УДК 532.526; 551.465

МОДЕЛЬ ЗАГЛУБЛЕНИЯ ВЕРХНЕГО ОДНОРОДНОГО СЛОЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В. Ю. Ляпидевский

(*Новосибирск*)

В работе изучается интегральная модель заглубления однородного слоя жидкости под действием касательного напряжения, приложенного к поверхности. Уравнения сохранения массы, импульса, энергии замыкаются законом вовлечения покоящейся жидкости в верхний однородный слой. Основная особенность рассматриваемой модели — учет неоднородности поля скорости, обусловленной наличием «свободных» вихрей в потоке.

Выделяются два режима заглубления: докритический, при котором вовлечение происходит за счет внешней турбулизации однородного слоя, и сверхкритический, в котором турбулентность с поверхности переносится крупными вихрями, порожденными неустойчивостью течения со сдвигом скорости. Показано, что для двухслойного начального распределения плотности, а также в случае непрерывного распределения плотности по степенному закону существуют особые решения системы уравнений, соответствующие сверхкритическому режиму заглубления и определяющие асимптотику на больших временах. Эти решения характеризуются постоянством глобального числа Ричардсона Ri_u, вычисленного по средним плавучести и скорости верхнего слоя. Таким образом, гипотеза $\mathrm{Ri}_u = \mathrm{const}$, используемая во многих моделях [1] для замыкания уравнения импульса, в рамках представленной модели справедлива асимптотически. Учет бокового трения при течении в канале конечной ширины разрушает асимптотику заглубления и переводит решение в докритический режим. Сравнение с результатами экспериментов в круговых лотках показывает, что предложенная модель удовлетворительно описывает сверхкритическое заглубление как в случае двухслойного [2], так и непрерывного начального распределения плотности [3].

Описание процесса перемешивания в течении устойчиво стратифицированной жидкости — сложная и актуальная задача. Перенос импульса и тепла с поверхности в глубь океана определяет формирование и эволюцию верхнего термоклина. Механизм переноса связан с развитием неустойчивости в течениях со сдвигом скорости и турбулентным обменом между слоями разной плотности. Адекватное математическое описание процессов, ответственных за формирование и структуру верхнего слоя океана, возможно только с привлечением моделей турбулентности [4]. Тем не менее для определенного класса течений могут быть использованы простые интегральные модели, отражающие эволюцию средних величин, полностью характеризующих данный класс течений.

В экспериментах и натурных наблюдениях отмечено, что под воздействием напряжения, приложенного к поверхности покоящейся стратифицированной жидкости, развивается хорошо перемешанный слой с почти постоянной скоростью и плотностью и отделенный от покоящейся невозмущенной жидкости достаточно тонким переходным слоем с большими градиентами. В идеализированной постановке можно считать, что однородный по горизонтали слой с плотностью $\rho(t)$, единственной отличной от нуля горизонтальной компонентой скорости $u(t)$, интенсивностью мелкомасштабных движений $q(t)$ имеет глубину $h(t)$ (рис. 1, область I). Ниже линии $y = -h(t)$ расположена покоящаяся стратифицированная жидкость ($u^0 = 0$, $q^0 = 0$, $\rho = \rho^0(y)$, $d\rho^0/dy < 0$, область II). К поверхности слоя ($y = 0$) приложено заданное напряжение $\tau = \tau^*(t)$. Поток массы через поверхность отсутствует. Рассматриваемое течение моделирует процесс заглубления однородного турбулизованного слоя под действием поверхностного напряжения (ветра).

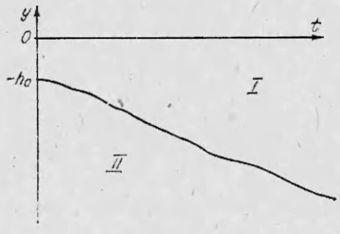

Рис. 1.

Интегральные модели с успехом применялись многими авторами для описания динамики верхнего слоя океана [5, 6]. Этот подход помимо простоты привлекателен еще и тем, что при выводе уравнений динамики однородного слоя можно обойтись без гипотез замыкания, являющихся основной частью моделей турбулентного перемешивания. Однако для замыкания уравнений массы, импульса и энергии необходимо задать закон вовлечения покоящейся жидкости в однородный слой.

В океанологии и метеорологии получил широкое распространение закон перемешивания

(1) $$dh/dt = Bu^*/\mathrm{Ri},$$

где $\mathrm{Ri} = (\rho^0(-h) - \rho)gh/\rho_0\tau^*$; $u^* = \sqrt{\tau^*}$ — скорость трения; g — ускорение силы тяжести; ρ_0 — начальная плотность жидкости на поверхности. Зависимость (1) основана на результатах лабораторных экспериментов в круговом лотке с линейной начальной стратификацией ($B \simeq 2{,}5$) [3], а также аналогичных экспериментов [2] для двухслойной стратификации. Последующий анализ экспериментов в круговом лотке показал [1], что хорошие результаты дает замыкание уравнений соотношением

(2) $$\mathrm{Ri}_u = (\rho^0(-h) - \rho)gh/\rho_0 u^2 = \mathrm{const}.$$

Здесь Ri_u — глобальное число Ричардсона, вычисленное по средней плавучести и скорости верхнего слоя. Зависимость (2) приводит к закону заглубления, отличному от (1),

(3) $$dh/dt = n\,\mathrm{Ri}_u^{1/2}\,\mathrm{Ri}^{-1/2}u^*$$

с $n = 1$ для двухслойной стратификации и $n = 1/2$ для линейной стратификации. В [1] принималось $\mathrm{Ri}_u \sim 0{,}6$. Однако в экспериментах [7], выполненных в круговом лотке, показано, что зависимость (2) во всем диапазоне полученных экспериментальных данных не выполняется и Ri_u может стать существенно больше единицы.

Предлагаемая ниже модель основана на законах сохранения массы, импульса и энергии потока и отражает то обстоятельство, что в сверхкритическом режиме течения неоднородность скорости q связана не только с турбулизацией потока за счет внешнего воздействия, но и за счет внутренней неустойчивости сдвигового течения. Закон заглубления слоя определяется интенсивностью мелкомасштабного движения и задается в виде

(4) $$dh/dt = Aq/\mathrm{Ri}.$$

Рассматриваемая модель объединяет постулаты модели [3] с выводами [1]. Дело в том, что при отсутствии бокового трения для целого класса начальных профилей $\rho^0(y)$ (включая двухслойную [2] и линейную стратификацию [3]) существуют особые решения системы уравнений сохранения массы, импульса, энергии и (4). Эти решения характеризуются свойством $\mathrm{Ri}_u = \mathrm{const}$ и являются асимптотическим пределом при $t \to \infty$ других решений рассматриваемой системы. При моделировании течений в канале конечной ширины учет трения на боковых границах приводит к перестройке асимптотического поведения решений.

Пусть при $t = 0$ однородный слой имеет плотность ρ^+, скорость u^+, глубину h_0. Для простоты можно считать, что плавучесть $b^0(y) = (\rho^- - \rho_0)g/\rho_0$ в нижнем слое распределена по степенному закону ($\nu \equiv \mathrm{const} > 0$)

(5) $$b^0(y) = b^- + \nu(-y)^\gamma,\quad y < -h_0.$$

Зависимость (5) охватывает два важных случая: двухслойную жидкость ($\nu = 0$, $b^- > b^+$) и линейную стратификацию ($\gamma = 1$, $h_0 = 0$).

Уравнения динамики однородного слоя в приближении Буссинеска ($|\rho - \rho_0| \ll \rho_0$) получаются из уравнений сохранения импульса, энергии, массы, записанных в дивергентном виде, интегрированием по переменной y от 0 до некоторого значения y_0, $y_0 < -h(t)$. При этом на границах $y = 0$, $y = y_0$ напряжения Рейнольдса и поток массы считаются заданными:

$$\tau^* = -\overline{u'v'}\,\big|_{y=0},\ \overline{\rho'v'}\,\big|_{y=0} = \overline{\rho'v'}\,\big|_{y=y_0} = \overline{u'v'}\,\big|_{y=y_0} = 0.$$

Здесь u', v', ρ' — пульсационные составляющие вектора скорости и плотности. Проинтегрированные уравнения движения имеют вид [5]

$$dhu/dt = \tau^*, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\left((1/2)\,u^2h + (1/2)\,q^2h + \int\limits_{y_0}^{0} bydy\right) = \tau^*u - \varepsilon h,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{y_0}^{0} bdy\right) = 0,$$

где $u(t)$ — средняя горизонтальная скорость;

$$q\,(t) = \left(\frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{0}(u^2\,(t,y) + v^2\,(t,y) + w^2\,(t,y))\,dy - u^2\right)^{1/2}$$

характеризует неоднородность поля скорости, связанную с мелкомасштабным движением. Члены, включающие корреляции давления и скорости, а также средние от тройных произведений пульсационных составляющих скорости при $y = 0$, считаются малыми и в уравнении энергии опущены. Величина ε описывает диссипацию энергии. Так как q отражает неоднородность потока, обусловленную пульсационным движением всех масштабов, то, пренебрегая тепловой диссипацией энергии, можно положить $\varepsilon = 0$.

Уравнения (6) замыкаются законом вовлечения (4), имеющим простую интерпретацию: скорость увеличения потенциальной энергии V за счет перемешивания жидкости пропорциональна энергии вихрей, возникающих под действием поверхностного напряжения

$$dV/dt = (1/2)(b^0(-h) - b)h(dh/dt) = (1/2)A\tau^*q. \tag{7}$$

Соотношение (7) отличается от соответствующего выражения для скорости изменения потенциальной энергии, использованного в [3] для вывода закона (1), тем, что скорость вертикального переноса вихрей определяется не только скоростью трения u^*, а и среднеквадратичной скоростью пульсаций q, порожденных внутренней сдвиговой неустойчивостью.

С учетом (5) систему (4), (6) перепишем в виде

$$dh/dt = \sigma q,\ hdh/dt = \tau^* - \sigma qu,\ hqdq/dt = (\sigma q/2)\ (u^2 - q^2 - c^2), \tag{8}$$

где $c^2 = (b^- - b^+)\,h_0 + (\nu/(\gamma+1))\,h_0^{\gamma+1} + (\gamma\nu/(\gamma+1))\,h^{\nu+1}$; $\sigma = A/\mathrm{Ri}$; $\mathrm{Ri} = \tau^*/c^2$. Плотность слоя ρ исключена из уравнений интегрированием закона сохранения массы. Величина q^2, характеризующая неоднородность поля скорости, складывается из энергии вихрей q_i^2, порожденных внутри потока, и кинетической энергии q_e^2 вихрей, зародившихся на верхней границе. Значение q_e пропорционально u^*, т. е. $q_e = au^*$, $a = a(h)$, причем $a \equiv a_0$, если не учитывать рассеяние энергии вихрей с возрастанием глубины перемешанного слоя. Поэтому уравнение энергии описывает генерацию энергии «свободных вихрей» q_i^2 в сдвиговом течении. Если же q_i обращается в 0 и производная dq/dt отрицательна, то приращение кинетической энергии за счет внутренней перестройки течения полностью компенсируется изменением потенциальной энергии и «свободных вихрей» в потоке нет. В этом случае уравнение энергии должно быть заменено соотношением $q \equiv q_e$. Так как величина $q_e \ll q_i$ в сверхкритическом течении ($dq/dt > 0$), то скорость заглубления однородного слоя существенно зависит от того, какой из режимов течения реализуется.

Рассмотрим отдельно двухслойную и непрерывную начальную стратификацию.

Двухслойная модель. Пусть $\nu = 0$. В этом случае $c = \mathrm{const}$, причем если глубина канала $H \to \infty$, то c — скорость распространения длинных

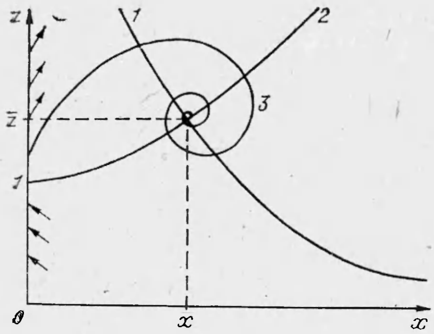

Рис. 2.

внутренних волн. На плоскости (x, z) $(x = q/c,\ z = u/c)$ траектории системы (8) совпадают с интегральными кривыми уравнения

$$(9)\qquad dz/dx = [2(1 - Axz)]/[A(z^2 - x^2 - 1)].$$

Стационарные точки (9) находятся из пересечения кривых $Axz = 1$ и $z^2 = x^2 + 1$ (рис. 2, линии *1*, *2* соответственно).

В области $x > 0$, $z > 0$ существует единственная особая точка $(\bar{x}, \bar{z})$ уравнения (9), являющаяся устойчивым фокусом. При $\tau^* = \mathrm{const}$ стационарная точка $(\bar{x}, \bar{z})$ определяет равномерный закон заглубления

$$(10)\qquad dh/dt = A\bar{q}/\mathrm{Ri},\ u = \bar{u},\ q = \bar{q}$$

с $\mathrm{Ri}_u \equiv \mathrm{const}$. Любая траектория из окрестности особого решения (10) стягивается к нему (рис. 2, кривая *3*), т. е. течение с постоянным значением $\mathrm{Ri}_u \equiv \mathrm{const}$ реализуется при $t \to \infty$.

Если напряжение τ^* приложено к покоящейся двухслойной жидкости ($u^0 = 0$, $q^0 = 0$) при $t = 0$, то в решении задачи о заглублении однородного слоя можно выделить три фазы: разгон верхнего слоя с $q \equiv q_e$, $u^2 < q^2 + c^2$, немонотонное нарастание скорости и выход на асимптотический режим равномерного заглубления. Особый интерес вызывает средняя фаза движения, показывающая, что даже в отсутствие эффектов бокового трения скорость в верхнем слое изменяется немонотонно. Из рис. 2 видно, что асимптотически реализуется течение с $\mathrm{Ri}_u < 1$, причем величина $\mathrm{Ri}_u|_{t\to\infty} \to \mathrm{Ri}_{\bar{u}}$ слабо зависит от выбора постоянной A при $1 \leqslant A < \infty$. Действительно,

$$(11)\qquad \mathrm{Ri}_{\bar{u}} = 2\Big/\left(1 + \sqrt{1 + 4A^{-2}}\right).$$

При $A = 1$ $\mathrm{Ri}_{\bar{u}} = 2/(1 + \sqrt{5}) \simeq 0{,}618$, что согласуется с выбором этого значения по экспериментальным данным в [1]. Ниже показано, что значение $A = 1$ соответствует экспериментальным результатам и для случая линейной начальной стратификации.

Линейная стратификация. Пусть $\gamma = 1$, $h_0 = 0$, т. е. $c^2 = c^2(h) = (1/2)\nu h^2$, $\mathrm{Ri} = \tau^*/c^2$, $\sigma = A\,\mathrm{Ri}^{-1}$. Система (8) однородна и сводится к автономной системе. На плоскости (x, z) $(x = q/c,\ z = u/c)$ траектории системы (8) совпадают с интегральными кривыми уравнения

$$(12)\qquad dz/dx = [2(1 - 2Axz)]/[A(z^2 - 3x^2 - 1)].$$

Особая точка уравнения (12) определяется пересечением кривых $2Axz = 1$ и $z^2 = 3x^2 + 1$. Так же как и для двухслойной стратификации, в области $x > 0$, $z > 0$ существует единственная стационарная точка $(\bar{x}, \bar{z})$, являющаяся устойчивым фокусом. Стационарная точка определяет особое решение системы (8)

$$(13)\qquad h = \bar{h}t^{1/2},\ u = \bar{u}t^{1/2},\ q = \bar{q}t^{1/2},$$

где $\bar{h} = (\sqrt{2}\tau^*/\sqrt{\nu}\,\bar{y})^{1/2}$; $\bar{c} = \sqrt{\nu/2}\,\bar{h}$. Решение (13) — точное решение задачи о заглублении однородного верхнего слоя ($\tau^* = \mathrm{const}$) в первоначально покоящейся ($u^0 = 0$, $q^0 = 0$) линейно-стратифицированной жидкости; оно характеризуется соотношением

$$\mathrm{Ri}_u = c^2/u^2 = \mathrm{const}.$$

Таким образом, течение, реализованное в [3], описывается особым решением (13). На рис. 3 нанесены экспериментальные данные по зависимости

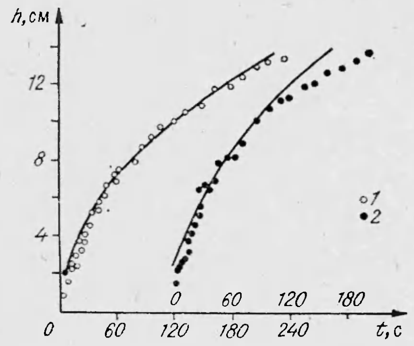

Рис. 3.

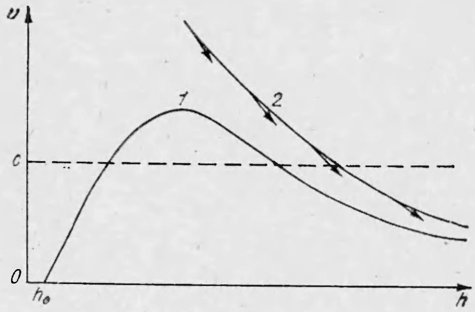

Рис. 4.

толщины однородного слоя от времени, полученные в [3] для $\nu = 1{,}98$ с$^{-2}$, $\tau^* = 0{,}995$ см^2/с^2 (точки *1*) и $\nu = 3{,}84$ с$^{-2}$, $\tau^* = 2{,}12$ см^2/с^2 (точки *2*). Сплошные линии соответствуют точному решению (13). На участках, где влиянием трения на боковых границах лотка можно пренебречь, экспериментальная зависимость описывается решением (13).

Влияние постоянной A на особое решение (13), как и в случае двухслойной жидкости ($\nu = 0$), несущественно при $1 \leqslant A < \infty$. На этом решении величина Ri_u выражается через A следующим образом:

$$\mathrm{Ri}_u = 2/\left(\sqrt{1 + 3A^{-2}} + 1\right).$$

При $A = 1$ $\mathrm{Ri}_u = 2/3$, т. е. незначительно отличается от предельного значения $\mathrm{Ri}_u \simeq 0{,}618$ для $\nu = 0$. Зависимость от A функции $h = h(t)$ в (13) выражена еще более слабо, так как

$$h = [(2/\nu)\mathrm{Ri}_u]^{1/4}(\tau^* t)^{1/2}$$

и $2/3 \leqslant \mathrm{Ri}_u < 1$ при $1 \leqslant A < \infty$. Поэтому система (8) со значением $A = 1$ удовлетворительно описывает заглубление однородного слоя как в линейной, так и в двухслойной начальной стратификации.

Замечание. Непрерывная начальная стратификация ($h_0 = 0$) с произвольной степенной зависимостью (5) плотности от глубины рассматривается аналогично. При этом система (8) сводится к автономной системе на плоскости (x, z), где $x = q/c$, $z = u/c$, и на особом решении уравнений (8) $\mathrm{Ri}_u = \mathrm{const}$.

Для канала конечной ширины необходимо учитывать трение на боковых стенках. Система (8) в этом случае описывает эволюцию однородного слоя, если поверхностное напряжение τ^* заменить «эффективным» напряжением $\tau = \tau^* - \tau_w$, где $\tau_w = c_w h u^2 L^{-1}$, c_w — коэффициент трения, L — ширина канала [1].

Пусть $c_w \equiv \mathrm{const} \neq 0$. Асимптотические свойства решений (8), выведенные выше, уже не справедливы, так как с ростом h и u величина τ_w становится сравнимой с τ^*. Для исследования поведения траекторий (8) удобно рассмотреть их проекцию на плоскость (h, u). Любая траектория $h = h(t)$, $u = u(t)$ (рис. 4, кривая *1*) не может пересечь линию $\tau = \tau^* - c_w L^{-1} h u^2 = 0$ (кривая *2*), так как траектории системы (8) выходят с этой кривой в область $\tau > 0$. Поэтому при $t \to \infty$ $u(t) \to 0$ и решение обязательно станет докритическим ($u^2 < q_e^c + c^2$), что приведет к существенному изменению скорости заглубления слоя.

При проведении двухслойных экспериментов в круговом лотке [2] влияние бокового трения выражено гораздо сильнее, чем в экспериментах [3] (см. рис. 3). Если при $\mathrm{Ri} \leqslant 100$ в [2] реализовывались фазы разгона верхнего слоя и выхода на сверхкритический режим заглубления, то при $\mathrm{Ri} \geqslant 500$ течение все время оставалось докритическим, что привело к резкому снижению скорости заглубления однородного слоя. Гипотеза о том, что в докритическом течении $q = q_e = a_0 u^*$, больше соответствует плоскопараллельному случаю. В кольцевом же лотке неоднородность поля скорости связана не только с турбулизацией жидкости движущимся экраном, но и наличием развитого радиального движения [7]. Поэтому для правильного описания докритического течения в кольцевом лотке необходима более подробная информация о структуре потока. В сверхкритическом случае геометрия течения менее существенна, так как неоднородность потока, обусловленная генерацией крупных вихрей в слое сдвига, доминирует над неоднородностями другого происхождения.

Гипотеза об однородности по вертикали профилей средней скорости и плотности в верхнем слое — достаточно грубое приближение. В действительности хорошо перемешанный слой отделен от покоящейся жидкости прослойкой, толщина которой может составить значительную часть верхнего слоя. Тем не менее рассмотренная выше модель дает не только качественное, но и количественное совпадение с результатами наблюдений. Этот факт, по-видимому, можно объяснить тем, что переходный слой динамически нейтрален, т. е. в этом слое выделившаяся за счет перестройки потока кинетическая энергия пульсационного движения расходуется на преодоление сил плавучести. Поэтому величина q^2 в (8) представляет разность кинетической и потенциальной энергий течения, обусловленных неоднородностью потока, т. е. «свободную» энергию вихрей, не компенсированную возрастанием плавучести. Таким образом, уравнения (8) формально описывают эволюцию верхнего слоя с учетом переходной зоны, если только под величиной h понимать расстояние от поверхности жидкости до середины прослойки. Учет диссипации, параметризованной выражением вида $\varepsilon = kq^3h^{-1}$, не приводит к качественному изменению поведения решений системы (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Price J. F.** On the scaling of stress-driven entrainment experiments.— J. Fluid Mech., 1979, v. 90, N 3.
2. **Kantha L. H., Phillips O. M., Azad R. S.** On turbulent entrainment at a stable density interface.— J. Fluid Mech., 1977, v. 79, N 4.
3. **Kato H., Phillips O. M.** On the penetration of a turbulent layer into a stratified fluid.— J. Fluid Mech., 1969, v. 37, N 4.
4. **Mellor G. L., Durbin P. A.** The structure and dynamics of the ocean surface mixed layer.— J. Phys. Oceanogr., 1975, v. 5, N 4.
5. **Китайгородский С. А.** Динамика верхнего термоклина в океане.— Итоги науки и техники, 1977, т. 4.
6. **Ниилер П. П., Краус Э. Б.** Одномерные модели верхнего слоя океана.— В кн.: Моделирование и прогноз верхних слоев океана/Под ред. Э. Б. Крауса. Л.: Гидрометеоиздат, 1979.
7. **Deardorff J. W., Willis G. E.** Dependence of mixed-layer entrainment on shear stress and velocity jump.— J. Fluid Mech., 1982, v. 115.

Поступила 28/XII 1984 г.

УДК 532.22 + 532.61 + 539.23

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ КАПЕЛЬ ЖИДКОСТИ ПРИ ГРАФОЭПИТАКСИИ ИЗ РАСТВОРОВ

Ю. В. Апанович, В. И. Клыков

(*Рига*)

Первый удачный эксперимент по графоэпитаксии — рост из раствора [1]. Впоследствии основное число работ оказалось сосредоточенным на получении пленок полупроводников, в основном кремния. Графоэпитаксия из растворов отошла на второй план, хотя она обладает рядом несомненных достоинств:

— является удобным модельным объектом: исследуя рост из низкотемпературных растворов, можно судить о процессах в высокотемпературных растворах в расплаве, непосредственное наблюдение за которыми затруднено;

— имеет прикладное значение, поскольку ряд важных материалов может быть выращен этим методом в контролируемых условиях;