ПМТФ, № 6, 1974

УДК 532.593
532.594

К ТЕОРИИ СЛАБОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

А. В. Кац, В. М. Конторович

(Харьков)

В работе рассматривается нелинейное взаимодействие волн в жидкости конечной глубины h. С помощью канонического преобразования из гамильтониана исключаются запрещенные в гравитационной части спектра процессы распада. Это дает возможность получить кинетическое уравнение, учитывающее кроме распадов в подсистеме капиллярных волн и рассеяния в подсистеме гравитационных волн также и рассеяние капиллярных волн на гравитационных.

Получено распределение капиллярных волн на мелкой воде $N_k \sim P^{1/2} h^{1/4} k^{-4}$ с постоянным потоком энергии P по спектру в пространстве волновых чисел k. Обсуждается взаимное влияние гравитационных и капиллярных спектров турбулентности. Найдено индуцированное распределение гравитационных волн, обусловленное их взаимодействием с капиллярными волнами. Оно представляет собой возрастающую функцию волновых чисел q в области, ограниченной капиллярной постоянной k_0 $N\mathbf{q} \sim q^{7/4} (q < k_0)$. Обсуждается сопряжение спектров в гравитационной и капиллярной областях, а также переход от слаботурбулентных распределений к универсальным распределениям.

1. В системе поверхностных волн (благодаря дисперсии их скорости) возможно существование слаботурбулентных локальных распределений колмогоровского типа. Для глубокой воды такие распределения, соответствующие постоянству потока энергии P в область больших частот, были получены в [1,2]

$$N(\mathbf{k}) = P^{1/3} k^{-4}, \quad h^{-1} \ll k \ll k_0 \tag{1.1}$$

$$N(\mathbf{k}) = P^{1/2} k^{-4} V_k^{-1/2} \sim P^{1/2} k^{-17/4}. \quad k_0, \; h^{-1} \ll k \tag{1.2}$$

Здесь $V_k = \omega_k / k$ — фазовая скорость волн, $\omega_k = [gk + (\alpha / \rho) \cdot k^3]^{1/2}$ — закон дисперсии, $N(\mathbf{k})$ — плотность числа волн с волновым вектором $\mathbf{k}$, определяющая плотность энергии в $\mathbf{k}$-пространстве $\omega_k N(\mathbf{k})$. Для гравитационных волн помимо (1.1) существует распределение с постоянным потоком Q числа волн («частиц») [1]

$$N(\mathbf{k}) = Q^{1/3} \omega_k^{1/3} k^{-4} \sim Q^{1/3} k^{-23/6}, \quad h^{-1} \ll k \ll k_0 \tag{1.3}$$

в соответствии с тем, что число волн является в этой области интегралом движения.

Выделение гравитационной ($k \ll k_0 = \sqrt{\rho g / \alpha}$) и капиллярной ($k \gg k_0$) областей и условие глубокой воды ($kh \gg 1$) существенно используются при нахождении решений (1.1) — (1.3), что связано с автомодельностью уравнений в этих областях.

В данной работе найдено слаботурбулентное распределение капиллярных волн на мелкой воде (п. 4), а также обсуждается сопряжение и взаимное влияние спектров турбулентности в различных автомодельных областях (п. 5,6). Спектры волнения находятся из кинетического уравне-

[1] Захаров В. Е. Докт. дисс., Новосибирск, 1967.

ния для $N(\mathbf{k})$, описывающего случайный ансамбль волн в теории слабой турбулентности [3,4]. Выводу кинетического уравнения из уравнений движения посвящен п. 3. Уравнения движения и матричные элементы взаимодействия волн для жидкости конечной глубины в гамильтоновых переменных получены в п. 2.

2. Как показано в [1,2,5], потенциальное движение тяжелой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью $z = \zeta(\mathbf{r}, t)$, заполняющей полупространство $z < \zeta$, может быть описано в гамильтоновых переменных, которыми являются возвышение поверхности $\zeta(\mathbf{r}, t)$ и потенциал скорости на поверхности $\varphi|_{z=\zeta} = \psi(\mathbf{r}, t)$. Эти переменные остаются гамильтоновыми и для жидкости конечной глубины. Уравнения

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2\right]_{z=\zeta} + g\zeta = \frac{\alpha}{\rho}\nabla_\perp\left(\frac{\Delta_\perp\zeta}{\sqrt{1+(\nabla_\perp\zeta)^2}}\right) \tag{2.1}$$

$$\partial\zeta/\partial t = (\partial\varphi/\partial z - \nabla_\perp\varphi\nabla_\perp\zeta)_{z=\zeta}, \quad \nabla_\perp \equiv (\partial/\partial x, \ \partial/\partial y) \tag{2.2}$$

с использованием объемного уравнения

$$\Delta\varphi = 0, \qquad -h < z < \zeta, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 \tag{2.3}$$

могут быть записаны в виде

$$\dot\zeta = \delta(E/\rho)/\delta\psi, \quad \dot\psi = -\delta(E/\rho)/\delta\zeta \tag{2.4}$$

$$E = \frac{\rho}{2}\int d\mathbf{r}\int_{-h}^{\zeta} dz\,(\nabla\varphi)^2 + \frac{\rho g}{2}\int d\mathbf{r}\zeta^2 + \alpha\int d\mathbf{r}\left(\sqrt{1+(\nabla_\perp\zeta)^2} - 1\right) \tag{2.5}$$

где E — полная энергия системы.

Переходя в уравнениях (2.2), (2.3) к фурье-представлению по поперечным координатам

$$\zeta(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k}\zeta_\mathbf{k}(t)e^{i\mathbf{kr}}, \qquad \psi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k}\psi_\mathbf{k}(t)e^{i\mathbf{kr}} \tag{2.6}$$

и вводя комплексные амплитуды нормальных колебаний $a_\mathbf{k}$

$$\zeta_\mathbf{k} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\tilde k}{2\omega_k}}(a_\mathbf{k} + a^*_{-\mathbf{k}}), \qquad \psi_\mathbf{k} = -\frac{i}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega_k}{2\tilde k}}(a_\mathbf{k} - a^*_{-\mathbf{k}}) \tag{2.7}$$

$$\tilde k \equiv k\,\mathrm{th}\,kh$$

$$\omega_k = \left[\left(g + \frac{\alpha}{\rho}k^2\right)\tilde k\right]^{1/2} \tag{2.8}$$

где ω_k — закон дисперсии поверхностных волн, запишем энергию волнения $E \equiv \rho H\{a\}$ в виде

$$\mathscr{H} = \int d\mathbf{k}\omega_k a_\mathbf{k}^* a_\mathbf{k} + \frac{1}{3}\int d1d2d3V^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}a^{\sigma_1}_{\mathbf{k}_1}a^{\sigma_2}_{\mathbf{k}_2}a^{\sigma_3}_{\mathbf{k}_3}\delta\left(\sum_{i=1}^{3}\sigma_i k_i\right) + \tag{2.9}$$

$$+\frac{1}{4}\int d1d2d3d4V^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}a^{\sigma_1}_{\mathbf{k}_1}a^{\sigma_2}_{\mathbf{k}_2}a^{\sigma_3}_{\mathbf{k}_3}a^{\sigma_4}_{\mathbf{k}_4}\delta\left(\sum_{i=1}^{4}\sigma_i k_i\right)$$

$$\int d1 \equiv \sum_{\sigma=\pm}\int d\mathbf{k}_1 \text{ и т. п.}$$

Здесь введены обозначения

$$(2.10)\qquad a_{\mathbf{k}}^{\sigma} = \begin{cases} a_{\mathbf{k}}^{-} \equiv a_{\mathbf{k}} & \text{при } \sigma = - \\ a_{\mathbf{k}}^{+} \equiv a_{\mathbf{k}}^{*} & \text{при } \sigma = + \end{cases}$$

При переходе от (2.5) к (2.9) была использована связь между $\psi_{\mathbf{k}}$ и $\varphi_{\mathbf{k}} \equiv (2\pi)^{-2} \int d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}, 0; t) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})$

$$(2.11)\qquad \varphi_{\mathbf{k}} = \psi_{\mathbf{k}} - \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \tilde{k}_1 \psi_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} + \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) [\tilde{k}_1 |\overparen{\mathbf{k} - \mathbf{k}_2}| + \tilde{k}_1 |\overparen{\mathbf{k} - \mathbf{k}_3}| - k_1^2] \psi_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3}$$

с точностью до членов $\sim a_{\mathbf{k}}^3$.

Уравнения движения в переменных $a_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ в соответствии с (2.4) сводятся к

$$(2.12)\qquad \dot{a}_{\mathbf{k}}^{\sigma} = i\sigma \frac{\delta \mathscr{H}}{\delta a_{\mathbf{k}}^{-\sigma}} \quad \text{или} \quad \dot{a}_{\mathbf{k}}^{\sigma} = \{\mathscr{H}, a_{\mathbf{k}}^{\sigma}\}$$

Переменные $a_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ являются классическими аналогами операторов рождения $a_{\mathbf{k}}^{+}$ и уничтожения $a_{\mathbf{k}}^{-}$ волн в состояниях с волновым вектором $\mathbf{k}$. Скобки Пуассона $\{\ \}$ для величин $a_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ см. в (3.5).

Как видно из (2.9), матричные элементы симметричны относительно перестановок аргументов $(\sigma, \mathbf{k})$, а в силу выбора фазы в (2.7) они вещественны и, таким образом, не меняются при изменении знака всех верхних индексов. Благодаря изотропии среды они инвариантны относительно одновременного вращения всех волновых векторов, в частности при изменении знака $\{k\}$. Явные выражения для матричных элементов имеют вид

$$(2.13)\qquad V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{8\sqrt{2}} \left(\frac{\omega_1\omega_2\omega_3}{\tilde{k}_1\tilde{k}_2\tilde{k}_3} \right)^{1/2} \sum \hat{P} \frac{\tilde{k}_1}{\omega_1} [\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3 + \sigma_2\sigma_3\tilde{k}_2\tilde{k}_3]$$

$$(2.14)\qquad V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{16} \left(\frac{\tilde{k}_1\tilde{k}_2\tilde{k}_3\tilde{k}_4}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4} \right)^{1/2} \frac{1}{4!} \sum \hat{P} \times \left[\frac{\omega_3\omega_4\sigma_3\sigma_4}{\tilde{k}_3\tilde{k}_4} X(-\sigma_1\mathbf{k}_1 | \sigma_3\mathbf{k}_3, \sigma_4\mathbf{k}_4) - \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 \frac{\alpha}{2\rho} (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4) \right]$$

где $\Sigma\hat{P}$ — сумма по всем перестановкам. Функция X, входящая в (2.14), равна

$$(2.15)\qquad X(\mathbf{k} | \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2) = k_1^2\tilde{k}_2 + k_2^2\tilde{k}_1 - \tilde{k}_1\tilde{k}_2 (|\overparen{\mathbf{k} - \mathbf{k}_2}| + |\overparen{\mathbf{k} - \mathbf{k}_1}|)$$

и обладает следующими свойствами симметрии:

$$(2.16)\qquad X(\mathbf{k} | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = X(\mathbf{k} | \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) = X(-\mathbf{k} | -\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2)$$

Матричный элемент (2.14) удобно переписать (с учетом $\Sigma\sigma_i\mathbf{k}_i = 0$), заменив $X(-\sigma_1\mathbf{k}_1 | \sigma_3\mathbf{k}_3, \sigma_4\mathbf{k}_4)$ на симметричную по каждой паре аргументов функцию

$$(2.17)\qquad Y(\sigma_1\mathbf{k}_1, \sigma_2\mathbf{k}_2 | \sigma_3\mathbf{k}_3, \sigma_4\mathbf{k}_4) = \frac{1}{2} \{2k_3^2\tilde{k}_4 + 2k_4^2\tilde{k}_3 - \tilde{k}_3\tilde{k}_4 (|\overparen{\sigma_1\mathbf{k}_1 + \sigma_3\mathbf{k}_3}| + |\overparen{\sigma_1\mathbf{k}_1 + \sigma_4\mathbf{k}_4}| + |\overparen{\sigma_2\mathbf{k}_2 + \sigma_3\mathbf{k}_3}| + |\overparen{\sigma_2\mathbf{k}_2 + \sigma_4\mathbf{k}_4}|)\}$$

На глубокой воде ($kh \gg 1$) в выражениях (2.13) — (2.15) $\tilde{k}$ переходит в k. Этот случай рассматривался в [1, 2, 5],

3. Закон дисперсии капиллярно-гравитационных волн (2.8) разрешает процессы распада

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2), \qquad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \tag{3.1}$$

при достаточно больших $k \gg \bar{k} \sim k_0$ (если $k_0 h \gg 1$, то $\bar{k} = \sqrt{2}\, k_0$). Разрешены также процессы рассеяния типа (3.1) с участием одной гравитационной и двух капиллярных волн. Если $k < \bar{k}$, то уравнениям (3.1) нельзя удовлетворить. При этом возможны процессы рассеяния с сохранением числа волн

$$\omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}_1) = \omega(\mathbf{k}_2) + \omega(\mathbf{k}_3), \quad \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \tag{3.2}$$

которые существенны в гравитационной области. При рассмотрении нераспадных процессов удобно производить каноническое преобразование, устраняющее из гамильтониана $\mathscr{H}$ (2.9) кубичные члены, которые не дают вклада в вероятность перехода в первом порядке теории возмущений. В данном случае такое преобразование не может быть проведено во всем $\mathbf{k}$ — пространстве из-за появления расходимостей, связанных с распадным характером спектра при $k > \bar{k}$. Поэтому произведем преобразование к новым переменным, символически записываемое в виде (см. также (3.9))

$$A_{\mathbf{k}}^{\sigma} = e^{-S} a_{\mathbf{k}}^{\sigma} e^{S} \tag{3.3}$$

так, чтобы исключить из гамильтониана лишь запрещенные тройные процессы. При этом $A_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ будут отличаться от $a_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ только при $k < \bar{k}$. Обозначая квадратичные, кубичные и четверные по переменным $a_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ члены гамильтониана (2.9) соответственно $\mathscr{H}_i(a)$ $(i = 2, 3, 4)$, выделим в $\mathscr{H}_3$ слагаемое $\overline{\mathscr{H}}_3$, отвечающее запрещенным процессам. В новых переменных гамильтониан $\widetilde{\mathscr{H}}(A) \equiv \mathscr{H}(a) = e^{S(A)} \mathscr{H}(A) e^{-S(A)}$ не должен содержать $\overline{\mathscr{H}}_3$. Раскладывая e^{S} в ряд по малому S, получим

$$\widetilde{\mathscr{H}} = \mathscr{H}_2 + (\mathscr{H}_3 + [S, \mathscr{H}_2]) + \left(\frac{1}{2}[S[S, \mathscr{H}_2]] + [S, \mathscr{H}_3] + \mathscr{H}_4\right) + O(A^5) \tag{3.4}$$

где квадратные скобки означают скобку Пуассона, деленную на i, и вычисляются с использованием инвариантных относительно канонических преобразований соотношений

$$\frac{1}{i}\{a_{\mathbf{k}}^{\sigma}, \sigma_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}\} \equiv [a_{\mathbf{k}}^{\sigma}, a_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}] = \sigma' \delta_{\sigma, -\sigma'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{3.5}$$

Как видно из (3.4), член $\overline{\mathscr{H}}_3$ исчезает, если определить S равенством

$$\overline{\mathscr{H}}_3 + [S, \mathscr{H}_2] = 0 \tag{3.6}$$

что приводит к

$$S = \frac{1}{3}\int d1d2d3 S_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} a_{\mathbf{k}_1}^{\sigma_1} a_{\mathbf{k}_2}^{\sigma_2} a_{\mathbf{k}_3}^{\sigma_3} \delta\left(\sum_{i=1}^{3} \sigma_i \mathbf{k}_i\right) \tag{3.7}$$

$$S_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} = \left(\sum_{i=1}^{3} \sigma_i \omega_i\right)^{-1} \widetilde{V}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}$$

Преобразование (3.3) является каноническим, так как в силу (3.7) и (2.13) $S_{\mathbf{k}}^{\sigma} = -S_{\mathbf{k}}^{-\sigma}$ (т. е. S — антиэрмитова, а e^{S} — унитарная матрицы). Диагональную часть S, не определяемую уравнением (3.6), положим равной нулю. При выводе канонического преобразования удобно использовать квантовую аналогию. Сопоставим рассматриваемой классической системе Бозе газ с гамильтонианом (2.9), где $a_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ представляют собой операторы рождения $a_{\mathbf{k}}^{+}$ и уничтожения $a_{\mathbf{k}}^{-}$ с правилами коммутации (3.5). Классическому каноническому преобразованию соответствует унитарное преобразование (3.3), где S — антиэрмитова матрица. Раскладывая e^{S} в ряд по операторам S, можно прийти к (3.4), которое соответствует классической форме записи, если коммутант заменить скобкой Пуассона (3.5).

Таким образом приходим к эффективному гамильтониану

$$\mathscr{H} = \int d\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^{*} A_{\mathbf{k}} + \frac{1}{3}\int d1d2d3\tilde{V}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} A^{\sigma_1}_{\mathbf{k}_1} A^{\sigma_2}_{\mathbf{k}_2} A^{\sigma_3}_{\mathbf{k}_3}\delta\left(\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\mathbf{k}_i\right) + \tag{3.8}$$

$$+\frac{1}{4}\int d1d2d3d4\tilde{V}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4} A^{\sigma_1}_{\mathbf{k}_1} A^{\sigma_2}_{\mathbf{k}_2} A^{\sigma_4}_{\mathbf{k}_3} A^{\sigma_4}_{\mathbf{k}_4}\delta\left(\sum_{i=1}^{4}\sigma_i\mathbf{k}_i\right)$$

где новые нормальные координаты связаны со старыми соотношениями

$$A_{\mathbf{k}}^{\sigma} = a_{\mathbf{k}}^{\sigma} - [S, a_{\mathbf{k}}^{\sigma}] \tag{3.9}$$

$$A_{\mathbf{k}}^{-\sigma} = a_{\mathbf{k}}^{-\sigma} + \sigma\int d1d2\delta\left(\sum_{i=0}^{2}\sigma_i\mathbf{k}_i\right)\overline{V}^{\sigma\sigma_1\sigma_2}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}\left(\sum_{i=0}^{2}\sigma_i\omega_i\right)^{-1} a^{\sigma_1}_{\mathbf{k}_1} a^{\sigma_2}_{\mathbf{k}_2} \qquad (\sigma \equiv \sigma_0)$$

Эффективный матричный элемент равен

$$\tilde{V}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4} = \check{V}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4} + \tag{3.10}$$

$$+\frac{2}{4!}\sum\hat{P}\int d5\sigma_5\overline{V}^{\sigma_5\sigma_3\sigma_4}_{\mathbf{k}_5\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}\overline{V}^{-\sigma_5\sigma_1\sigma_2}_{\mathbf{k}_5\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}\frac{\delta(\sigma_1\mathbf{k}_1 + \sigma_2\mathbf{k}_2 - \sigma_5\mathbf{k}_5)}{\sigma_1\omega_1 + \sigma_2\omega_2 - \sigma_5\omega_5}$$

При этом матричный элемент $\overline{V}$ отвечает запрещенным процессам

$$\overline{V}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} = \begin{cases} V^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}, & \text{если } k_{1,2,3} < \overline{k} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{3.11}$$

а $\tilde{V} \equiv V - \overline{V}$ — разрешенным тройным процессам. В (3.10) опущены члены, содержание произведения $\tilde{V}\,\overline{V}$, описывающие взаимодействие капиллярных и гравитационных волн в более высоком порядке, чем члены третьего порядка $\sim \tilde{V}$ в гамильтониане (3.8).

Кинетическое уравнение для числа волн [4] (квазичастиц) $N(\mathbf{k})$

$$N_k = I^{(3)}\{N\} + I^{(4)}\{N\} \tag{3.12}$$

возникает в приближении хаотических фаз

$$\langle A_{\mathbf{k}}^{\sigma} A_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}\rangle = N(\mathbf{k})\,\delta_{\sigma,-\sigma'}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{3.13}$$

где $\langle\ \rangle$ означают среднее по ансамблю, а интегралы столкновений $I\{N\}$ описывают изменение числа волн вследствие нелинейных взаимодействий.

При выводе кинетического уравнения (3.12) также удобно воспользоваться квантовой аналогией [3], хотя оно может быть получено и другими способами [4]. Используя связь между каноническими переменными $A_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ и операторами рождения и уничтожения, столкновительный член можно написать непосредственно, минуя громоздкие вычисления. Интеграл столкновений описывает баланс между приходом и уходом квазичастиц из состояния $\mathbf{k}$ и выражается через вероятности соответствующих процессов. Вероятность перехода есть 2π, умноженное на квадрат модуля матричного элемента гамильтониана (3.8) (считаем $\hbar = 1$), а комбинации N, входящие в f, можно выявить, сравнивая f с ее квантовым аналогом, который для распада и обратного ему слияния (3.1) имеет вид

$$f^q(\mathbf{k}|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2) = (N+1)N_1N_2 - (N_1+1)(N_2+1)N$$

а для процессов рассеяния (3.2)

$$f^q(\mathbf{k}\mathbf{k}_1|\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3) = (N+1)(N_1+1)N_2N_3 - NN_1(N_2+1)(N_3+1)$$

Множитель $N+1$ соответствует рождению квазичастицы (волны), множитель N — ее уничтожению в данном процессе. Эти множители возникают от матричных элементов операторов $A_{\mathbf{k}}^{\sigma}$. Комбинации f^q выделяются в силу равенства вероятностей прямых и обратных процессов (принцип детального равновесия), что в (2.9) и (3.8) соответствует $V_k^{\sigma} = V_k^{-\sigma}$. Переход от f^q к f соответствует условию $N \gg 1$ и возвращению к нормировке (2.9).

Слагаемое

$$I^{(3)}\{N\} = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \,[W_{\mathbf{k}\,|\,\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} f(\mathbf{k}\,|\,\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2) - W_{\mathbf{k}_1\,|\,\mathbf{k}_2\mathbf{k}} f(\mathbf{k}_1\,|\,\mathbf{k}_2\mathbf{k}) - W_{\mathbf{k}_2\,|\,\mathbf{k}\mathbf{k}_1} f(\mathbf{k}_2\,|\,\mathbf{k}\mathbf{k}_1)] \tag{3.14}$$

описывает тройные (распадные) процессы

$$W_{\mathbf{k}\,|\,\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\,\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)\,U_{\mathbf{k}\,|\,\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \tag{3.15}$$

$$U_{\mathbf{k}\,|\,\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = 4\pi\,|V^{+--}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}|^2$$

вероятность перехода

$$f(\mathbf{k}/\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2) = N_1N_2 - NN_1 - NN_2, \quad N_1 \equiv N(\mathbf{k}_1) \text{ и т. п.} \tag{3.16}$$

Четверной интеграл столкновений

$$I^{(4)}\{N\} = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\,|\,\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} f(\mathbf{k}\mathbf{k}_1\,|\,\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3) \tag{3.17}$$

описывает рассеяние гравитационной волны

$$W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\,|\,\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\,\delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)\,U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\,|\,\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} \tag{3.18}$$

$$U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\,|\,\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} = \frac{2\pi}{2}\,|3!\tilde{V}^{++--}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2$$

$$f(\mathbf{k}\mathbf{k}_1|\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3) = N_1N_2N_3 + NN_2N_3 - NN_1N_2 - NN_1N_3 \tag{3.19}$$

Для волн на глубокой воде ($kh \gg 1$) тройной интеграл столкновений (3.14) при $k \gg k_0$ совпадает с полученным в [2], а четверной (3.17) совпадает со столкновительным членом в [1]. При записи интегралов столкновений (3.14) — (3.19) для удобства сравнения использованы обозначения работ [6–8]. Приведем здесь необходимые в дальнейшем выражения и оценки для матричных элементов

$$V^{\omega_1\omega_2\omega_3}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\frac{\omega_1\omega_2\omega_3}{\tilde{k}_1\tilde{k}_2\tilde{k}_3}\right)^{1/2}\sum \hat{P}\,\frac{\tilde{k}_1}{\omega_1}(\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3), \quad kh \ll 1 \tag{3.20}$$

$$V^{+--}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \frac{1}{8\pi\sqrt{2}}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{1/4}(kk_1k_2)^{1/4}\left[\frac{1}{\sqrt{k}}(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 + k_1k_2) + \frac{1}{\sqrt{k_1}}(\mathbf{k}\mathbf{k}_2 - kk_2) + \frac{1}{\sqrt{k_2}}(\mathbf{k}\mathbf{k}_1 - kk_1)\right] \sim k^{9/4}, \quad k \gg k_0, h^{-1} \tag{3.21}$$

$$V^{(3)}_k \sim \omega_k^{1/2}k^{3/2}, \qquad k \gg h^{-1}, \qquad k \lesssim k_0$$

$$V^{+--}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1 q} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}}\,g^{1/4}q^{-1/4}[\mathbf{k}\mathbf{q} + O(q^2)], \qquad k \gg k_0 \gg q \gg h^{-1} \tag{3.22}$$

$$V^{+--}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \frac{1}{8\pi\sqrt{2}}\left(\frac{\alpha}{\rho h}\right)^{1/4}(k^2 + \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2), \quad h^{-1} \gg k \gg k_0 \tag{3.23}$$

$$V^{++--}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} \sim \widetilde{V}^{++--}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} \sim k^3, \quad k_0 \gg k \gg h^{-1} \tag{3.24}$$

$$V^{++--}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} \sim h^{-1}k^2, \quad k \ll k_0, h^{-1} \tag{3.25}$$

$$V^{+--}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \sim k_1^{7/4}k^{1/2}, \quad k, k_2 \gg k_1 \gg k_0, h^{-1} \tag{3.26}$$

$$U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1 | \mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} \sim (k_1k_3)^2\, kk_2, \quad k_0 \gg k, k_2 \gg k_1, k_3 \gg h^{-1} \tag{3.27}$$

Найденные матричные элементы содержат полную информацию о нелинейном взаимодействии поверхностных волн. Они определяют инкременты распадных неустойчивостей [5], амплитуды высших гармоник и т. п. Асимптотики (3.26) (3.27) необходимы для исследования сходимости интеграла столкновений (см. [7,8]). В формулах использовался закон сохранения импульса (см. (2.9), (3.8)).

4. Для тонкой пленки жидкости с глубиной h, меньшей k_0^{-1}, определим параметры слабой турбулентности в области длин волн, где $kh \ll 1$ (мелкая вода). Закон дисперсии волн

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho} h k^2}, \quad h^{-1} \gg k \gg k_0 \tag{4.1}$$

и вероятность перехода W_k, равная согласно (3.15), (3.20)

$$W_{\mathbf{k} | \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \frac{1}{32\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{\rho h}}\, k^4 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\,\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \tag{4.2}$$
$$h^{-1} \gg k \gg k_0$$

являются в этой области однородными функциями. Это, как показано в [6,7], позволяет найти турбулентное распределение.

Стационарное распределение находится как решение нелинейного интегрального уравнения $I^{(3)}\{N\} = 0$, которое помимо равновесного решения $N \sim \omega^{-1}$, имеет степенное решение, отвечающее постоянству потока энергии P по спектру турбулентности. Показатель степени определяется степенью однородности вероятности перехода, закона дисперсии и размерностью $\mathbf{k}$-пространства. Решение имеет вид [7]

$$N \sim \omega^s, \quad s = -\frac{1}{2\beta}(m + 2d) \tag{4.3}$$

Здесь β и m — показатели однородности закона дисперсии $\omega_k \sim k^\beta$ и квадрата модуля матричного элемента $U_k \equiv U_{\mathbf{k}/\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$ (3.15) ($U_{\lambda k} = \lambda^m U_k$). Для капиллярных волн на мелкой воде $\beta = 2$, $m = 4$ согласно (4.2) получаем $s = -2$. Зависимость распределения от потока энергии определяется кинетическим уравнением

$$\partial P / \partial k \equiv -\omega k I^{(3)}\{N\}, \quad I^{(3)}\{N\} \sim N^2$$

Восстанавливая из соображений размерности зависимость от глубины h, получаем (с точностью до численного множителя ~ 1)

$$N = P^{1/2}\left(\frac{k}{\omega}\right)^{1/2} k^{-4}(kh)^{1/2} \sim P^{1/2}k^{-4}, \quad h^{-1} \gg k \gg k_0 \tag{4.4}$$

Решение (4.4) можно получить, исходя из оценки $I^{(3)}\{N\} \sim k^2\omega^{-1}N^2(k) \times \times \bar{U}_k^{(3)}$, использующей локальность распределения, откуда следует $N \sim P^{1/2}(k^4 U_k^{(3)})^{-1/2}$, что совпадает с (4.4). Распределение капиллярных волн может охватывать область как мелкой, так и глубокой воды. При этом в соответствии с (1.2) и (4.4)

$$N = P^{1/2}\left(\frac{k}{\omega}\right)^{1/2} k^{-4}\varphi(kh), \quad \varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \ll 1 \\ 1, & x \gg 1 \end{cases}, \quad k \gg k_0 \tag{4.5}$$

Распределение (4.4) является локальным, в чем можно убедиться, оценивая сходимость интеграла столкновений подобно тому, как это сделано в [7] при $\beta < 2$. Отметим, что система капиллярных волн на мелкой воде представляет собой двумерный газ квазичастиц с квадратичным законом дисперсии ($\varepsilon = p^2 / 2M$, $p = \hbar k$, $M = (\hbar / 2)[(\alpha/\rho h)]^{-1/2}$, $\hbar$ — постоянная Планка). Распады происходят под прямым углом, а вероятность перехода (4.2) имеет простой вид. Капиллярные волны на мелкой воде могут служить удобной моделью исследования стохастических систем.

5. Сопряжение спектров турбулентности при $k \sim k_0$ представляет принципиальный интерес. Рассмотрим случай $k_0 h \gg 1$ и исследуем решение с постоянным потоком энергии, проходящее из гравитационной области в капиллярную. Переход в область распадного спектра сопровождается изменением зависимости N от потока P. Поэтому распределение выражается через функцию двух безразмерных параметров k / k_0 и P / V_k^3 ($V_k \equiv \omega / k$), асимптотический вид которой получается из сравнения с (1.1), (1.2)

$$N = P^{1/3} k^{-4} F\left(\frac{P}{V_k^3}, \frac{k}{k_0}\right), \quad F(x, y) = \begin{cases} 1, & y \ll 1 \\ x^{1/6}, & y \gg 1 \end{cases} \tag{5.1}$$

Появляющийся здесь параметр P / V_k^3 играет существенную роль в теории слабой турбулентности: условие слабости турбулентности (малость потока) отвечает малым значениям этого безразмерного параметра $P / V_k^3 \ll 1$. Обратимся к эффектам, обусловленным взаимодействием капиллярных и гравитационных волн. Рассеяние капиллярных волн на гравитационных, содержащееся в $I^{(3)}$, может быть существенным в области, примыкающей к $k_0 (k \lesssim k_0)$. Эти процессы приводят к изменению спектра гравитационных волн [9] и к их затуханию [10]. Обозначая волновой вектор гравитационной волны через $\mathbf{q}$, а капиллярной — через $\mathbf{k}$, запишем соответствующие этому процессу законы сохранения

$$\omega(\mathbf{k}_1) = \omega(\mathbf{k}_2) + \omega(\mathbf{q}), \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{q} \tag{5.2}$$

Ограничиваясь случаем глубокой воды $kh \gg 1$, $qh \gg 1$, предположим что в капиллярной области установилось слаботурбулентное распределение (1.2). При малых потоках энергии четверными процессами рассеяния гравитационных волн друг на друга можно пренебречь ($I^{(4)} \ll I^{(3)}$). Поэтому спектр турбулентности в гравитационной области будет индуцироваться спектром капиллярных волн $n(\mathbf{k})$ (1.2), а стационарное распределение гравитационных волн $N_\mathbf{q}$ находится из уравнения [9]

$$\begin{aligned} I^3\{N_\mathbf{q}, n\} = -\int d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, [W_{\mathbf{k}_1/\mathbf{k}_2\mathbf{q}}\, (N_\mathbf{q} n_2 - N_\mathbf{q} n_1 - n_1 n_2) + \\ + W_{\mathbf{k}_2|\mathbf{k}_1\mathbf{q}}\, (N_\mathbf{q} n_1 - N_\mathbf{q} n_2 - n_1 n_2)] = 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Интегрирование в (5.3) ведется по области $k_{1,2} \gtrsim \sqrt{2}\, k_0$ в соответствии с (3.15), $n_1 \equiv n(\mathbf{k}_1)$. Слагаемое, отвечающее распаду гравитационных волн на капиллярные и пропорциональные $W_{\mathbf{q}|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$ отсутствует, поскольку этот процесс запрещен законами сохранения. Второе слагаемое в (5.3), пропорциональное $W_{\mathbf{k}_2|\mathbf{k}_1\mathbf{q}} f(\mathbf{k}_2 \mid \mathbf{k}_1\mathbf{q})$, заменой переменных $\mathbf{k}_1 \rightleftarrows \mathbf{k}_2$ сводится к первому, так что для индуцированного распределения гравитационных волн получаем

$$N_{\mathbf{q}} = \left[\int d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 n_1 n_2 W_{\mathbf{k}_1|\mathbf{k}_2\mathbf{q}}\right]\left[\int d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\,(n_2 - n_1)\, W_{\mathbf{k}_1|\mathbf{k}_2\mathbf{q}}\right]^{-1} \tag{5.4}$$

В области $q \ll k_0$ распределение $N_{\mathbf{q}}$ приобретает степенной вид. Из (5.2) следует: $k_2 \approx k_1 = 4k_0^2 / 9q \cos \widehat{\mathbf{qk}}$, $n_2 - n_1 \approx -\omega_{\mathbf{q}}(\partial n_1 / \partial\omega_1)$, и (5.4) сводится к

$$N_q \approx P^{1/2}\left(\frac{k_0}{\omega_0}\right)^{1/2} k_0^{-4}\left(\frac{q}{k_0}\right)^{9/4}, \quad \omega_0 \equiv \omega(k_0) \tag{5.5}$$

Таким образом, убывающий спектр в капиллярной области $n_k \sim k^{-17/4}$ индуцирует возрастающий спектр в гравитационной: $N_q \sim q^{9/4}$ [9].

Распределение (5.5) возможно лишь при малых потоках энергии $P / V_0^3 \ll 1$, так как при $P / V_0^3 > 1$ вклад от процессов высших порядков вблизи k_0 нельзя считать малым, и турбулентность не является слабой. Для рассеяния капиллярных волн на гравитационных волнах кинетическое уравнение $\dot{N}_q = I^{(3)}$ является в силу (5.3) линейным дифференциальным уравнением. Нестационарная задача о взаимодействии гравитационных волн с произвольным ансамблем капиллярных волн решается точно; обратное время релаксации равно удвоенному знаменателю в (5.4) (ср. [10]).

6. Как следует из кинетического уравнения, слабая турбулентность отвечает малым значениям параметра $k^2\omega_k^{-1}U_k^{(3)}N_k$ или $k^4\omega_k^{-1}U_k^{(4)}N_k^2$, когда частота столкновений меньше частоты волн. При увеличении этого параметра процессы взаимодействия более высоких порядков, не учитываемые в кинетическом уравнении, начинают играть существенную роль. Для распределений с постоянными потоками это означает малость P / V_k^3 или $\omega Q / V_k^3$. Условие слабой турбулентности начинает нарушаться (при увеличении потока), по-видимому, локально и прежде всего вблизи $k \sim k_0$, поскольку при $k = k_0$ фазовая скорость минимальна. Это видно также из сравнения слаботурбулентных распределений с универсальными распределениями Филлипса и Хикса [11]. Распределение [11], приводящее к спектру волновых чисел $\Psi(k) = (B / \pi)k^{-4}$, получено из соображений размерности и независимо из соображений, связанных с устойчивостью водной поверхности. Соответствующее $N(\mathbf{k})$ равно

$$N(\mathbf{k}) = \frac{B}{\pi} V(k)\, k^{-4}, \quad V(k) \equiv \omega / k, \quad B \sim 10^{-3} \tag{6.1}$$

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t)\,\zeta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}, t)\rangle = \int d\mathbf{k}\,\Psi(\mathbf{k})\, e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}}, \quad \Psi(\mathbf{k}) = N(\mathbf{k}) / (2\pi)^2 V(\mathbf{k})$$

Универсальное распределение для капиллярных волн имеет такой же вид с другой константой $B' \sim B$.

В отличие от распределения Обухова — Колмогорова $E_k = P^{2/3}k^{-5/3}$ для турбулентности в несжимаемой жидкости [12], распределение (6.1) не содержит потока (в системе распространяющихся волн такие распределения могут быть построены из степеней ω и k, определяющих локальные масштабы турбулентности). При достаточно больших потоках $P / V_0^3 > 1$ слаботурбулентные распределения (1.1), (1.2) будут пересекаться с универсальными распределениями. Рассмотрим гравитационную часть спектра. Если источник расположен в области малых волновых чисел $k \sim a$ и создает поток энергии в сторону больших k, то для $k \gg a$ и $P / V_k^3 < 1$ будет справедливо распределение (5.1), переходящее в распределение Филлипса при волновых числах $k_{Ph} \sim k_0(P / V_0^3)^{-2/3}$. Этому отвечает асимптотика (N_k не зависит от P!) $F(P / V_k^3, k / k_0) =$

$= (P / V_k^3)^{-1/3}$ при $P / V_k^3 \gg 1$, $k / k_0 \ll 1$, что и приводит согласно (5.1) к распределению Филлипса.

Аналогично предыдущему при большом потоке энергии в капиллярной части спектра распределение (5.1) при $k \lesssim k_H \sim k_0 \quad (P / V_0^3)^{2/3}$ переходит в распределение Хикса, что отвечает асимптотике

$$F(P / V_k^3, \ k / k_0) = (P / V_k^3)^{-1/3} \text{ при } k / k_0 \gg 1, \ P / V_k^3 \gg 1$$

Таким образом можно предположить, что распределения [11] являются предельными для распределений с постоянным потоком энергии по спектру турбулентности. Явная зависимость от потока отсутствует — величиной потока определяется область перехода от универсального спектра к спектру слабой турбулентности.

Поступила 4 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Захаров В. Е., Филоненко Н. Н.* Спектр энергии стохастических гравитационных волн. Докл. АН СССР, 1966, т. 170, № 6.
2. *Захаров В. Е., Филоненко Н. Н.* Слабая турбулентность капиллярных волн. ПМТФ, 1967, № 5.
3. *Веденов А. А.* Введение в теорию слаботурбулентной плазмы. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3. М., Атомиздат, 1963.
4. *Галеев А. А., Карпман В. И.* Турбулентная теория слабонеравновесной разреженной плазмы. ЖЭТФ, 1963, т. 44, вып. 2.
5. *Захаров В. Е.* Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости. ПМТФ, 1968, № 2.
6. *Кац А. В., Конторович В. М.* Дрейфовые стационарные решения в теории слабой турбулентности. Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 14, вып. 6, стр. 392.
7. *Кац А. В., Конторович В. М.* Свойства симметрии интеграла столкновений и неизотропные стационарные решения в теории слабой турбулентности. ЖЭТФ, 1973, т. 64, вып. 1.
8. *Кац А. В., Конторович В. М.* Анизотропные турбулентные распределения для волн с нераспадным законом дисперсии. ЖЭТФ, 1973, т. 65, вып. 1.
9. *Гавриков В. К., Кац А. В., Конторович В. М., Синицын Ю. А.* К теории слабой турбулентности и вторичного волнения в системе ветровых волн. Тезисы 15 Генеральной ассамблеи Междунар. геодезич. и геофизич. союза, М., 1971.
10. *Красильников В. А., Павлов В. И.* О нелинейном затухании плоских монохроматических волн на поверхности жидкости. Вестн. МГУ, Сер. физ., астроном., 1972, № 1.
11. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего слоя океана. М., «Мир», 1969.
12. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика, ч. 2. М., «Наука» 1967.