УДК 534.222.2

О ВОЗМУЩЕНИИ ФРОНТА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Е. И. Роменский

(*Новосибирск*)

Рассмотрим систему уравнений нелинейной вязкоупругости в следующей форме [1]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0,\ i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\alpha} + g_{i\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} + g_{i\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} = \varphi_{ij},\ i, j = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial S}{\partial x_\alpha} = \varkappa,$$

где x_1, x_2, x_3 — эйлеровы (декартовы) координаты; u_i — компоненты вектора скорости; g_{ij} — компоненты тензора деформаций; S — энтропия; $\sigma_{ij} = -2\rho g_{i\alpha}\partial E/g\partial_{\alpha j}$ — тензор напряжений; $E = E(k_1, k_2, k_3, S)$ — плотность внутренней энергии; $k_i = \sqrt{g_i}$, g_i — главные значения тензора g_{ij}; $\rho = \rho_0\sqrt{\det \|g_{ij}\|}$ — плотность среды.

Правые части φ_{ij} в уравнениях для g_{ij} учитывают неупругие деформации и в данной модели представляют собой максвелловские релаксационные члены, $\varkappa$ учитывает рост энтропии при неупругих деформациях и выражается через φ_{ij} из закона сохранения энергии $\varkappa = -E_{g_{ij}}\varphi_{ij}/E_S$. Выберем φ_{ij} следующим образом: $\varphi_{ii} = \frac{2}{\tau} g_{ii}\left(h_i - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}\right)$, $h_i = \ln k_i$, $\varphi_{ij} = -\frac{1}{\tau} g_{ij}\,(i \neq j)$, где $\tau(k_1, k_2, k_3, S)$ — характерное время релаксации касательных напряжений. Будем использовать для τ интерполяционные формулы, приведенные в [2], которые представляют собой зависимость вида $\tau = \tau(\sigma, T)$, где σ — интенсивность касательных напряжений; T — температура. Интерполяционные формулы для внутренней энергии приведены в [3].

Плоская стационарная волна — решение системы (1) вида $u_1(x_1)$, $u_2 = u_3 = 0$, $g_{11}(x_1)$, $g_{22}(x_1) = g_{33}(x_1)$, $g_{ij} = 0\ (i \neq j)$, $S(x_1)$ (далее будем обозначать $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $u = u_1$, $v = u_2$, $w = u_3$). Это решение удовлетворяет одномерной системе уравнений, которая может быть получена из (1)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 - \sigma_1)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho\left(E + \frac{u^2}{2}\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left[\rho u\left(E + \frac{u^2}{2}\right) - u\sigma_1\right]}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + u\frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{h_1 - h_2}{3\tau},$$

где $h_i = -\frac{1}{2}\ln g_i$; $\rho = \rho_0 \exp(-h_1 - h_2 - h_3)$; $E = E(h_1, h_2, h_3, S)$;

$$\sigma_i = \rho E_{h_i}.$$

Стационарные волны удовлетворяют системе

$$[\rho u] = 0, \quad [\rho u^2 - \sigma_1] = 0, \tag{2}$$

$$\left[\rho u\left(E + \frac{u^2}{2}\right) - u\sigma_1\right] = 0, \quad u\frac{dh_2}{dx} = \frac{h_1 - h_2}{3\iota}$$

и условиям

при $x \to -\infty$

$$u \to u_0, \ \rho \to \rho_0, \ h_2 \to 0, \ S \to 0,$$

$$\frac{du}{dx} \to 0, \ \frac{d\rho}{dx} \to 0, \ \frac{dh_2}{dx} \to 0, \ \frac{dS}{dx} \to 0;$$

при $x \to +\infty$

$$u \to u_1, \ \rho \to \rho_1, \ h_2 \to -\frac{1}{3}\ln(\rho_1/\rho_0), \ S \to S_1, \ \frac{du}{dx} \to 0,$$

$$\frac{d\rho}{dx} \to 0, \ \frac{dh_2}{dx} \to 0, \ \frac{dS}{dx} \to 0.$$

Решения системы (2) были исследованы в [4], там было установлено, что (2) имеет непрерывное решение, если u_0 меньше скорости распространения продольных волн в ненапряженной среде. Такие решения называются пластическими волнами, именно они будут рассматриваться.

Пусть известно решение системы (1) $u_i(t, x_\alpha)$, $g_{ij}(t, x_\alpha)$, $S(t, x_\alpha)$. Система уравнений для распространения возмущений получается подстановкой в (1) возмущенных решений $u_i + \delta u_i$, $g_{ij} + \delta g_{ij}$, $S + \delta S$ и отбрасыванием членов разложения уравнений с возмущениями с порядком выше первого. Проделав эту процедуру, получим линейную систему

$$\frac{\partial \delta u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_\alpha} - c_{ikmn}\frac{\partial \delta g_{mn}}{\partial x_k} - c_{ik0}\frac{\partial \delta S}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\delta u_\alpha - \tag{3}$$

$$- \left(\frac{\partial c_{ikmn}}{\partial g_{pq}}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x_k} + \frac{\partial c_{ik0}}{\partial g_{pq}}\frac{\partial S}{\partial x_k}\right)\delta g_{pq} - \left(\frac{\partial c_{ikmn}}{\partial S}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x_k} + \frac{\partial c_{ik0}}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x_k}\right)\delta S = 0,$$

$$\frac{\partial \delta g_{ij}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \delta g_{ij}}{\partial x_\alpha} + g_{i\alpha}\frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_j} + g_{j\alpha}\frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\alpha}\delta u_\alpha +$$

$$+ \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j}\delta g_{i\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\delta g_{j\alpha} = \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial g_{pq}}\delta g_{pq} + \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial S}\delta S,$$

$$\frac{\partial \delta S}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \delta S}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial S}{\partial x_\alpha}\delta u_\alpha = \frac{\partial \varkappa}{\partial g_{pq}}\delta g_{pq} + \frac{\partial \varkappa}{\partial S}\delta S,$$

где $c_{ikmn} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial g_{mn}}$; $c_{ik0} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial S}$.

Коэффициенты этой системы зависят от решения (2), т. е. только от x.

Предположим, что возмущение фронта волны «почти плоское», т. е. производные возмущений по y и z много меньше производных по x. Прежде чем перейти к изучению произвольно возмущенного фронта, проведем исследование для одной гармоники разложения возмущения в ряд Фурье (предполагается, что такое разложение возможно). Пусть возмущение не зависит от z, а зависимость от y представлена в виде $\delta u_i = \delta u_i(t, x)e^{i\omega y}$, $\delta g_{ij} = \delta g_{ij}(t, x)e^{i\omega y}$, $\delta S = \delta S(t, x)e^{i\omega y}$. Для таких возмущений получим одномерную систему уравнений (полагаем $\delta u_3 = 0$, $\delta g_{13} = \delta g_{23} = 0$)

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} + u\frac{\partial \delta u}{\partial x} - (E_{h_1h_1} - E_{h_1})\frac{\partial \delta h_1}{\partial x} - (E_{h_1h_2} - E_{h_1})\frac{\partial \delta h_2}{\partial x} - (E_{h_1h_3} - E_{h_1}) \times$$
$$\times \frac{\partial \delta h_3}{\partial x} - E_{h_1S}\frac{\partial \delta S}{\partial x} + \frac{du}{dx}\delta u - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho E_{h_1h_1}}{dx}\delta h_1 - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho E_{h_1h_2}}{dx}\delta h_2 -$$
$$- \frac{1}{\rho}\frac{d\rho E_{h_1h_3}}{dx}\delta h_3 - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho E_{h_1S}}{dx}\delta S - i\omega\frac{E_{h_1} - E_{h_2}}{g_1 - g_2}\delta g_{12} = 0,$$
$$\frac{\partial \delta h_1}{\partial t} + u\frac{\partial \delta h_1}{\partial x} - \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{dh_1}{dx}\delta u = -\frac{\partial \psi_1}{\partial h_i}\delta h_i - \frac{\partial \psi_1}{\partial S}\delta S,$$
$$\frac{\partial \delta h_2}{\partial t} + u\frac{\partial \delta h_2}{\partial x} + \frac{dh_2}{dx}\delta u - i\omega\delta v = -\frac{\partial \psi_2}{\partial h_i}\delta h_i - \frac{\partial \psi_2}{\partial S}\delta S,$$
$$\frac{\partial \delta h_3}{\partial t} + u\frac{\partial \delta h_3}{\partial x} + \frac{dh_3}{dx}\delta u = -\frac{\partial \psi_3}{\partial h_i}\delta h_i - \frac{\partial \psi_3}{\partial S}\delta S,$$
$$\frac{\partial \delta S}{\partial t} + u\frac{\partial \delta S}{\partial x} + \frac{dS}{dx}\delta u = \frac{\partial \varkappa}{\partial h_i}\delta h_i + \frac{\partial \varkappa}{\partial S}\delta S,$$
$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} + u\frac{\partial \delta v}{\partial x} - \frac{E_{h_1} - E_{h_2}}{g_1 - g_2}\frac{\partial \delta g_{12}}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}\left(\rho\frac{E_{h_1} - E_{h_2}}{g_1 - g_2}\right)\delta g_{12} -$$
$$- i\omega(E_{h_1h_2} - E_{h_2})\delta h_1 - i\omega(E_{h_2h_2} - E_{h_2})\delta h_2 - i\omega(E_{h_2h_3} - E_{h_2})\delta h_3 -$$
$$- i\omega E_{h_2S}\delta S = 0,$$
$$\frac{\partial \delta g_{12}}{\partial t} + u\frac{\partial \delta g_{12}}{\partial x} + g_2\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{du}{dx}\delta g_{12} + i\omega g_1\delta u + \frac{1}{\tau}\delta g_{12} = 0,$$

где $\psi_i = \frac{1}{\tau}\left(h_i - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}\right)$; $\quad \varkappa = \frac{E_{h_i}\psi_i}{E_S}$; $\quad \delta h_i = -\frac{1}{2g_i}\delta g_i$.

Эту систему можно привести к каноническому виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D^1 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix} 0 & P^1 \\ P^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix},$$

где Z и Y — векторы размерностей 5 и 2 соответственно; матрицы D^1 (5×5) и D^2 (2×2) диагональные; матрицы D^1, D^2, A^1 (5×5), A^2 (2×2), P^1 (5×2), $P^2(2\times5)$ зависят от x (точнее, от решения (2)). Компоненты векторов Z и Y выражаются через δu, δv, δh_i, δg_{12}, δS:

$$Z_1 = \delta u + \frac{1}{\rho c}\delta\sigma_1, \quad Z_2 = \delta u - \frac{1}{\rho c}\delta\sigma_1, \quad Z_3 = \delta h_2, \quad Z_4 = \delta h_3, \quad Z_5 = \delta S,$$

(4)

$$Y_1 = i\left(\delta v + \frac{1}{g_2}b\delta g_{12}\right), \quad Y_2 = i\left(\delta v - \frac{1}{g_2}b\delta g_{12}\right),$$

где $c = \sqrt{E_{h_1h_1} - E_{h_1}}$ — скорость распространения продольных волн; $b = \sqrt{g_2\frac{E_{h_1} - E_{h_2}}{g_2 - g_1}}$ — скорость распространения поперечных волн. Ненулевые элементы матриц D^1 и D^2: $D^1_{11} = u - c$, $D^1_{22} = u + c$, $D^1_{33} = D^1_{44} = D^1_{55} = u$, $D^2_{11} = u - b$, $D^2_{22} = u + b$. Все матрицы D^i, A^i, P^i вещественны.

Будем искать решение в виде $Z_i = Z_i(x)e^{\lambda t}$, $Y_i = Y_i(x)e^{\lambda t}$, получим задачу на собственные значения

(5)
$$\lambda\begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D^1 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix} 0 & P^1 \\ P^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix}$$

с граничными условиями: при $x \to -\infty$ Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Y_1, $Y_2 \to 0$, при $x \to +\infty$ $Z_1 \to 0$.

Рассмотрим решения системы (4) при малых ω, т. е. такие волны возмущения по y, длина которых велика по сравнению с толщиной фронта пластической волны, и будем искать решение в виде асимптотического ряда по степеням ω в окрестности $\omega = 0$.

Оказывается, что при $\omega = 0$ система (5) имеет $\lambda = 0$ собственным значением. Собственная функция, отвечающая $\lambda = 0$, может быть получена из уравнений (2), описывающих структуру пластической волны. Если для системы (2) написать уравнения для возмущений, то получим систему

$$\delta\rho = -\rho(\delta h_1 + 2\delta h_2) = 2\rho \frac{E_{h_1h_1} - E_{h_1h_2} - (E_{h_1} - E_{h_2})\frac{E_{h_1S}}{E_S}}{u^2 - c^2}\delta h_2,$$

$$\delta u = -\frac{u}{\rho}\delta\rho, \quad \delta S = 2\frac{E_{h_1} - E_{h_2}}{E_S}\delta h_2, \tag{6}$$

$$u\frac{d\delta h_2}{dx} = \frac{2}{3\tau}\left\{\left(h_1 - h_2 - 1 + \frac{h_1 - h_2}{\tau}\tau_{h_1}\right)\frac{E_{h_1h_1} - E_{h_1h_2} - (E_{h_1} - E_{h_2})\cdot\frac{E_{h_1S}}{E_S}}{u^2 - c^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{2} + (h_1 - h_2)\frac{\tau_{h_1} - \tau_{h_2}}{\tau} - (h_1 - h_2)(E_{h_1} - E_{h_2})\frac{\tau_S}{E_S\tau}\right\}\delta h_2.$$

Собственная функция для $\lambda = 0$ является нетривиальным решением этой системы и представляет собой разницу (в линейном приближении) между данной волной и той же волной, сдвинутой параллельно вдоль оси x (сдвинутая волна удовлетворяет (2) в силу произвола при выборе начала координат $x = 0$ при отыскании решения (2)). Для решения (6) $\delta\rho$, δh_2, δS, $\delta u \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Таким образом, при $\omega = 0$ система (5) имеет $\lambda = 0$ собственным значением и собственную функцию $Y^0 = 0$, Z^0 (Z^0 получается решением (6)), причем $Z_i^0 \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Будем искать решение (5) в виде $Z = Z^0 + \omega Z^1 + \omega^2 Z^2 + \ldots$, $Y = Y^0 + \omega Y^1 + \omega^2 Y^2 + \ldots$, $\lambda = \lambda^0 + \omega\lambda^1 + \omega^2\lambda^2 + \ldots$

Известно, что $\lambda^0 = 0$, и известны $Y^0 = 0$ и Z^0 (получается решением (6)). Будем считать $\lambda^1 = 0$, $\lambda^2 = 0$. Полагая в (5) $\lambda = 0$ и подставляя туда разложения Z и Y, получаем разделяющиеся уравнения для Z^i и Y^i

$$D^1\frac{dZ^1}{dx} + A^1Z^1 = P^1Y^0 = 0; \quad D^2\frac{dY^1}{dx} + A^2Y^1 = P^2Z^0. \tag{7}$$

Уравнение для Z^1 совпадает с уравнением для Z^0 и, поскольку $Z^1 = Z^0$ не содержит новой информации о поведении возмущений, можно считать $Z^1 = 0$; Y^1 находим из (7) как интеграл уравнения с известной правой частью P^2Z^0. Для Z^2, Y^2 имеем

$$D^1\frac{dZ^2}{dx} + A^1Z^2 = P^1Y^1; \quad D^2\frac{dY^2}{dx} + A^2Y^2 = P^2Z^1 = 0. \tag{8}$$

Отсюда видно, что $Y^2 = 0$, а Z^2 находится из (8) как интеграл уравнения с известной правой частью P^1Y^1. Точно так же можно найти следующие члены разложения Z и Y.

Таким образом, имеем $Z = Z^0 + \omega^2Z^2 + O(\omega^4)$, $Y = \omega Y^1 + O(\omega^3)$. Следовательно, возмущение фронта волны вида $e^{i\omega y}$ приводит к образованию сдвиговых волн возмущений порядка ω и к появлению продольных волн возмущений, которые за волной приводят к перераспределению главных напряжений на величины порядка ω^2.

Перейдем теперь к исследованию произвольно возмущенного фронта волны, причем будем искать стационарные возмущения. Отбросим в системе (3) производные по t. Известно, что полученная таким образом система имеет решением сдвиг волны по оси x (6). Предположим, что этот сдвиг в каждой точке обусловлен изменением поверхности фронта волны, которое задано функцией $\xi(y, z)$. Будем предполагать, что

$$\xi \gg \xi_y \gg \xi_{yy} \gg \ldots, \quad \xi \gg \xi_z \gg \xi_{zz} \gg \ldots \tag{9}$$

Итак, будем искать решение стационарной системы для возмущений следующего вида:

$$\begin{gathered}
\delta u_i = \delta u_i^0(x)\, \xi(y, z) + \delta u_i^1(x, y, z) + \delta u_i^2(x, u, z) + \ldots, \\
\delta g_{ij} = \delta g_{ij}^0(x)\, \xi(y, z) + \delta g_{ij}^1(x, y, z) + \delta g_{ij}^2(x, y, z) + \ldots, \\
\delta S = \delta S^0(x)\, \xi(y, z) + \delta S^1(x, y, z) + \delta S^2(x, y, z) + \ldots
\end{gathered} \tag{10}$$

Считаем, что в этих разложениях каждый последующий член много меньше предыдущего и что $\partial \delta u^i/\partial x \sim \partial \delta u^{i-1}/\partial y$. Выпишем еще раз стационарную систему, полученную из (3), более подробно

$$\begin{gathered}
\rho u \frac{\partial \delta u}{\partial x} - \frac{\partial \delta \sigma_{11}}{\partial x} = \frac{\partial \delta \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \sigma_{13}}{\partial z}, \\
\rho u \frac{\partial \delta v}{\partial x} - \frac{\partial \delta \sigma_{21}}{\partial x} = \frac{\partial \delta \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \sigma_{23}}{\partial z}, \\
\rho u \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial \delta \sigma_{31}}{\partial x} = \frac{\partial \delta \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \sigma_{33}}{\partial z}, \\
u \frac{\partial \delta h_1}{\partial x} - \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{d h_1}{dx} \delta u + \delta \psi_1(h_1, h_2, h_3, S) = 0, \\
u \frac{\partial \delta h_2}{\partial x} + \frac{d h_2}{dx} \delta u + \delta \psi_2(h_1, h_2, h_3, S) = \frac{\partial \delta v}{\partial y}, \\
u \frac{\partial \delta h_3}{\partial x} + \frac{d h_3}{dx} \delta u + \delta \psi_3(h_1, h_2, h_3, S) = \frac{\partial \delta w}{\partial z}, \\
u \frac{\partial \delta g_{12}}{\partial x} + g_2 \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{du}{dx} \delta g_{12} + \frac{\delta g_{12}}{\tau} = -g_1 \frac{\partial \delta u}{\partial y}, \\
u \frac{\partial \delta g_{13}}{\partial x} + g_3 \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{du}{dx} \delta g_{13} + \frac{\delta g_{13}}{\tau} = -g_1 \frac{\partial \delta u}{\partial z}, \\
u \frac{\partial \delta g_{23}}{\partial x} + \frac{\delta g_{23}}{\tau} = -g_2 \frac{\partial \delta v}{\partial z} - g_3 \frac{\partial \delta w}{\partial y}, \\
u \frac{\partial \delta S}{\partial x} + \frac{dS}{dx} \delta u - \delta \varkappa(h_1, h_2, h_3, S) = 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Подставим в (11) разложение (10). Уравнения для δu_i^0, δh_i^0, δg_{ij}^0, δS^0 получим отбрасыванием всех остальных членов разложения и (с учетом (9)) производных по y и z от δu_i^0, δh_i^0, δg_{ij}^0, δS^0.

Решения уравнений для δu_i^0, δh_i^0, δg_{ij}^0, δS^0 являются решениями системы (6). Их можно найти в виде $\delta u^0(x) = \frac{du}{dx}$, $\delta h_i^0(x) = \frac{dh_i}{dx}$, $\delta S^0(x) = \frac{dS}{dx}$, $\delta g_{ij}^0 = 0$, $\delta v^0 = \delta w^0 = 0$, где u, h_i, S — решение системы (2).

Для δu^1, δh_i^1, δS^1 имеем ту же самую систему, что и для нулевых приближений, так как $\delta g_{ij}^0 = 0$ и $\delta \sigma_{ij}^0 = 0\ (i \neq j)$, и считаем $\delta u^1 = 0$, $\delta h_i^1 = 0$, $\delta S^1 = 0$.

Для $\delta v^1, \delta g_{12}^1$ имеем

$$\rho u \frac{\partial \delta v^1}{\partial x} - \frac{\partial \delta \sigma_{21}^1}{\partial x} = \delta \sigma_{22}^0 \xi_y (y, z),$$

$$u \frac{\partial \delta g_{12}^1}{\partial x} + g_2 \frac{\partial \delta v^1}{\partial x} + \frac{du}{dx} \delta g_{12}^1 + \frac{1}{\tau} \delta g_{12}^1 = - g_1 \delta u^0 \xi_y (y, z).$$

Предполагая, что $\delta v^1 = \delta v^1(x) \xi_y(y, z)$, $\delta g_{12}^1 = \delta g_{12}^1(x)\, \xi_y (y, z)$, для $\delta v^1(x)$ $\delta g_{12}^1(x)$ получаем систему обыкновенных уравнений, сводящую к системе (7), которая рассматривалась при исследовании гармонических возмущений. Далее, полагая $\delta w^1 = \delta w^1(x) \xi_z(y, z)$, $\delta g_{13}^1 = \delta g_{13}^1(x)\, \xi_z (y, z)$, для $\delta w^1(x), \delta g_{13}^1(x)$ получаем точно такую же систему уравнений, так как $g_2 = g_3, \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial g_{12}} = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial g_{13}}$ и $\delta \sigma_{22}^0 = \delta \sigma_{33}^0$.

Следовательно, $\delta v^1(x) = \delta\, w^1(x)$, $\delta g_{12}^1(x) = \delta g_{13}^1(x)$.

И для δg_{23}^1 получаем

$$u \frac{\partial \delta g_{23}^1}{\partial x} + \frac{1}{\tau} \delta g_{23}^1 = - g_2 \delta v^0 \xi_z (y, z) - g_3 \delta w^0 \xi_y (y, z),$$

так как $\delta v^0 = 0$, $\delta w^0 = 0$, т. е. $\delta g_{23}^1 = 0$.

Рассмотрим теперь вторые члены разложения (10). Для $\delta u^2, \delta h_i^2$, δS^2 получаем

$$\rho u \frac{\partial \delta u^2}{\partial x} - \frac{\partial \delta \sigma_{11}^2}{\partial x} = \delta \sigma_{12}^1 (x)\, \xi_{yy} (y, z) + \delta \sigma_{13}^1 (x)\, \xi_{zz} (y, z),$$

$$u \frac{\partial \delta h_1^2}{\partial x} - \frac{\partial \delta u^2}{\partial x} + \frac{dh_1}{dx} \delta u^2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial h_i} \delta h_i^2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial S} \delta S^2 = 0,$$

$$u \frac{\partial \delta h_2^2}{\partial x} + \frac{dh_2}{dx} \delta u^2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial h_i} \delta h_i^2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial S} \delta S^2 = \delta v^1 (x)\, \xi_{yy} (y, z),$$

$$u \frac{\partial \delta h_3^2}{\partial x} + \frac{dh_3}{dx} \delta u^2 + \frac{\partial \psi_3}{\partial h_i} \delta h_i^2 + \frac{\partial \psi_3}{\partial S} \delta S^2 = \delta w^1 (x)\, \xi_{zz} (y, z),$$

$$u \frac{\partial \delta S^2}{\partial x} + \frac{dS}{dx} \delta u^2 - \frac{\partial \varkappa}{\partial h_i} \delta h_i^2 - \frac{\partial \varkappa}{\partial S} \delta S^2 = 0.$$

Будем искать решение этой системы в виде $\delta u^2 = \delta u^{21}(x) \xi_{yy} + \delta u^{22}(x) \xi_{zz}$ (так же представляем остальные искомые функции). Для членов, пропорциональных ξ_{yy}, получаем систему, сводящуюся к (8), а для членов, пропорциональных ξ_{zz}, получаем такую же систему, если поменять местами δh_2 и δh_3. Таким образом, получим решения

$$\delta u^2 = \delta u^2 (x) (\xi_{yy} + \xi_{zz}), \quad \delta h_1^2 = \delta h_1^2 (x) (\xi_{yy} + \xi_{zz}),$$

$$\delta S^2 = \delta S^2 (x) (\xi_{yy} + \xi_{zz}),$$

$$\delta h_2^2 = \delta h_2^2 (x)\, \xi_{yy} + \delta h_3^2 (x)\, \xi_{zz}, \quad \delta h_3^2 = \delta h_3^2 (x)\, \xi_{yy} + \delta h_2^2 (x)\, \xi_{zz},$$

где $\delta u^2(x)$, $\delta h_1^2(x)$, $\delta S^2(x)$, $\delta h_2^2(x)$, $\delta h_3^2(x)$ могут быть найдены из решений системы (8), которая выписана при исследовании гармонических возмущений.

Для δv^2, δg_{12}^2, δw^2, δg_{13}^2 получаются те же уравнения, что и для первых членов разложения, поэтому можно считать $\delta v^2 = \delta w^2 = \delta g_{12}^2 = \delta g_{13}^2 = 0$. А для δg_{23}^2 получается уравнение

$$u \frac{\partial \delta g_{23}^2}{\partial x} + \frac{1}{\tau} \delta g_{23}^2 = - g_2 \delta v^1 (x) \xi_{yz} - g_3 \delta w^1 (x) \xi_{yz} = - 2 g_2 \delta v^1 (x) \xi_{yz}.$$

Таким образом, установлено, что стационарная система для возмущений (11) имеет решение следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\delta u = \delta u^0 (x) \xi (y, z) + \delta u^2 (x) (\xi_{yy} + \xi_{zz}) + \ldots, \\
&\delta h_1 = \delta h_1^0 (x) \xi (y, z) + \delta h_1^2 (x) (\xi_{yy} + \xi_{zz}) + \ldots, \\
&\delta S = \delta S^0 (x) \xi (y, z) + \delta S^2 (x) (\xi_{yy} + \xi_{zz}) + \ldots, \\
&\delta h_2 = \delta h_2^0 (x) \xi (y, z) + \delta h_2^2 (x) \xi_{yy} + \delta h_3^2 (x) \xi_{zz} + \ldots, \\
&\delta h_3 = \delta h_2^0 (x) \xi (y, z) + \delta h_3^2 (x) \xi_{yy} + \delta h_2^2 (x) \xi_{zz} + \ldots, \\
&\delta v = \delta v^1 (x) \xi_y + \ldots, \quad \delta g_{12} = \delta g_{12}^1 (x) \xi_y + \ldots, \\
&\delta w = \delta v^1 (x) \xi_z + \ldots, \quad \delta g_{13} = \delta g_{12}^1 (x) \xi_z + \ldots, \\
&\delta g_{23} = \delta g_{23}^2 (x) \xi_{yz} + \ldots
\end{aligned}$$

Из этих формул видно, что сдвиг фронта волны, обусловленный возмущением ее поверхности $\xi(y, z)$, приводит к появлению сдвиговых волн возмущений, пропорциональных $\xi_y(y, z)$ и $\xi_z(y, z)$, а они приводят к появлению за возмущенным участком поверхности фронта главных деформаций вида $\delta h_1^2 (x) (\xi_{yy} + \xi_{zz})$, $\delta h_2^2 (x) \xi_{yy} + \delta h_3^2 (x) \xi_{zz}$, $\delta h_3^2 (x) \xi_{yy} + \delta h_2^2 (x) \xi_{zz}$. Эти деформации, по-видимому, оставляют в металле после прохождения волны след, наблюдение которого в экспериментах описано в [5].

В заключение приведем некоторые значения δh_i^2, полученные численными расчетами. Для меди (уравнение состояния из [3], время релаксации из [2]) непосредственно за волной при $\tau = 10^{-4}$ с имеем

сжатие за волной $\rho_1/\rho_0 = 1{,}11$

$$\delta h_1^2 = 0{,}2889, \quad \delta h_2^2 = 0{,}1853, \quad \delta h_3^2 = 0{,}1854;$$

сжатие за волной $\rho_1/\rho_0 = 1{,}09$

$$\delta h_1^2 = 0{,}2953, \quad \delta h_2^2 = 0{,}2095, \quad \delta h_3^2 = 0{,}2096;$$

сжатие за волной $\rho_1/\rho_0 = 1{,}05$

$$\delta h_1^2 = 0{,}3184, \quad \delta h_2^2 = 0{,}2216, \quad \delta h_3^2 = 0{,}2217.$$

Автор выражает благодарность С. К. Годунову за постоянное внимание к работе и плодотворные обсуждения.

Поступила 15 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С. К., Роменский Е. И.** Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах.— ПМТФ, 1972, № 5.
2. **Годунов С. К., Денисенко В. В., Козин Н. С., Кузьмина Н. К.** Применение релаксационной модели вязкоупругости при расчете одноосных однородных деформаций

и уточнении интерполяционных формул максвелловской вязкости.— ПМТФ, 1975, № 5.
3. **Годунов С. К., Козин Н. С., Роменский Е. И.** Уравнение состояния упругой энергии металлов при нешаровом тензоре деформаций.— ПМТФ, 1974, № 2.
4. **Годунов С. К., Козин Н. С.** Структура ударных волн с нелинейной зависимостью максвелловской вязкости от параметров вещества.— ПМТФ, 1974, № 5.
5. **Дерибас А. А., Захаров В. С., Соболенко Т. М., Тесленко Т. С.** О переносе поверхностного рельефа в металлах ударными волнами.— ФГВ, 1974, № 6.

УДК 539.373

УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ТОЧЕЧНЫМИ МАКСВЕЛЛОВСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

С. К. Годунов, Н. Н. Сергеев-Альбов

(*Новосибирск*)

1. Общее решение. Соотношения на характеристике. Изучаемая система имеет вид

(1.1)
$$\rho_0 U\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}-\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y}=0,$$
$$\rho_0 U\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}-\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y}=0,$$
$$U\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}-\rho_0c_0^2\frac{\partial u}{\partial x}-\rho_0\left(c_0^2-2b_0^2\right)\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$
$$U\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x}-\rho_0\left(c_0^2-2b_0^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}-\rho_0c_0^2\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$
$$U\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x}-\rho_0\left(c_0^2-2b_0^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0,$$
$$U\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}-\rho_0b_0^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0,$$

где σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, σ_{12} — компоненты тензора напряжений; $u+U$ — горизонтальная компонента вектора скорости перемещения точек среды ($U<b_0<c_0$, $u\ll U$); v — вертикальная компонента вектора скорости перемещения точек среды; ρ_0 — плотность среды; c_0 — продольная скорость звука; b_0 — поперечная скорость звука.

Систему (1.1) можно преобразовать таким образом, что для четырех функций $\sigma_{11}(x, y)$, $\sigma_{22}(x, y)$, $\sigma_{33}(x, y)$, $\sigma_{12}(x, y)$ получается система

(1.2)
$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y}=\rho_0U\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x},$$
$$\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y}=\frac{\rho_0\left(c_0^2U^2-4b_0^2c_0^2+4b_0^4\right)}{c_0^2U}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{c_0^2-2b_0^2}{c_0^2}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{U}{\rho_0b_0^2}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{U}{\rho_0c_0^2}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x}-\frac{c_0^2-2b_0^2}{c_0^2}\frac{\partial u}{\partial x},$$