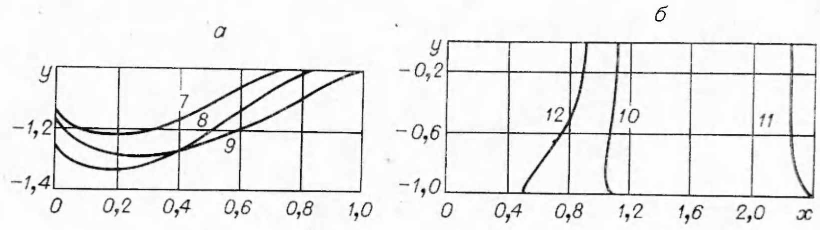


Фиг. 6

одинаково расположенным зарядам различной мощности, а примеры *7* и *8*, *10* и *12* — различному заглублению зарядов одинаковой мощности.

Из приведенных результатов можно сделать выводы.

1. Для случая $v_1 < v_2$ явно прослеживается участок на линии раздела сред; при $v_1 > v_2$ этот участок выражен менее явно.

2. С уменьшением прочности грунта при одинаковом расположении заряда, что в размерных переменных (с учетом (1)) соответствует увеличению мощности заряда при одном и том же грунте, размеры выемки выброса увеличиваются как по ширине, так и по глубине. Следует отметить, что увеличение ширины выемки происходит при этом за счет нижнего слоя.

3. Для одинаковых значений критических скоростей размеры выемки выброса с увеличением заглубления заряда увеличиваются. Причем увеличение полуширины происходит при этом лишь до некоторого предела. Для случая однородного грунта, характеризующегося критической скоростью v_0, как следует из результатов работы [3], этот предел при $h \to \infty$ равен $2q/v_0$ (величины h, q, v_0 размерные).

Поступила 21 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Поляк Э. Б., Шер Е. Н.** О форме воронки выброса при взрыве шнурового заряда в двухслойной среде.— ПМТФ, 1973, № 2, с. 143—146.
2. **Кузнецов В. М.** О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта.— ПМТФ, 1960, № 3, с. 152—156.
3. **Кузнецов В. М., Поляк Э. Б.** Импульсно-гидродинамические схемы взрыва на выброс шнуровых зарядов.— ФТПРПИ, 1973, № 4, с. 32—39.
4. **Фильчаков П. Ф.** Определение констант интеграла Кристоффеля — Шварца при помощи моделирования на электропроводной бумаге.— УМЖ, 1961, т. 13, № 1, с. 72—79.

УДК 539.374 : 534.1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ РАЗГРУЗКОЙ

Н. Мамадалиев, В. П. Молев

(*Москва*)

Рассматривается плоская стационарная задача о воздействии подвижной нагрузки на нелинейно-сжимаемую полуплоскость.

Случай линейного нагружения и разгрузки среды рассмотрен в работах [1, 2]. Причем полученное в работе [1] методом конформного отображения решение задачи имеет место в случае, когда скорость a_1 распространения разгрузочных деформаций превышает скорость движения нагрузки. Эта задача без ограничений на скорость a_1 методом интегрального преобразования Меллина для случая треугольной нагрузки решается в работе [2].

В данной работе численным методом характеристик и аналитически изучаются влияния нелинейных свойств материала полуплоскости на распространение в ней ударно-волновых процессов.

Предлагаемую расчетную схему можно использовать для определения параметров неоднородной среды при различных профилях заданной нагрузки.

Пусть по поверхности полуплоскости движется монотонно убывающая нормальная нагрузка с постоянной скоростью D, превышающей скорости распространения нагрузо-разгрузочных деформаций среды. Профиль нагрузки по мере распространения волны не меняется. Среда, заполняющая полуплоскость, обладает такими механическими свойствами, что при нагружении и разгрузке связь между давлением p и объемной деформацией ε нелинейна и необратима, причем $dp/d\varepsilon > 0$, $d^2p/d\varepsilon^2 > 0$ и угол наклона ветви разгрузки диаграммы $p \sim \varepsilon$ превышает угол наклона ветви нагружения.

В этом случае в полуплоскости будет распространяться ударная волна с криволинейной поверхностью Σ, область возмущения ограничивается фронтом Σ и границей полуплоскости. Предполагается, что среда на фронте Σ мгновенно нагружается, а за фронтом в возмущенной области происходит разгрузка. На поверхности сильного разрыва Σ из условий сохранения массы и импульса имеют место соотношения

$$\rho_0 a = \rho^* (a - \overset{*}{v}_n), \quad \rho_0 a \overset{*}{v}_n = p^*, \quad \overset{*}{v}_\tau = 0 \qquad (a = D \sin\alpha). \tag{1}$$

Уравнение состояния среды представим в виде полинома

$$p^* = \alpha_1 \varepsilon^* + \alpha_2 \varepsilon^{*2}.$$

В области разгрузки в подвижной системе координат $\xi = Dt + x$, $\eta = y$ имеем

$$D\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad D\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \tag{2}$$

$$D\frac{\partial p}{\partial \xi} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 0, \quad p = p^* + \beta_1(\varepsilon - \varepsilon^*) + \beta_2(\varepsilon - \varepsilon^*)^2,$$

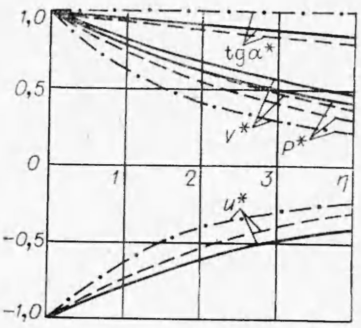
граничное условие имеет вид

$$\text{при } \eta = 0, \ \xi \geqslant 0 \quad p = f(\xi), \tag{3}$$

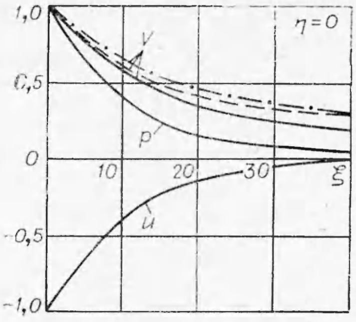
где $f(\xi)$ — известная монотонно убывающая функция.

Введем обозначения: D — скорость подвижной нагрузки; a — скорость распространения ударной волны; $a_1 = c_p = \beta_1/\rho$ — скорость распространения разгрузочной деформации для случая $\beta_2 = 0$; p — давление; ε — объемная деформация; Σ — фронт ударной волны; ρ — плотность среды; t — время; x, y — неподвижные декартовы координаты; ξ,η — подвижные декартовы координаты; V — массовая скорость среды; u, v — проекции скорости на оси ξ и η; φ — потенциал скорости; $\overset{*}{v}_n$, $\overset{*}{v}_\tau$ — нормальная и касательная составляющие массовой скорости V среды к фронту Σ; p_0 — максимальное значение подвижной нагрузки; μ — безразмерный коэффициент; b — размерный коэффициент; α_1, α_2, β_1, β_2 — постоянные величины; α — угол наклона фронта Σ ударной волны к границе полуплоскости; $\operatorname{tg}\alpha_0$ — тангенс угла наклона фронта Σ с осью 0ξ в начале координат; параметры среды, относящиеся к фронту Σ, обозначены сверху звездочкой.

Как было сказано выше, для решения задачи используется метод характеристик, а основные соотношения на характеристиках в случае нелинейно-сжимаемой среды приведены в работе [3].



Фиг. 1



Фиг. 2

Для конкретной структуры среды [4] задача реализована на ЭВМ для нагрузки, изменяющейся вдоль ξ по экспоненциальному закону вида

$$f(\xi) = p_0 \exp(-0{,}1\xi)$$

для

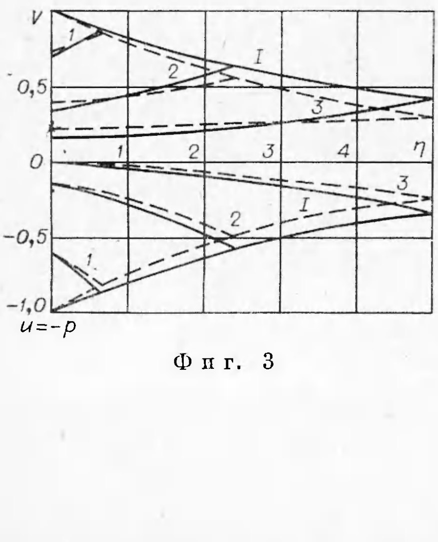
$$\alpha_1 = 12{,}127\cdot 10^2,\ \alpha_2 = 58{,}73\cdot 10^3,\ \beta_1 = 9{,}016\cdot 10^3,$$
$$\beta_2 = 19\cdot 10^4,\ p_0 = 105 \text{кг/см}^2,$$

и результаты расчетов представлены на фиг. 1—6, где сплошные линии относятся к случаю $\alpha_2 \neq \beta_2 \neq 0$, штриховые — $\beta_2 = 0$, штрихпунктирные — $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. Параметры среды на фиг. 1—3 приводятся в безразмерном виде по отношению к их максимальному значению, а координаты ξ, η — к единице длины.

Из фиг. 1 видно, что давление p^* и скорости u^*, v^* на фронте в зависимости от глубины η затухают существенно нелинейным образом. Оказывается, что за счет нелинейности свойств среды каждая материальная точка полуплоскости находится в более напряженном состоянии, чем в случае $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. Разница параметров, рассчитанных по линейной ($\alpha_2 = \beta_2 = 0$) и нелинейной ($\alpha_2 \neq \beta_2 \neq 0$) теории, составляет в среднем 20—30%, что показывает па необходимость учета нелинейных процессов, происходящих в среде.

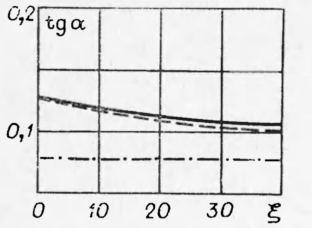
Анализируя зависимости, приведенные на фиг. 2, можно заметить, что на границе среды $\eta = 0$ вдоль ξ компоненты скорости u, v монотонно падают (давление задано).

Кривая зависимости вертикальной составляющей скорости v от ξ при $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ лежит выше кривой, относящейся к случаю $\beta_2 = 0$, а кривая, рассчитанная для нелинейного случая, лежит ниже этой кривой. При $\xi > 30$, когда давление становится незначительным, кривые для v при $\beta_2 = 0$ и $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ совпадают. Кривые для u всюду на границе полуплоскости во всех случаях получаются одними и теми же с точностью толщины линии.

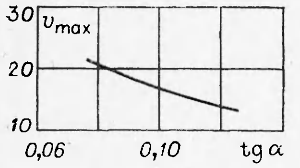


Фиг. 3

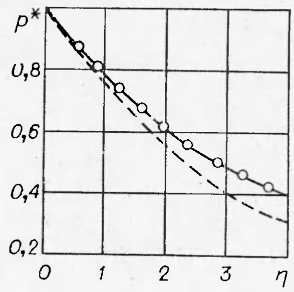
Кривые *1—3* па фиг. 3 показывают изменения параметров среды в сечениях $\xi = 0{,}5$; 1; 3 соответственно в зависимости от глубины распростра-



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

нения волны, которая асимптотически достигает своего максимального (на фронте) значения, представленного для вышерассмотренных двух случаев кривыми *1*.

Отсюда заметим, что в случае нелинейной разгрузки, по сравнению с линейной, величины p и u получаются несколько выше, а кривые для v имеют точки пересечения.

Изменение тангенса угла наклона фронта ударной волны к границе среды показано на фиг. 4, где отмечается, что нелинейные свойства материала среды приводят к искривлению фронта волны и скорость фронта затухает по глубине полуплоскости. Причем наибольший угол наклона при фиксированном ξ соответствует случаю нелинейного нагружения и разгрузки среды. Кривая, соответствующая случаю только нелинейного нагружения, лежит ниже кривой нелинейного нагружения и разгрузки, прямая линия относится к линейной теории.

Следовательно, нелинейная зависимость между параметрами среды p и ε приводит к расширению области возмущения.

Зависимость между максимальным значением вертикальной составляющей массовой скорости $v_{\max}$ и $\operatorname{tg}\alpha$ фронта приводится на фиг. 5, которая подтверждает, что если фронт волны стремится к границе среды, то $v_{\max}$ возрастает.

Приведенная на фиг. 6 штриховая линия с кружочками соответствует распределению давления p^* вдоль фронта Σ при $\beta_2 = 0$ для случая аппроксимации нагрузочной ветви диаграммы $p \sim \varepsilon$ хордой, проходящей через точки $p = 0$ и $p = p_0$. Эта кривая давления в зависимости от η расположена выше кривой давления при нелинейном нагружении.

Таким образом, при исследовании методом характеристик влияния нелинейных зависимостей между параметрами среды на распространение в ней волн напряжения показано, что нелинейная зависимость между p и ε приводит к расширению области возмущения, увеличению давления и скорости по сравнению с линейной теорией. В этом случае параметры p, u, v, а также скорость распространения ударной волны в рассматриваемой среде становятся монотонно убывающими функциями глубины полупространства.

Исследование системы уравнений (2) показало, что при $\beta_2 = 0$ задачу можно решить аналитическим способом. Действительно, подставляя первое уравнение (2) в третье, для потенциала скорости φ получаем волновое уравнение

$$(4) \qquad \mu^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} = 0 \qquad \left(\mu^2 = \frac{D^2}{c_p^2} - 1, \ c_p = \frac{\beta_1}{\rho}\right),$$

которое при $D = c_p$ имеет решение вида

$$\varphi(\xi, \eta) = f_1(\xi - \mu\eta) + f_2(\xi + \mu\eta). \tag{5}$$

Здесь неизвестные функции f_1 и f_2 должны определяться из граничного условия (3) и условия на фронте волны (1). Ниже предлагается решить эту задачу обратным методом, т. е. задаться определенной формой поверхности фронта волны Σ и в процессе решения задачи определить соответствующий профиль нагрузки. В этом случае внутри криволинейного сектора $\xi 0 \Sigma$ для (4) получим задачу Коши, так как если задана поверхность Σ фронта (в данном случае скорость фронта считается функцией, убывающей с глубиной полуплоскости), то с учетом (1) все параметры, в том числе составляющие скорости среды u, v на ней, будут известными переменными величинами и при $\eta = \eta(\xi)$ имеют вид

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = -D\sin^2\alpha(\xi)\left[\frac{\rho_0 D^2}{\alpha_2}\sin^2\alpha(\xi) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right], \tag{6}$$

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = D\sin\alpha(\xi)\cos\alpha(\xi)\left[\frac{\rho_0 D^2}{\alpha_2}\sin^2\alpha(\xi) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right],$$

где $\eta(\xi)$ — уравнение поверхности фронта. Используя (6), из (5) находим

$$f_i(z_i) = \mp\frac{D}{2\mu}\int\limits_0^{z_i}\frac{\operatorname{tg}\alpha[F_i(z_i)]\{1 \pm \mu\operatorname{tg}\alpha[F_i(z_i)]\}\Phi_i(z_i)}{\{1 + \operatorname{tg}^2\alpha[F_i(z_i)]\}^2}dz_i, \tag{7}$$

где $\Phi_i(z_i) = (\rho_0 D^2/\alpha_2 - \alpha_1/\alpha_2)\operatorname{tg}^2\alpha[F_i(z_i)] - \alpha_1/\alpha_2$; $F_i(z_i)$ — корень уравнения $\xi \pm \mu\eta(\xi) = z_i$, причем в случае $i = 1$ принимается верхний знак в формуле (7). Таким образом, в области $\xi 0 \Sigma$ с учетом (7), (5) получено аналитическое решение задачи. Если подставить это решение в (3), то в принципе должен получиться монотонно убывающий профиль нагрузки с резким фронтом в начале координат и в возмущенной области должен осуществляться процесс разгрузки среды. Результаты расчетов показывают, что процесса разгрузки в секторе $\xi 0 \Sigma$ можно достичь, если скорость фронта Σ волны является затухающей функцией по глубине полуплоскости (что и требовалось доказать). Аналогичный обратный метод был применен в задаче о волне разгрузки [5].

В качестве иллюстрации метода рассмотрен случай, когда поверхность Σ фронта волны задана в виде полинома второй степени

$$\eta(\xi) = \operatorname{tg}\alpha_0\cdot\xi - (b/2)\xi^2. \tag{8}$$

Таблица 1

ξ	u^*		v^*		p^*	
	I	II	I	II	I	II
0	—1,644	—1,644	13,100	13,100	105	105
0,2	—1,635	—1,633	13,040	13,02	104,412	104,2
0,4	—1,622	—1,621	12,953	12,95	103,542	103,5
0,6	—1,610	—1,610	12,876	12,87	102,787	102,8
0,8	—1,598	—1,598	12,800	12,80	102,038	102,0
1,0	—1,587	—1,587	12,725	12,73	101,293	101,3

Примечание. I — численный метод характеристик, II — аналитический метод.

Таблица 2

ξ	u		v		p	
	I	II	I	II	I	II
0	—1,644	—1,644	13,100	13,100	105	105
0,2	—1,610	—1,613	12,944	12,94	102,921	102,979
0,4	—1,581	—1,581	12,780	12,78	100,882	100,937
0,6	—1,550	—1,551	12,621	12,62	98,888	99,021
0,8	—1,519	—1,520	12,466	12,47	96,928	97,042
1,0	—1,490	—1,490	12,314	12,32	95,009	95,127

Примечание. I — численный метод характеристик, II — аналитический метод.

Результаты расчетов аналитического способа с учетом (8) при $\operatorname{tg} \alpha_0 = 0{,}1255$, $b = 0{,}86 \cdot 10^{-3}$ и метода характеристик, изложенного выше, представлены в табл. 1, 2, откуда видно, что результаты, полученные при помощи обоих методов, согласуются взаимно удовлетворительно, и найденный обратным методом профиль нагрузки $f(\xi)$ является монотонно убывающим вдоль ξ.

Авторы выражают благодарность Х. А. Рахматулину за обсуждение результатов работы.

Поступила 3 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Скобеев А. М., Флитман Л. М.** Подвижная нагрузка на неупругой полуплоскости.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
2. **Капустянский С. М.** Распространение и отражение двумерных пластических волн.— «Изв. АН СССР. МТТ», 1973, № 1.
3. **Рахматулин Х. А., Мамадалиев Н.** Распространение нелинейных волн в грунтовом полупространстве, вызванных бегущей по его границе нагрузкой.— В кн.: Труды симпозиума. Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах. Горький — Таллин, 1973.
4. **Исследование** механических свойств грунтов в условиях трехосного сжатия при повышенном уровне напряжений. Отчет МИСИ им. В. В. Куйбышева № 320, 1972.
5. **Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А.** Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., Физматгиз, 1961.

УДК 539.374

СМЕШАННАЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ СЫПУЧЕЙ АДДИТИВНО-СЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

И. С. Дегтярев

(*Пермь*)

Среди большого количества работ, посвященных вопросам движения сыпучих сред, работы [1, 2] занимают особое положение. В [1] на основе концепции пластического потенциала сформулированы определяющие соотношения между напряжениями и скоростями деформаций, которые были использованы в [2] для постановки смешанных граничных задач и решения вопросов о вдавливании штампа и смазанного клина в грунтовую дилатирующую массу.