



**АНАЛИЗ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ЦЕЛИКАХ ГОРНОЙ ПОРОДЫ
В РАМКАХ НЕЛОКАЛЬНОЙ УПРУГОЙ МОДЕЛИ СО СТРУКТУРНЫМ ПАРАМЕТРОМ**

В. И. Алтухов¹, С. В. Лавриков², А. Ф. Ревуженко²

¹*Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
E-mail: v.altukhov@g.nsu.ru, ул. Пирогова 2, г. Новосибирск 630090, Россия;*

²*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: lvk64@mail.ru, revuzhenko@yandex.ru,
Красный проспект 54, г. Новосибирск 630091, Россия*

Использована модель линейной теории упругости со структурным параметром. Система определяющих соотношений в плоском случае содержит пять независимых уравнений, в то время как в классической теории упругости уравнений только три. Два оставшихся уравнения в классических теориях неявно содержатся в постулате о диффеоморфизме — предположении о гладкости поля смещений. Отказ от выполнения постулата о диффеоморфизме приводит к тому, что в модели появляется структурный параметр — макродеформации, которые зависят от напряжений и вторых производных напряжений по координатам. Сформулирована и численно решена задача о деформировании целика с учетом влияния окружающего массива.

Породный массив, целик, концентрация напряжений, структура, нелокальная модель, локальный изгиб, численный расчет

**STRESS CONCENTRATION ANALYSIS IN ROCK PILLARS IN THE FRAMEWORK
OF NON-LOCAL ELASTIC MODEL WITH STRUCTURAL PARAMETER***

V. I. Altukhov¹, S. V. Lavrikov², and A. F. Revuzhenko²

¹*Novosibirsk National Research State University,
E-mail: v.altukhov@g.nsu.ru, Pirogova 2, Novosibirsk 630090, Russia;*

²*Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
E-mail: lvk64@mail.ru, revuzhenko@yandex.ru, Krasny pr. 54, Novosibirsk 630091, Russia*

The model of linear elastic theory with structural parameter has been used in present paper. In plane formulation, the constitutive relationship system consists of five independent equations, whereas there are only three equations in classical elasticity theory. Two remaining equations are implicitly contained in the postulate of diffeomorphism—an assumption about smoothness of displacement field. Refusing the postulate of diffeomorphism introduces a structural parameter in the model—macrodeformations which depend on stresses and second derivatives of stresses with respect to coordinates. The boundary value problem of pillar deformation taking into account the influence of surrounding rock mass has been formulated and numerically solved.

Rock mass, pillar, stress concentration, structure, non-local model, local bend, numerical calculation

Одной из распространенных технологий добычи полезных ископаемых подземным способом является камерная технология с использованием ленточных барьерных и междукамерных целиков. Такие технологии применяются на угольных месторождениях, на соляных рудниках и др. Оптимизация размеров целиков должна обеспечивать как снижение потерь полезного ископаемого, так и безопасность ведения очистных работ. Кроме того, потеря устойчивости жестких барьерных и сравнительно более податливых междукамерных целиков может спровоцировать неконтролируемое оседание земной поверхности.

Известно, что породный массив представляет собой структурно-неоднородную среду. Наличие внутренней структуры является одним из фундаментальных свойств горных пород и предопределяет такие его свойства, как дилатансию, внутреннее трение, сцепление, нелинейность поведения и анизотропию. Кроме того, элементы внутренней структуры (блоки, трещины, разломы) могут выступать в роли концентраторов напряжений в массиве. С другой стороны, целики горной породы сами по себе являются концентраторами напряжений окружающего их массива. Поэтому для моделирования процессов деформирования целиков необходимо использовать такие математические модели, которые позволяют проводить анализ напряженного состояния среды в условиях повышенных градиентов напряжений.

Исследование напряженно-деформированного состояния целиков и породного массива в окрестности выработанного пространства, расчет оптимальных размеров целиков проводились многими авторами в различных постановках [1–14]. В настоящей работе используется математическая модель среды со структурным параметром [15, 16]. За счет введения структурного параметра модель позволяет описать локальные изгибы элементарных объемов среды. В целом она относится к классу моделей нелокального типа [17–21].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Форма ленточного целика позволяет провести анализ процессов его деформирования в двумерной постановке в рамках гипотезы плоской деформации. Используем подход, представленный в работе [15]. Пусть дан дискретный набор из n упругих частиц, расположенных в узлах квадратной решетки (рис. 1). Поровое пространство между частицами не заполнено. В общем случае на контактах между частицами можно вводить проскальзывания, развивающиеся по законам пластичности, сухого или вязкого трения [16]. Будем рассматривать упругую версию модели и считать, что проскальзывания на контактах отсутствуют. Предположим также, что сосредоточенные моменты через контакты не передаются. Тогда для каждой частицы (с номером i) будет определено четыре вектора усилий \mathbf{t} и четыре вектора смещений \mathbf{u} в точках контакта частицы со своими соседями A_i, B_i, C_i, D_i (рис. 1). Одному вектору соответствуют две скалярные компоненты.

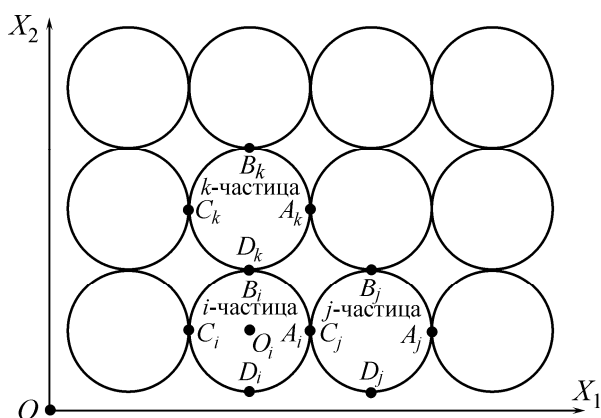


Рис. 1. Внутренняя структура среды: схема взаиморасположения контактов между частицами

Рассмотрим вопрос об уравнениях. Для каждой из n частиц выполняются три уравнения равновесия (два уравнения на вектор сил и одно на момент сил). На каждом из граничных контактов должно быть задано два условия (либо на усилия, либо на смещения, либо на их комбинацию). Основной вопрос — об определяющих уравнениях. Четверем точкам A_i, B_i, C_i, D_i отвечают четыре вектора смещений — восемь степеней свободы. В определяющие уравнения могут входить только такие их комбинации, которые не зависят от трансляции и вращения частицы как жесткого целого, значит три степени свободы надо исключить. Следовательно,

должно быть пять инвариантных комбинаций перемещений. Для усилий также имеем восемь степеней свободы. Условия равновесия исключают три степени свободы, значит, остается тоже пять. Таким образом, определяющие уравнения должны связывать пять инвариантных комбинаций перемещений с пятью силовыми характеристиками. С другой стороны, для классического упругого тела таких уравнений всего три. Это значит, что в классической теории есть предположения, которые равносильны двум уравнениям, причем таким же по значимости, как и уравнения, фигурирующие в законе Гука.

Выберем пять инвариантных комбинаций перемещений, которые могут фигурировать в определяющих уравнениях. Число вариантов такого выбора неограниченно. Остановимся на варианте, наиболее близком к линейной упругости:

$$\begin{cases} \frac{u_1(A_i) - u_1(C_i)}{2r} = \frac{1}{E} \left(\frac{t_{11}(A_i) + t_{11}(C_i)}{2} - \nu \frac{t_{22}(B_i) + t_{22}(D_i)}{2} \right), \\ \frac{u_2(B_i) - u_2(D_i)}{2r} = \frac{1}{E} \left(\frac{t_{22}(B_i) + t_{22}(D_i)}{2} - \nu \frac{t_{11}(A_i) + t_{11}(C_i)}{2} \right), \\ \frac{u_2(A_i) - u_2(C_i)}{2r} + \frac{u_1(B_i) - u_1(D_i)}{2r} = \frac{(1+\nu)}{E} \left(\frac{t_{12}(A_i) + t_{12}(C_i)}{2} + \frac{t_{21}(B_i) + t_{21}(D_i)}{2} \right), \end{cases} \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{u_1(A_i) + u_1(C_i)}{2} - \frac{u_1(B_i) + u_1(D_i)}{2} = \xi \left(\frac{t_{11}(A_i) - t_{11}(C_i)}{2r} - \frac{t_{21}(B_i) + t_{21}(D_i)}{2r} \right), \\ \frac{u_2(B_i) + u_2(D_i)}{2} - \frac{u_2(A_i) + u_2(C_i)}{2} = \xi \left(-\frac{t_{12}(A_i) + t_{12}(C_i)}{2r} + \frac{t_{22}(B_i) - t_{22}(D_i)}{2r} \right), \end{cases} \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где E , ν — упругие модуль Юнга и коэффициент Пуассона; r — линейный размер частицы (радиус); ξ — структурный параметр, его размерность r^2/E . Уравнения (1) — это дискретный аналог закона Гука. Уравнения (2) в классической теории явно не формулируются. Вместо них подразумевается выполнение постулата о диффеоморфизме [22], т. е. предполагается, что все функции являются достаточно гладкими. Это означает, что локально (в пределах элементарного объема) любую функцию можно представить как линейную, например, $u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$, $u_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2$, где a_{11}, \dots, a_{22} — const. Подстановка этого представления в (2) с необходимостью влечет $\xi = 0$. Верно и обратное. Следовательно, уравнения (2) “спрятаны” в постулате о диффеоморфизме. В случае $\xi \neq 0$ получаем линейную теорию упругости со структурным параметром, при этом соотношения (2) описывают локальные изгибы.

Система уравнений равновесия имеет вид

$$\begin{aligned} t_{11}(A_i) - t_{11}(C_i) + t_{21}(B_i) - t_{21}(D_i) + X_1(O_i) &= 0, \\ t_{12}(A_i) - t_{12}(C_i) + t_{22}(B_i) - t_{22}(D_i) + X_2(O_i) &= 0, \quad i = \overline{1, N}, \\ t_{12}(A_i) + t_{12}(C_i) - t_{21}(B_i) - t_{21}(D_i) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

здесь X_1, X_2 — массовые силы, действующие в центре частицы. Первые два уравнения представляют собой равенство нулю главного вектора сил, последнее — равенство нулю главного момента сил.

Условия межзеренного взаимодействия при отсутствии проскальзывания примут вид:

$$\begin{aligned} t_{11}(C_j) = t_{11}(A_i), \quad t_{12}(C_j) = t_{12}(A_i), \quad t_{22}(D_k) = t_{22}(B_i), \quad t_{21}(D_k) = t_{21}(B_i), \\ u_1(C_j) = u_1(A_i), \quad u_2(C_j) = u_2(A_i), \quad u_1(D_k) = u_1(B_i), \quad u_2(D_k) = u_2(B_i), \end{aligned} \quad (4)$$

здесь j — номер частицы, расположенной справа от i частицы, k — номер частицы, расположенной сверху над i частицей, в узлах квадратной решетки (рис. 1).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим постановку краевой задачи о деформировании целика с учетом влияния окружающего массива. Предположим, что в начальный момент времени массив находится в условиях гравитационного и тектонического сжатия. Начальные напряжения примем в виде линейной зависимости от веса вышележащих слоев массива

$$t_{22}^0 = -\gamma(H - x_2), \quad t_{11}^0 = \lambda t_{22}^0, \quad t_{12}^0 = 0, \quad (5)$$

здесь верхний индекс указывает на то, что напряжения относятся к начальному моменту времени; γ — удельный вес; λ — коэффициент бокового распора пород; H — расстояние от свободной поверхности (глубина ведения очистных работ).

Теперь в изначально нетронутом массиве мысленно проведем контуры выработанного пространства и очертим целик. Расчетная область целика и части окружающего его массива показаны на рис. 2. Здесь h, d — соответственно высота и ширина целика; a, b, c — линейные размеры окружающего массива.

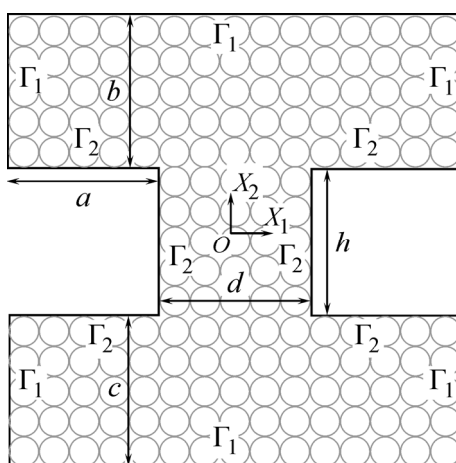


Рис. 2. Постановка задачи о деформировании целика с учетом окружающего породного массива

Начальное напряженное состояние (5) удовлетворяет уравнениям равновесия. После прохождения выработок и формирования целика его боковые поверхности, а также кровля и почва выработанного пространства разгружаются (нормальная и касательная компоненты напряжений σ_n, σ_t на указанных границах становятся равными нулю):

$$\sigma_n|_{\Gamma_2} = 0, \quad \sigma_t|_{\Gamma_2} = 0, \quad (6)$$

что приводит к перераспределению напряжений в целике и окружающем массиве.

Решение задачи будем искать в виде суммы начального напряженного состояния (5), учитывающего вес вышележащих пород, и дополнительного приращения напряжений, полученного как решение задачи (1)–(4) при отсутствии массовых сил с краевыми условиями вида

$$\begin{aligned} \Delta u_n|_{\Gamma_1} &= 0, & \Delta u_t|_{\Gamma_1} &= 0, \\ \Delta \sigma_n|_{\Gamma_2} &= -\sigma_n^0, & \Delta \sigma_t|_{\Gamma_2} &= -\sigma_t^0. \end{aligned} \quad (7)$$

Первое условие (7) означает, что граница Γ_1 находится сравнительно далеко от зоны влияния целика и не деформируется (нормальная и касательная компоненты вектора смещения $\Delta u_n, \Delta u_t$ не получают приращения). Второе условие на боковых поверхностях целика в кровле и почве выработки означает, что здесь заданы растягивающие нормальные и касательные напряжения,

равные по абсолютной величине тем, которые соответствуют начальным напряжениям (5). После решения задачи с краевыми условиями (7) и нахождения приращений Δt_{ij} во всех точках расчетной области окончательное решение задачи представляется в виде суммы

$$t_{ij} = t_{ij}^0 + \Delta t_{ij}. \quad (8)$$

Решение (8) обеспечивает выполнение краевых условий (6) на боковых поверхностях целика, в кровле и почве выработанного пространства.

Уравнения (1)–(4) представляют собой замкнутую систему алгебраических уравнений. Ее решение будем осуществлять численно методом Гаусса. Выберем следующие безразмерные параметры задачи (все величины размерности длины отнесем к величине h , а все величины размерности напряжений — к величине γH)

$$E = 2 \cdot 10^3, \quad \nu = 0.25, \quad h = d = 1, \quad a = b = c = 2, \quad r = 0.05, \quad \lambda = 0.4, \quad \gamma H = 1 \quad (9)$$

и выполним расчеты. Сначала положим $\xi = 0$, т. е. рассмотрим случай классической линейной теории упругости. Проведем расчеты и итоговые напряжения (в соответствие с (8)) представим в виде изолиний величин вертикальной компоненты тензора напряжений t_{22} и максимального касательного напряжения $\tau_{\max} = 0.5\sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2}$ (рис. 3). Здесь структура среды не проявляется, локальные изгибы отсутствуют. Наибольшая концентрация напряжений как вертикальной составляющей t_{22} (рис. 3а), так и максимального касательного напряжения τ_{\max} (рис. 3б) наблюдается в естественных концентраторах напряжений — угловых точках целика.

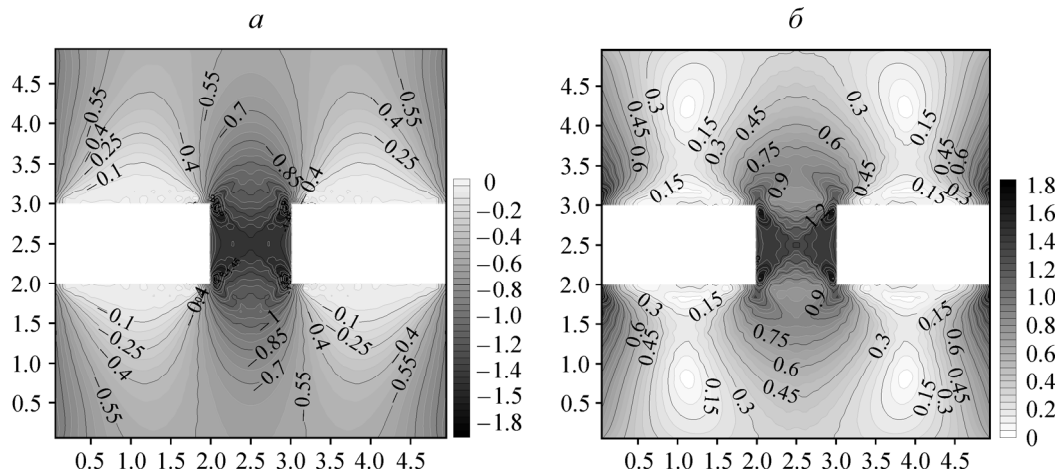


Рис. 3. Изолинии напряжений при $\xi = 0$: а — напряжение t_{22} ; б — напряжение τ_{\max}

Теперь будем последовательно увеличивать значение структурного параметра. Это приводит к заметному перераспределению напряжений в целике и ближней зоне окружающего массива. Напряжения t_{22} и τ_{\max} с ростом структурного параметра ξ концентрируется в последовательно увеличивающихся зонах целика и окружающего массива, распространяющихся преимущественно в вертикальном направлении. При этом максимальная концентрация напряжений снижается. На рис. 4 показаны изолинии напряжений при $\xi = 10^{-2}$, в таблице — последовательное снижение τ_{\max} по мере увеличения структурного параметра. Дальнейшее увеличение ξ уже не оказывает заметного влияния на максимальную концентрацию напряжений в исследуемой области.

Зависимость максимальной концентрации τ_{\max} от значения структурного параметра

ξ	0	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
τ_{\max}	1.84	1.81	1.76	1.59	1.35	1.04	0.95

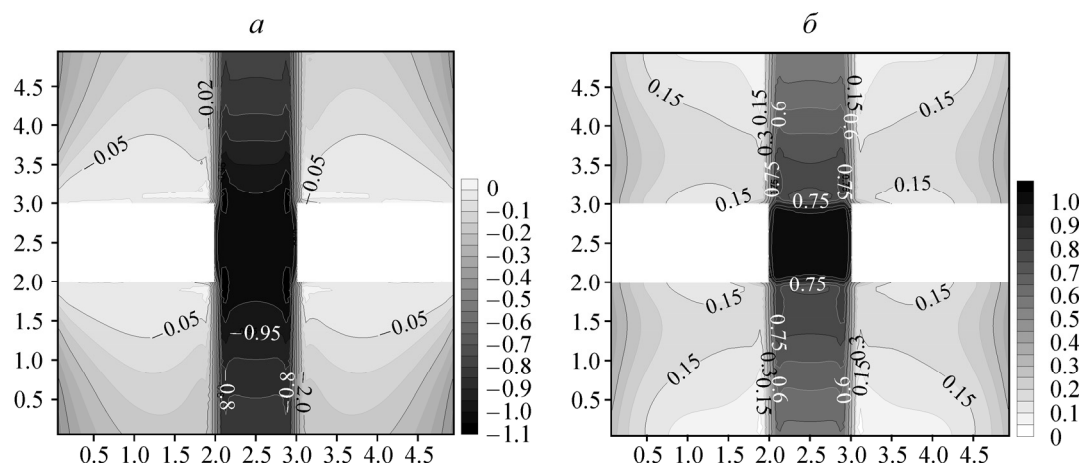


Рис. 4. Изолинии напряжений при $\xi = 10^{-2}$: а — напряжение t_{22} ; б — напряжение τ_{\max}

ВЫВОДЫ

Учет локальных изгибов существенно меняет распределение напряжений в породном массиве, окружающем целик, по сравнению с классическим упругим распределением. Увеличение роли локальной неоднородности среды (локальных изгибов) приводит к тому, что зона влияния повышенной концентрации напряжений расширяется, при этом величина максимальной концентрации напряжений в деформируемой среде снижается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Baryakh A. A., Asanov V. A., Toksarov V. A., and Gilev M. V.** Evaluating the residual life of salt pillars, *Journal of Mining Science*, 1998, vol. 34, issue 1, pp. 14–20. [**Барях А. А., Асанов В. А., Токсаров В. Н., Гилев М. В.** К оценке остаточного срока службы соляных междукамерных целиков // ФТПРПИ. — 1998. — № 1. — С. 37–30.]
2. **Ermekov T. M. and Iskakov S. S.** Complex investigation of intercamera pillar stress state, *Geomechanical interpretation of the nature experiment results*, Novosibirsk, Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, 1983. [**Ермеков Т. М., Исаков С. С.** Комплексное исследование напряженного состояния междукамерных целиков // Геомеханическая интерпретация результатов натурального эксперимента. — Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1983.]
3. **Kalashnik N. A., Bessonov I. I., and Kalashnik A. I.** Determination of clearing working spans and pillar sizes, *Published in Mining Institute of Kola SC, Apatity*, 2000, 85 pp. [**Калашник Н. А., Бессонов И. И., Калашник А. И.** Определение пролетов очистных выработок и размеров целиков. — Апатиты: Изд-во Горного института КНЦ, 2000. — 85 с.]
4. **Sporykhin A. N. and Shashkin A. I.** Determination of optimal sizes of rock pillars, *Mathematical modeling of informational and technological systems*. Voronezh, Voronezh State Technological Academy publish., 2000, issue 4, pp. 245–248. [**Спорыхин А. Н., Шашкин А. И.** Определение оптимальных размеров горных целиков // Математическое моделирование информационных и технологических систем. — Воронеж: Изд-во ВГТА — 2000. — Вып. 4. — С. 245–248.]
5. **Esterhuizen G. S., Dolinar D. R., and Ellenberger J. L.** Pillar strength in underground stone mines in the United States, *Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences*, vol. 48, 2011, p. 42–50.
6. **Zipf R. K.** Pillar design to prevent collapse of room-and-pillar mines. In: *Hustrulid W. A., Bullock R. C. ed. Underground mining methods: engineering fundamentals and international case studies*. Denver, Soc. Min. Metall Explor., 2001. — pp. 493–511.
7. **Andersson J. C. and Martin C. D.** The Aspö pillar stability experiment: Part I, Experiment design, *Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2009, vol. 46, no. 5, pp. 865–878.

8. **Zhang P. H., Yang T. H., Yu Q. L., Xu T., Zhu W. C., Liu H. L., Zhou J. R., and Zhao Y. C.** Microseismicity induced by fault activation during the fracture process of a crown pillar, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2015, vol. 48, no. 4, pp. 1673–1682.
9. **Alber M. and Heiland, J.** Investigation of a Limestone Pillar Failure Part 2: Stress History and Application of Fracture Mechanics, *Approach. Rock Mech. & Rock Eng.*, 34 (3), 2001, pp. 187–199.
10. **Lavrikov S. V. and Revuzhenko A. F.** Model of deformation of pillars with consideration of the effects of energy storage and weakening of the material, *Journal of Mining Science*, 1994, vol. 30, no. 6, pp. 533–542. [**Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** О модели деформирования целиков с учетом эффектов аккумуляции энергии и разупрочнения материала // *ФТПРПИ*. — 1994. — № 6. — С. 12–23.]
11. **Aksenov V. V., Lavrikov S. V., and Revuzhenko A. F.** Numerical modeling of deformation processes in rock pillars, *Applied Mechanics and Materials*, 2014, vol. 682, pp. 202–205.
12. **Lavrikov S. V.** A method of increase in bearing strength of rock mass around a mine working, *Journal of Mining Science*, 2003, vol. 39, no. 5, pp. 444–452. [**Лавриков С. В.** О возможном способе повышения несущей способности горного массива вокруг выработки // *ФТПРПИ*. — 2003. — № 5. — С. 30–38.]
13. **Klishin S. V. and Revuzhenko A. F.** 3D Discrete element approach to the problem on abutment pressure in a gently dipping coal seam, *IOP Conf. Series: Earth Environ. Sci.*, 2017, 84, 012003. [**Клишин С. В., Ревуженко А. Ф.** Пространственный дискретно-элементный анализ задачи об опорном давлении в пологом угольном пласте // *Научные технологии разработки и использования минеральных ресурсов*. — 2017. — № 3. — С. 41–47.]
14. **Lavrikov S. V. and Revuzhenko A. F.** Mathematical Modeling of Deformation of Self-stress Rock Mass Surrounding a Tunnel, in book: “*Desiderata Geotechnica*”, W. Wu (Ed.), Springer Nature Switzerland AG, 2019, pp. 79–85.
15. **Revuzhenko A. F.** Version of the linear elasticity theory with a structural parameter, *J. Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, issue 5, pp. 801–807 [**Ревуженко А. Ф.** Об одном варианте линейной теории упругости со структурным параметром // *ПМТФ*. — 2016. — № 5. — С. 45–52.]
16. **Revuzhenko A. F. and Mikenina O. A.** Elastoplastic model of rocks with a linear structural parameter, *J. Applied Mechanics and Technical Physics*, 2018, vol. 59, issue 2, pp. 332–340 [**Ревуженко А. Ф., Микенина О. А.** Упругопластическая модель горной породы с линейным структурным параметром // *ПМТФ*. — 2018. — № 2. — С. 167–176.]
17. **Cosserat E. and Cosserat F.** *Theorie des corps deformables*, Paris, A. Hermann et al., 1909, 226 pp.
18. **Truesdell C. A. and Toupin R. A.** The classical field theories, *Handbuch der Physik*, Ed. by S. Flugge, Band 3, Teil 1, Berlin: Springer-Verlag, 1960, pp. 226–793.
19. **Kunin I. A.** Theory of elastic media with microstructure: non-local elasticity theory, Moscow, Nauka, 1975, 416 pp. [**Кунин И. А.** Теория упругих сред с микроструктурой: Нелокальная теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 416 с.]
20. **Eringen A. K.** Theory of micropolar elasticity, *Failure*, Moscow, Mir, 1975, vol. 2, pp. 646–751. [**Эринген А. К.** Теория микрополярированной упругости // *Разрушение*. — М.: Мир. — 1975. — Т. 2. — С. 646–751].
21. **Smolin I. Yu.** Use of micropolar models for the description of plastic deformation in mesoleel, *Mathematical modeling of systems and processes*, 2006, issue 14, pp. 189–205. [**Смолин И. Ю.** Использование микрополярированных моделей для описания пластического деформирования на мезоуровне // *Математическое моделирование систем и процессов*. — 2006. — № 14. — С. 189–205.]
22. **Trusov P. V.** Some questions of non-linear mechanics of deformed solid (for discussion), *Mathematical modeling of systems and processes*, 2009, Issue 17, pp. 85–95. [**Трусов П. В.** Некоторые вопросы нелинейной механики деформируемого тела (в порядке обсуждения) // *Мат. моделирование систем и процессов*. — 2009. — № 17. — С. 85–95.]