слоя, определяемой по отклонению удельной энтальпии от удельной энтальпии набегающего потока, профиль продолжался константой.

Для решения проблем собственных значений при каждом значении  $x = x_k$  по полученным значениям профиля продольной компоненты скорости в узлах сетки по  $y$  строился кубический сплайн, с помощью которого профиль интерполировался на сетки, используемые для решения проблем собственных значений. При этом высота расчетной области

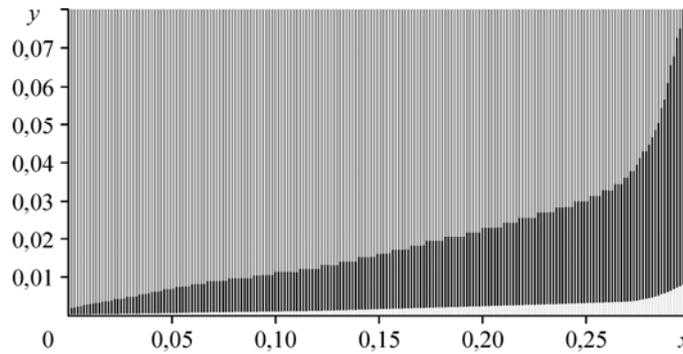


Рис. 1. Узлы сетки, используемой для расчета профиля продольной компоненты скорости (серый участок), и узлы сеток, используемых для решения проблем собственных значений с однородными при  $n = 60$  (темно-серый участок) и асимптотическими при  $n = 20$  (светло-серый участок) граничными условиями.

выбиралась равной

$$y_0 = \min \left\{ \tilde{y}_0, M_y \tilde{y}_{J_{BL}(k)} \right\},$$

где  $M_y = 10$  в случае однородных граничных условий и  $M_y = 1$  в случае асимптотических граничных условий. Сетки по  $y$  в обоих случаях выбирались аналогичными сетке, определенной в разделе 3, с параметром  $\sigma = 2$  и числом внутренних узлов  $n$ , которое в численных экспериментах варьировалось.

На рис. 1 серым цветом показаны узлы сетки, используемой для расчета профиля продольной компоненты скорости, темно-серым — узлы сетки, используемой для решения проблем собственных значений с нулевыми граничными условиями, и светло-серым — узлы сетки, используемой при решении проблем собственных значений с асимптотическими граничными условиями.

На рис. 2 изображены профили продольной компоненты скорости вблизи подстилающей поверхности при значениях  $x = x_k$  для  $k = 1 + 10i$ , где  $i = 0, \dots, 19$ . Отметим, что наличие отрицательных значений продольной компоненты скорости вблизи подстилающей поверхности при некоторых значениях  $x$  связано с наличием в рассматриваемом ламинарном пограничном слое двух небольших локальных отрывных зон.

Возмущениями, вызывающими Л-Т переход в рассматриваемом пограничном слое, являются волны Толлмина–Шлихтинга. Для определения частот колебаний, при которых возможна неустойчивость, и интервалов нарастания отвечающих им волн Толлмина–Шлихтинга сначала исследовалась временная устойчивость пограничного слоя. Для этого временная проблема собственных значений (23) либо (24) решалась при всех

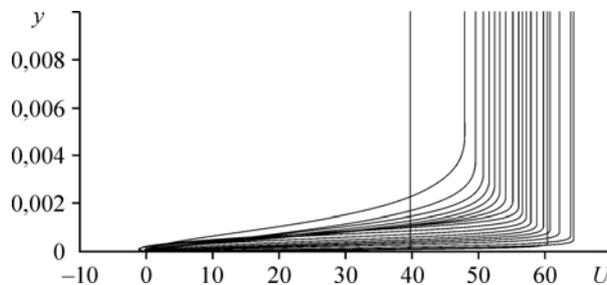


Рис. 2. Профили продольной компоненты скорости вблизи подстилающей поверхности при нескольких значениях  $x$ .

$x = x_k$  и значениях  $\alpha_1 < \dots < \alpha_{N_\alpha}$  продольного волнового числа  $\alpha$ , образующих равномерную сетку в интервале

$$0 < \alpha \leq \alpha_{N_\alpha} = M_\alpha / \min_{1 \leq k \leq N_x} \tilde{y}_{j_{\text{вл.}}(k)},$$

где  $M_\alpha = 0,5$ , а  $N_\alpha = 50$ , при этом отбирались собственные значения  $\omega_{kl}$  с максимальной мнимой частью.

Вычисленные собственные значения  $\omega_{kl}$  позволяют построить нейтральную кривую временной устойчивости в плоскости  $(x, \alpha)$ . Если при фиксированном  $l$  и  $1 < k \leq N_x$  мнимая часть  $\omega_{k-1,l}$  является отрицательной, а мнимая часть  $\omega_{kl}$  не отрицательная, то  $x_k$  — начало интервала неустойчивости при  $\alpha = \alpha_l$ . Если же мнимая часть  $\omega_{k-1,l}$  является положительной, а мнимая часть  $\omega_{kl}$  неположительная, то  $x_k$  — начало интервала устойчивости при  $\alpha = \alpha_l$ . На рис. 3 приведены нейтральные кривые, рассчитанные описанным выше способом. Синим цветом обозначены точки начала временной устойчивости, красным — точки начала неустойчивости. Видно, что результаты, полученные с помощью однородных и асимптотических граничных условий, почти совпадают на рис. 3а и 3б.

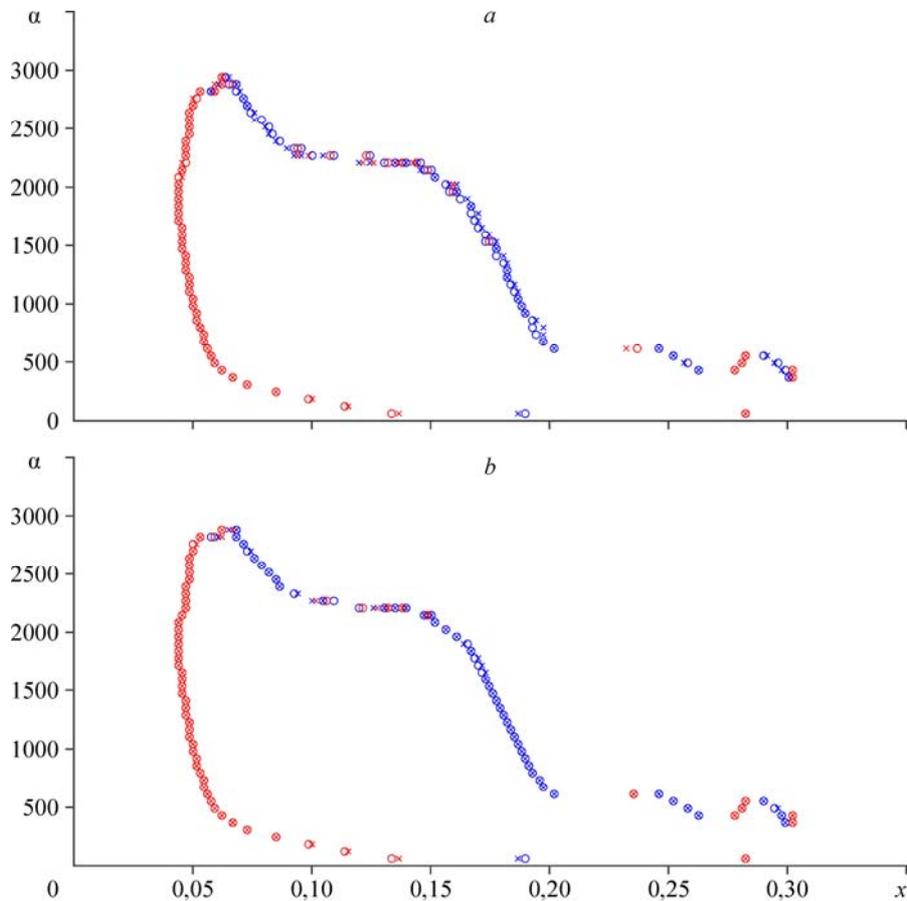


Рис. 3. Точки нейтральной кривой, полученные с использованием однородных (круглые маркеры) и асимптотических (крестообразные маркеры) граничных условий при числах узлов сетки соответственно  $n = 60$  и  $20$  (а) и  $n = 100$  и  $30$  (б).

Начала интервалов устойчивости — синий цвет,  
 начала интервалов неустойчивости — красный цвет.

Кроме того, сравнение этих фрагментов рисунка между собой показывает, что при увеличении числа узлов сеток результаты, полученные с помощью однородных и асимптотических граничных условий, становятся ближе друг к другу.

Далее нам потребуются только значения, соответствующие началам  $x_k$  интервалов неустойчивости, вещественные части отвечающих им собственных значений  $\omega_{kl}$  (временные частоты) и значения  $\alpha_l$  продольного волнового числа, при которых они были найдены. Обозначим через  $\Omega$  множество отобранных временных частот, для  $\omega \in \Omega$  будем через  $x_{k(\omega)}$  обозначать соответствующее начало интервала временной неустойчивости, а через  $\alpha(\omega)$  — значение  $\alpha$ , при котором была найдена эта частота.

Пусть  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  — собственное значение с максимальной мнимой частью проблемы (4), (3), рассматриваемой как задача временной устойчивости при некотором вещественном  $\alpha > 0$ , а  $\alpha_r + i\alpha_i$  — отвечающее волне Толлмина–Шлихтинга собственное значение этой проблемы, рассматриваемой как задача пространственной устойчивости при  $\omega = \omega_r$ . Тогда [20]

$$\alpha_i \approx -\omega_i \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial \alpha} \right)^{-1}. \quad (29)$$

Учитывая, что для возмущений, распространяющихся вниз по потоку, в том числе пакетов волн Толлмина–Шлихтинга, групповая скорость  $\partial \omega_r / \partial \alpha_r > 0$ , из формулы (29) следует, что при  $\omega \in \Omega$  величина  $x_{k(\omega)}$  является началом не только временной, но и пространственной неустойчивости. Следовательно, для вычисления инкрементов нарастания волн Толлмина–Шлихтинга в интервалах их неустойчивости достаточно решить для каждой найденной частоты  $\omega \in \Omega$  пространственные проблемы собственных значений (28), начиная с  $x = x_{k(\omega)}$  и вычисляя при каждом  $x = x_k$  собственное значение  $\alpha(\omega, x_k)$ , отвечающие волне Толлмина–Шлихтинга. При  $x = x_{k(\omega)}$  в качестве начального приближения для итерационного метода, описанного в разделе 4, выбираем  $\alpha(\omega)$ , а для последующих узлов по  $x$  используем собственное значение, найденное для предыдущего узла. Вычисления продолжают до тех пор, пока мнимая часть собственного значения  $\alpha(\omega, x_k)$  остается положительной.

Построив по мнимым частям найденных собственных значений кусочно-линейные сплайны  $\alpha_i(\omega, x)$ , получим изображенные на рис. 4 инкременты нарастания волн Толлмина–Шлихтинга в интервалах их неустойчивости, как функции  $x$ . Видно, что результаты, полученные с помощью однородных и асимптотических граничных условий, несколько отличаются на рис. 4а и 4б. Однако сравнение этих частей рисунка показывает, что при увеличении числа узлов сеток результаты, полученные с помощью однородных и асимптотических граничных условий, становятся ближе друг к другу.

В соответствии с  $e^N$ -методом, положение Л-Т перехода рассчитывалось как значение  $x$ , при котором максимальная степень усиления возмущений

$$\max_{\omega \in \Omega} N_\omega(x)$$

достигает порогового  $N$ -фактора, где  $N_\omega(x) = - \int_{x_{k(\omega)}}^x \alpha_i(x) dx$  означает степень усиления

возмущений при частоте  $\omega$ . Во всех расчетах использовались пороговые  $N$ -факторы 14,49 (начало перехода) и 17,36 (конец перехода), отвечающие степени турбулентности  $Tu = 0,01\%$  в соответствии с эмпирическими формулами [21].

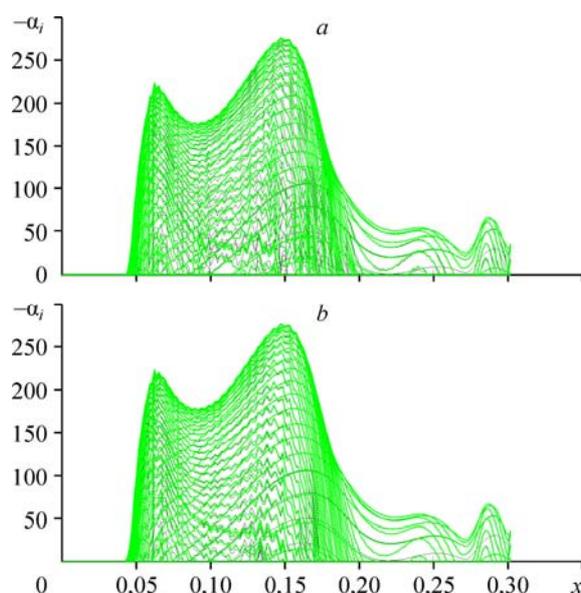


Рис. 4. Инкременты  $\alpha_i(\omega, x)$  нарастания возмущений в случае однородных (черный цвет) и асимптотических (зеленый цвет) граничных условий при числах узлов сетки, составляющих соответственно  $n = 60$  и  $20$  (а) и  $n = 100$  и  $30$  (б).

В таблице приведены округленные до шести значащих десятичных цифр значения положений начала ( $x_{\text{tran}}$ ) и конца ( $x_{\text{turb}}$ ) Л-Т перехода, рассчитанные с использованием однородных и асимптотических граничных условий при различных значениях числа узлов  $n$ . Видно, что асимптотические граничные условия позволяют достичь той же точности, что и однородные, но при использовании значительно меньшего числа узлов сетки. Например, четвертая значащая цифра при вычислении, основанном на асимптотических граничных условиях, не меняется с увеличением  $n$  начиная с  $n = 20$ , в то время как для метода, использующего однородные граничные условия, такому положению соответствует  $n = 60$ . Таким образом, для получения четырех правильных значащих десятичных цифр с использованием асимптотических граничных условий достаточно решать временные и пространственные проблемы собственных значений с матрицами порядков 43 и 62 соответственно, а с использованием однородных граничных условий — 60 и 180. Это приводит к разнице суммарных времен расчета в два раза.

Таблица

Рассчитанные положения начала ( $x_{\text{tran}}$ ) и конца ( $x_{\text{turb}}$ ) перехода, времена решения временных ( $T_t$ ) и пространственных ( $T_s$ ) проблем собственных значений и общее время расчета ( $T$ ), а также количество рассмотренных временных частот  $|\Omega|$ , при различных значениях  $n$  в случае однородных ( $n = 40, \dots, 100$ ) и асимптотических ( $n = 15, \dots, 30$ ) граничных условий

$n$	$x_{\text{tran}}$	$x_{\text{turb}}$	$T_t$	$T_s$	$T$	$ \Omega $
40	0,126654	0,138304	13,2	7,8	21,0	78
50	0,126613	0,138240	20,6	9,9	30,5	67
60	0,126579	0,138177	29,8	12,0	41,8	66
70	0,126576	0,138188	37,1	14,5	51,6	59
80	0,126567	0,138177	48,9	17,4	66,3	61
100	0,126573	0,138173	76,3	30,2	106,5	60
15	0,126722	0,138469	7,3	2,7	10,0	63
20	0,126539	0,138163	16,9	4,0	20,9	64
25	0,126568	0,138176	27,2	5,1	32,3	59
30	0,126574	0,138171	38,9	5,8	44,7	61

Отметим, что значения положений начала и конца перехода, приведенные в таблице, несколько отличаются от значений положений начала и конца перехода при той же степени турбулентности набегающего потока, приведенных для верхней части крылового профиля NASA23012 в работе [2]. Это связано с различием выбранных начал отсчета криволинейной координаты  $x$ . В исходных декартовых координатах, в которых вычислялось ламинарное обтекание, результаты совпадают с высокой точностью.

### Заключение

В настоящей работе для определения положения Л-Т перехода в рамках технологии, предложенной в работах [1, 2], обосновано использование асимптотических граничных условий, полученных в работе [3] на основе аналитически вычисленного полного инвариантного подпространства решений, затухающих на бесконечности. Эти граничные условия, в отличие от асимптотических граничных условий, полученных на основе собственных функций сопряженной задачи, остаются корректными в случае неполноты системы собственных функций, характерной для задач гидродинамической устойчивости.

На примере крылового профиля NASA23012 показано, что асимптотические граничные условия позволяют существенно сократить время расчета положения Л-Т перехода за счет значительного уменьшения необходимого числа узлов сетки при сохранении заданной точности результата. Так, четыре правильные значащие десятичные цифры при использовании асимптотических граничных условий вычисляются вдвое быстрее, чем при использовании однородных граничных условий.

Следует отметить, что возмущения, к анализу нарастания которых приводит вычисление положения Л-Т перехода в сдвиговых сжимаемых сверхзвуковых течениях, пренебрежимо малы на расстояниях от подстилающей поверхности не в десятки, как в случае несжимаемого потока, а в сотни толщин пограничного слоя. Поэтому можно ожидать, что выигрыш при применении асимптотических граничных условий в рамках  $e^N$ -метода для таких течений будет существенно выше.

### Список литературы

1. Бойко А.В., Нечепуренко Ю.М., Жучков Р.Н., Козелков А.С. Блок расчета положения ламинарно-турбулентного перехода для пакета ЛОГОС // Теплофизика и аэромеханика. 2014. Т. 21, № 2. С. 201–220.
2. Boiko A.V., Nepochurenko Yu.M., Abalakin I.V., Bobkov V.G. Numerical prediction of laminar-turbulent transition on an airfoil // Russ. J. Numer. Analysis Math. Modelling. 2014. Vol. 29, No. 4. P. 205–218.
3. Бойко А.В., Демьянко К.В., Нечепуренко Ю.М. Асимптотические граничные условия для анализа гидродинамической устойчивости течений в областях с открытой границей. Москва. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 129. 27 с.
4. Boiko A.V., Dovgal A.V., Grek G.R., Kozlov V.V. Physics of transitional shear flows. Berlin: Springer, 2012. 272 p.
5. Bertolotti F.P., Joslin R.D. Effect of far-field boundary conditions on boundary-layer transition // J. Comput. Phys. 1995. Vol. 118, No. 2. P. 392–395.
6. Grosch C.E., Orszag S.A. Numerical solution of problems in unbounded regions: Coordinate transforms // J. Comput. Phys. 1977. Vol. 25, No. 3. P. 273–295.
7. Boyd J.P. The optimization of convergence for Chebyshev polynomial methods in an unbounded domain // J. Comput. Phys. 1982. Vol. 45, No. 1. P. 43–79.
8. Brown W.B. A stability criterion for three-dimensional laminar boundary layers // Boundary layer and flow control: Its principles and application / ed. G.V. Lachmann. Oxford: Pergamon, 1961. Vol. 2. P. 913–923.
9. Володин А.Г., Гапонов С.А. Устойчивость несжимаемого пограничного слоя // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1970. Т. 2, № 8. С. 55–58.
10. Carpenter P.W., Garrad A.D. The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 1. Tollmien–Schlichting instabilities // J. Fluid Mech. 1985. Vol. 155. P. 465–510.
11. Keller H.B. Numerical solution of two point boundary value problems. Philadelphia: SIAM, 1976. 59 p.
12. Жигулев В.Н. Возникновение турбулентности. Динамическая теория возбуждения и развития неустойчивостей в пограничных слоях. Новосибирск: Наука, 1987. 282 с.

13. **Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A.** Spectral methods. Fundamentals in single domains. Berlin: Springer, 2006. 563 p.
14. **Weideman J.A.C., Reddy S.C.** A MATLAB differentiation matrix suite // ACM Trans. Math. Software. 2000. Vol. 26, No. 4. P. 465–519.
15. **Boiko A.V., Demyanko K.V., Nечepurenko Yu.M.** On computing the location of laminar-turbulent transition in compressible boundary layers // Russ. J. Numer. Analysis Math. Modelling. 2017. Vol. 32, No. 1. P. 1–12.
16. **Golub G.H., Van Loan Ch.** Matrix computations. 4th ed. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2013. 756 p.
17. **Нечепуренко Ю.М.** О редукции линейных дифференциально-алгебраических систем управления // Докл. РАН. 2012. Т. 445, № 1, С. 17–19.
18. **Demyanko K.V., Nечepurenko Yu.M., Sadkane M.** A Newton-type method for non-linear eigenproblems // Russ. J. Numer. Analysis Math. Modelling. 2017. Vol. 32, No. 4. P. 237–244.
19. **Anderson E., Bai Z., Bischof C., Demmel J., Dongarra J., Du Croz J., Greenbaum A., Hammarling S., McKenney A., Ostrouchov S., Sorensen D.** LAPACK user's guide. 3rd ed. Philadelphia: SIAM, 1999. 407 p.
20. **Gaster M.** A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 14. P. 222–224.
21. **Van Ingen J.L.** Transition, pressure gradient, suction, separation and stability theory // AGARD-CP-224 Laminar-turbulent transition. Copenhagen, 1977. P. 20.1–20.15.

*Статья поступила в редакцию 24 сентября 2018 г.,  
после доработки — 15 октября 2018 г.,  
принята к публикации 11 декабря 2018 г.*