

4. Zierep J., Lin S. Ein Ähnlichkeitsgesetz für instationäre Kondensationvorgänge in Lavaldüsen.—«Forsch. Ingenieur», 1968, Bd 34, N 1.
5. Баршдорф Д., Филиппов Г. А. Анализ некоторых особых режимов работы сопел Лавала с местным подводом тепла.—«Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт», 1970, № 3.
6. Салтанов Г. А. Сверхзвуковые двухфазные течения. Минск, «Выш. школа», 1972.
7. Pouring A. Thermal choking and condensation in nozzles.—«Phys. Fluids», 1965, vol. 8, N 10.
8. Yosif F., Campbell B., Bakhtar F. Instability in condensing flow of steam.—«Proc. Inst. Mech. Eng.», 1972, vol. 186, N 37.
9. Wegener P., Gagliostro D. Periodic nozzle flow with heat addition.—«Combust. sci and technol.», 1973, vol. 6, N 5.
10. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений газовой динамики. Математический сборник, 1959, т. 47, вып. 3.
11. Иванов М. Я., Крайко А. Н. Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1969, № 5.
12. Крайко А. Н., Осипов А. А. Исследование отражения возмущений от дозвуковой части сопла Лавала.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1973, № 1.
13. Anderson J. Time-dependent solutions of nonequilibrium nozzle flows. A. sequel.—«AIAA J.», 1970, vol. 8, N 12.
14. Весенин И. М., Рычков А. Д. Численное решение задачи о течении смеси газа и частиц в осесимметричном сопле Лавала.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1973, № 5.
15. Ткаленко Р. А. О спонтанной конденсации при обтекании сверхзвуковым потоком выпуклого угла.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1970, № 5.
16. Ткаленко Р. А. Конденсация паров воды при расширении в плоских и осесимметричных соплах.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1972, № 6.
17. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. Том 3. М., «Наука», 1959.
18. Hill P. Condensation of water vapor during supersonic expansion in nozzles.—«J. Fluid Mech.», 1966, vol. 25, N 3.
19. Куршаков А. В., Салтанов Г. А., Ткаленко Р. А. Теоретическое и экспериментальное исследование конденсации в центрированной волне разрежения.—ПМТФ, 1971, № 5.
20. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1972.

УДК 532.517.4

НЕКОТОРЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИФфуЗИИ ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ ПРИМЕСИ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ЗОНЕ СМЕШЕНИЯ

А. Ф. Курбацкий

(Новосибирск)

В статье путем численного решения связанной системы уравнений турбулентного переноса для полей скорости и концентрации химически активной примеси вычислен ряд вторых моментов поля концентрации в плоской зоне смешения. Система уравнений переноса выведена из уравнения для совместной функции распределения полей пульсаций скорости и концентрации [1] и упрощена в приближении пограничного слоя. Замкнутый вид уравнений переноса получен на уровне третьих моментов с использованием гипотезы четвертых моментов [2] в ее обобщенном виде для смешанных моментов поля скорости и поля пассивного скаляра. Дифференциальный оператор замкнутой системы уравнений турбулентного переноса для полей скорости и концентрации оказывается при таком способе замыкания принадлежащим не к параболическому, а к слабогиперболическому типу [3]. Для численного решения применена неявная разностная схема, предложенная в [4]. Проведено сопоставление результатов численного решения с экспериментальными данными [5].

1. Система уравнений для моментов поля концентрации. В эйлеровом описании рассматривается турбулентная диффузия динамически пассивной примеси в свободном неоднородном турбулентном потоке несжимае-

мой жидкости. Динамическая пассивность примеси предполагает, что поле скорости $\vec{u}(\vec{x})$ не испытывает на себе заметного влияния со стороны процесса турбулентной диффузии примеси. Примесь может химически реагировать со средой потока. Рассматриваемая химическая реакция полагается пассивной, что можно считать оправданным для «слабых» химических реакций в потоке (протекающих сравнительно медленно и спокойно) и малых концентраций примеси. Полагается, что поля пульсаций скорости и концентрации примеси могут быть описаны совместной функцией распределения, удовлетворяющей некоторому «кинетическому» уравнению [1]. Уравнения для моментов поля концентрации в свободном неоднородном турбулентном потоке выводятся аналогично тому, как в [1, 4] получены уравнения для моментов поля скорости. Нужно только принять соотношение для величины $d\theta/dt$, входящей в уравнение для совместной функции распределения. Эта величина состоит из двух слагаемых, первое из которых моделирует собой скорость изменения концентрации примеси в элементе жидкости вследствие молекулярной диффузии, а второе — скорость химической реакции. Первое слагаемое, вид которого определен из полуэмпирических соображений, может быть также истолковано как скалярная диссипация или как скорость смешения вещества примеси до молекулярных масштабов. Выражение для $d\theta/dt$ имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{d\theta}{dt} = -3 \frac{b_0}{L} E^{1/2} \theta'^2 + \mu \theta^n,$$

где θ' — флуктуация концентрации в эйлеровой системе координат; b_0 — эмпирическая постоянная; μ — «константа скорости химической реакции» ($\mu = \text{const}$, $\mu \geq 0$); n — целое положительное число ($n \geq 1$) — «порядок» химической реакции. (Здесь и далее не оговоренные специально обозначения соответствуют обозначениям работы [4].) Выражение для скалярной диссипации (первое слагаемое в (1.1)), подобное принятому здесь, использовано также, например, в [6]. Аппроксимация скорости химической реакции (второе слагаемое в (1.1)) в виде степенной функции только от концентрации $\theta(\vec{x})$ (но не от $\vec{x}$) относится к случаю малых концентраций примеси по сравнению с концентрацией окружающей среды потока. Химическая реакция при $n=1$ протекает по первому порядку. Если $n > 1$ (например, для $n=2$ — «реакция второго порядка»), то в уравнении для дисперсии флуктуаций поля концентрации член, описывающий скорость химического превращения и имеющий в случае реакции произвольного порядка вид $2\mu \langle \theta^{n+1} \rangle$, содержит при $n=2$ кроме второго момента еще и третий момент $\langle \theta'^3 \rangle$. Для него следует написать его определяющее уравнение, в котором появятся четвертые моменты. Они могут быть (приближенно) выражены через вторые с помощью обобщенной гипотезы четвертых моментов. При первом рассмотрении представляется целесообразным ограничиться химической реакцией «первого порядка», полагая в (1.1) $n=1$.

Ниже выписываются уравнения для моментов первых трех порядков поля концентрации, относящиеся к развитому свободному турбулентному потоку вполне турбулентной несжимаемой жидкости, находящемуся в стационарных внешних условиях при отсутствии градиента давления, когда примесь химически реагирует со средой потока по «первому порядку».

Уравнение сохранения средней концентрации примеси

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle u_k \rangle \langle \theta \rangle + \langle u'_k \theta' \rangle] = \mu \langle \theta \rangle;$$

уравнение для составляющих вектора турбулентного потока примеси

$$(1.3) \quad \langle u_k \rangle \frac{\partial \langle u'_\alpha \theta' \rangle}{\partial x_k} = - \langle u'_k u'_\alpha \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_k} - \langle u'_k \theta' \rangle \frac{\partial \langle u_\alpha \rangle}{\partial x_k} - \frac{\partial \langle u'_k u'_\alpha \theta' \rangle}{\partial x_k} - \\ - \langle u'_\alpha \theta' \rangle \frac{E^{1/2}}{L} \left[\frac{3}{8} (a_0 + 8b_0) + c_0 \right] + \mu \langle u'_\alpha \theta' \rangle;$$

уравнение для дисперсии флуктуаций поля концентрации

$$(1.4) \quad \langle u_k \rangle \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial x_k} = - 2 \langle u'_k \theta' \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_k} - \frac{\partial \langle u'_k \theta'^2 \rangle}{\partial x_k} - \\ - 6b_0 \frac{E^{1/2}}{L} \langle \theta'^2 \rangle + 2\mu \langle \theta'^2 \rangle;$$

уравнения для третьих смешанных моментов полей пульсаций скорости и концентрации

$$(1.5) \quad \langle u_k \rangle \frac{\partial \langle u'_\alpha u'_\beta \theta' \rangle}{\partial x_k} = - \langle u'_k u'_\alpha u'_\beta \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_k} - \langle u'_k u'_\alpha \theta' \rangle \frac{\partial \langle u_\beta \rangle}{\partial x_k} - \\ - \langle u'_k u'_\beta \theta' \rangle \frac{\partial \langle u_\alpha \rangle}{\partial x_k} - \langle u'_k u'_\alpha \rangle \frac{\partial \langle u'_\beta \theta' \rangle}{\partial x_k} - \langle u'_k u'_\beta \rangle \frac{\partial \langle u'_\alpha \theta' \rangle}{\partial x_k} - \underbrace{\langle u'_k \theta' \rangle \frac{\partial \langle u'_\alpha u'_\beta \rangle}{\partial x_k}}_{(*)} - \\ - \frac{3}{4} \left[\frac{a_0 + 4b_0}{L} \right] E^{1/2} \langle u'_\alpha u'_\beta \theta' \rangle - \frac{c_0}{L} E^{1/2} \langle u'_\alpha u'_\beta \theta' \rangle + \mu \langle u'_\alpha u'_\beta \theta' \rangle;$$

$$(1.6) \quad \langle u_k \rangle \frac{\partial \langle u'_\alpha \theta'^2 \rangle}{\partial x_k} = - \langle u'_k u'_\alpha \rangle \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial x_k} - 2 \langle u'_k \theta' \rangle \frac{\partial \langle u'_\alpha \theta' \rangle}{\partial x_k} - \\ - 2 \langle u'_k u'_\alpha \theta' \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_k} - \frac{3}{8} \left[\frac{a_0 + 16b_0}{L} \right] E^{1/2} \langle u'_\alpha \theta'^2 \rangle - c_0 \frac{E}{L} \langle u'_\alpha \theta'^2 \rangle + \\ + 2\mu \langle u'_\alpha \theta'^2 \rangle;$$

где a_0, b_0, c_0 — эмпирические постоянные; угловые скобки означают осреднение по ансамблю реализаций. Четвертые смешанные моменты, появляющиеся в уравнениях третьих смешанных моментов (1.5), (1.6), выражены через вторые при помощи обобщенной гипотезы четвертых моментов *

$$(1.7) \quad \begin{cases} \langle u'_k u'_\alpha u'_\beta \theta' \rangle = \langle u'_k u'_\alpha \rangle \langle u'_\beta \theta' \rangle + \langle u'_k u'_\beta \rangle \langle u'_\alpha \theta' \rangle + \langle u'_k \theta' \rangle \langle u'_\alpha u'_\beta \rangle, \\ \langle u'_k u'_\alpha \theta' \theta' \rangle = \langle u'_k u'_\alpha \rangle \langle \theta'^2 \rangle + 2 \langle u'_k \theta' \rangle \langle u'_\alpha \theta' \rangle. \end{cases}$$

Соотношения (1.7), будучи точными для распределений Гаусса, в общем случае могут рассматриваться как некоторое приближение. Использование соотношений (1.7) для замыкания уравнений для моментов в свободных турбулентных течениях с градиентом средней скорости, по-видимому, хотя бы косвенно, позволит судить о непротиворечивости гипотезы четвертых моментов. В [8] показано, что замыкание уравнений для моментов поля концентрации пассивной примеси в поле изотропной турбулентности при помощи бескумулянтных приближений (инфинитезимальным уровнем которых является гипотеза четвертых моментов о равенстве нулю четвертых кумулянтов полей скорости и концентрации) ведет к нефизическим результатам. В модельной задаче о диффузии дисперсии флуктуаций кон-

* Гипотеза четвертых моментов в обобщенном виде (1.7) ранее всего была применена в задаче о турбулентной диффузии примеси в поле изотропной турбулентности [7].

концентрации примеси в поле стационарной изотропной турбулентности для замыкания уравнений для моментов была использована [8] гипотеза о равенстве нулю четвертых кумулянтов полей скорости и концентрации. Оказалось, что при больших временах диффузии положительная величина — дисперсия флуктуаций скалярного поля принимает отрицательные значения, противоречащие ее физическому смыслу.

В связи с этим представляется, что положительное всюду в области интегрирования значение дисперсии флуктуаций концентрации примеси $\langle \theta'^2 \rangle$, полученное в результате численного решения замкнутой системы уравнений турбулентного переноса для полей скорости и концентрации в свободном неоднородном турбулентном потоке, может, видимо, тогда свидетельствовать в пользу предположения о том, что нелинейность уравнений поля скорости уже не приводит к отмеченным выше нефизическим результатам (относящиеся к функции $\langle \theta'^2 \rangle$ численные результаты приведены ниже). Возможно, что предполагаемое отсутствие нефизических результатов для моментов поля концентрации в зоне смешения может быть связано не только с нелинейностью динамики неоднородного турбулентного потока, но также и с тем, что основным динамическим механизмом в неоднородной турбулентности является взаимодействие среднего течения с турбулентностью, а не взаимодействие флуктуационных компонент турбулентного поля, которым в изотропной турбулентности определяется вся динамика [8].

Непосредственным следствием применения для замыкания уравнений для моментов (1.2) — (1.6) соотношений (1.7) является такой результат: система (1.2) — (1.6) оказывается зацепленной с соответствующей замкнутой системой моментных уравнений поля скорости (системой (1.1) — (1.6) из [4]) через коэффициенты при производных и источники члены и через производные от вторых моментов поля скорости из-за появления в правой части (1.5) члена, отмеченного звездочкой. Можно заметить, что этот член не мал по сравнению с другими членами даже в приближении пограничного слоя, хотя надежная оценка его затруднена отсутствием данных опыта.

2. Турбулентная диффузия химически инертной примеси в плоской зоне смешения. Рассматривается задача о турбулентной диффузии химически инертной ($\mu=0$) примеси в двумерной зоне смешения, для чего система уравнений (1.2) — (1.6) упрощается в приближении пограничного слоя с привлечением экспериментальных данных [5]. Схематическая картина течения в зоне смешения и его геометрическое определение даны в [4]. Результатом упрощения является следующая система пяти квазилинейных уравнений для пяти искомых функций:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \langle u \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \\ \langle u \rangle \frac{\partial S}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial S}{\partial y} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle S'v' \rangle}{\partial y} = - \frac{3}{8} \left[\frac{a_0 + 8b_0}{L} \right] \times \\ \quad \times E^{1/2} S - (c_0/L) E^{1/2} S, \\ \langle u \rangle \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial y} + 2S \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle \theta'^2 v' \rangle}{\partial y} = - 6b_0 (E^{1/2}/L) \langle \theta'^2 \rangle, \\ \langle u \rangle \frac{\partial \langle S'v' \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle S'v' \rangle}{\partial y} + 2 \langle v'^2 \rangle \frac{\partial S}{\partial y} + S \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} = - \\ \quad - \frac{3}{4} \left[\frac{a_0 + 4b_0}{L} \right] E^{1/2} \langle S'v' \rangle - \frac{c_0}{L} E^{1/2} \langle S'v' \rangle, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \langle u \rangle \frac{\partial \langle \theta'^2 v' \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle \theta'^2 v' \rangle}{\partial y} + 2S \frac{\partial S}{\partial y} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial y} = \\ = -\frac{3}{8} \left[\frac{a_0 + 16b_0}{L} \right] E^{1/2} \langle \theta'^2 v' \rangle - \frac{c_0}{L} E^{1/2} \langle \theta'^2 v' \rangle, \end{aligned} \right.$$

где

$$S \equiv \langle \theta' v' \rangle, \quad S' \equiv \theta' v'.$$

Из последних двух уравнений системы (2.1) третьи моменты выражаются приближенно через вторые по формулам:

$$(2.2) \quad \langle S' v' \rangle \approx -\Phi_1 E^{-1/2} \left[2 \langle v'^2 \rangle \frac{\partial S}{\partial y} + S \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} \right];$$

$$(2.3) \quad \langle \theta'^2 v' \rangle \approx -\Phi_2 E^{-1/2} \left[2S \frac{\partial S}{\partial y} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial y} \right].$$

После подстановки (2.2), (2.3) в (2.1) окончательно получается замкнутая система трех квазилинейных уравнений для трех искомых стохастических величин поля концентрации:

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{aligned} \langle u \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0, \\ \langle u \rangle \frac{\partial S}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial S}{\partial y} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial y} &= \Phi_1 \frac{\partial}{\partial y} \left[2 \langle v'^2 \rangle E^{-1/2} \frac{\partial S}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + S E^{-1/2} \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} \right] - \frac{3}{8} \left[\frac{a_0 + 8b_0}{L} \right] E^{1/2} S - \frac{c_0}{L} E^{1/2} S, \\ \langle u \rangle \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial y} + 2S \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial y} &= \Phi_2 \frac{\partial}{\partial y} \left[2S E^{-1/2} \frac{\partial S}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + \langle v'^2 \rangle E^{-1/2} \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial y} \right] - 6b_0 \frac{E^{1/2}}{L} \langle \theta'^2 \rangle, * \end{aligned} \right.$$

$$\text{где } \Phi_1 \equiv L \left[\frac{3}{4} (a_0 + 4b_0) + c_0 \right]^{-1}; \quad \Phi_2 \equiv L \left[\frac{3}{8} (a_0 + 16b_0) + c_0 \right]^{-1}.$$

Отличительная особенность уравнений (2.4) состоит в том, что они описывают нелинейный диффузионный процесс, в котором соответствующие коэффициенты диффузии сами являются искомыми величинами.

Замкнутая система уравнений для полей скорости и концентрации ((2.4), (1.10) из [4]) имеет ту же характерную особенность, что и замкнутая система уравнений поля скорости, она не является системой диффузионного типа; дифференциальный оператор по пространственной переменной y в первом уравнении из (2.4) имеет первый порядок. Как и в [4], стандартным способом [9] можно убедиться, что зацепленная система уравнений для полей скорости и концентрации кроме тривиальных одиннадцатикратных характеристик $x = \text{const} (k_1 \equiv dx : dy = 0)$ имеет еще одну вещественную характеристику, совпадающую с линией тока $k_2 \equiv dx : dy = \langle u \rangle / \langle v \rangle$. Таким образом, дифференциальный оператор «зацепленной» системы уравнений может быть отнесен к слабогиперболическому типу [3].

* Замкнутая система уравнений поля скорости, которая должна быть присоединена к системе (2.4), приведена в [4] и здесь не выписана.

Краевая задача для системы уравнений (2.4) требует (в дополнение к граничным условиям для поля скорости [4]) постановки краевых условий для поля концентрации:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \text{при } y \rightarrow -\infty : \langle \theta \rangle &= 1, \quad S = \langle \theta'^2 \rangle = 0, \\ \text{при } y \rightarrow +\infty : \langle \theta \rangle &= S = \langle \theta'^2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

К краевым условиям (2.5) можно сделать следующее замечание. Поле концентрации в зоне смешения зависит не только от осредненного значения концентрации примеси, но также и от флуктуаций θ во внешнем потоке, движущемся со скоростью U_0 . Поэтому условия $\langle \theta(x, -\infty) \rangle = 1$, $\langle \theta'v'(x, -\infty) \rangle = \langle \theta'^2(x, -\infty) \rangle = 0$ означают, что каждый элемент жидкости во внешнем потоке содержит одну и ту же концентрацию химического компонента и потому там не должно быть флуктуаций. Флуктуации концентрации в зоне смешения являются тогда следствием перемешивания потока с постоянной средней концентрацией примеси в турбулентном поле с градиентом средней скорости. В этой части рассмотрение может быть в дальнейшем усовершенствовано принятием во внимание отличных от нуля начальных флуктуаций поля концентрации во внешнем потоке. В качестве начальных условий в сечении $x=x_0$ задается сглаженная ступенчатая функция для средней концентрации $\langle \theta(x_0, y) \rangle$, а $\langle \theta'v'(x_0, y) \rangle = \langle \theta'^2(x_0, y) \rangle = 0$.

Как и для средних характеристик поля скорости [4], для средних характеристик поля концентрации в условиях задачи следует ожидать автомодельности, которая обнаруживается в эксперименте [5]. Это позволяет обезразмерить пространственные переменные x и y в (2.4) с помощью произвольного линейного масштаба, а при сопоставлении результатов численного решения с экспериментальными данными использовать автомодельную координату $\eta=y/x$ (точнее $\eta=y/(x-x_0)$, где x_0 — условное начало смешения однородного потока с окружающей неподвижной жидкостью).

Разностная схема для системы уравнений поля концентрации строится так же, как и разностная схема для системы уравнений поля скорости в [4]. Все сказанное о разностной схеме в [4] переносится и на разностную схему для системы (2.4). Поскольку «зацепление» системы (2.4) с системой уравнений поля скорости [4] «несущественное», нет влияния со стороны поля концентрации на моменты поля скорости (вследствие предполагаемой «пассивности» примеси), приближенное решение (методом конечных разностей) системы (2.4) может быть построено при известном поле скорости (и его моментах). При этом качество разностной схемы (в смысле затрат машинного времени) может быть несколько повышено за счет применения более экономичного способа обращения матрицы, чем метод обращения с выбором главного элемента. Суть его в том, что коэф. скоро матрицы коэффициентов разностного оператора должны быть невырождены во всей области интегрирования, то нет нужды обращать матрицу, выбирая каждый раз ее главный элемент. Можно проводить обращение матрицы последовательно, по столбцам. Так, например, на разностной схеме (2.1), (2.2) из [4] (обращалась матрица четвертого порядка) такой способ обращения позволил уменьшить время счета примерно в полтора раза по сравнению со случаем, когда обращение матрицы проводилось с выбором главного элемента. Что касается точности обращения матрицы, то численные эксперименты показали, что четыре значащих цифры обратной матрицы совпадают при обоих способах обращения.

Для численных расчетов постоянная a_0 (a_0/α , где α — коэффициент пропорциональности в выражении для масштаба турбулентности $L = \alpha x$ [4]) определена, как и в [4], из опытных данных [10] по диссипации кинетической энергии пульсационного движения ($a_0/\alpha \approx 6$). Отношение «диссипативной» $\frac{3}{4} \frac{a_0}{\alpha}$ и «обменной» c_0/α постоянных принято равным единице. По поводу проводимого ниже сопоставления численных результатов с опытными данными следует заметить, что экспериментальные устройства в [5, 10, 11] конструктивно несколько отличались одно от другого [5], что вело к несколько различным средним характеристикам зоны смешения в автомодельной области. Это относится к профилю средней скорости $\langle u \rangle$ и к ряду вторых моментов поля скорости [10, 11], а также интегральным масштабам турбулентности и так называемой скорости расширения зоны смешения [12], некоторой условной величине, позволяющей дать определенное представление о расширении турбулентной области с расстоянием вниз по потоку. В численных расчетах эта величина оказалась равной 0,17: по данным эксперимента [11] — 0,16, а эксперимента [10] — 0,20. Постоянная b_0 (b_0/α) априори найдена быть не может из-за отсутствия подходящих опытных данных. Для определения численного значения этой постоянной пришлось прибегнуть к ее численной оптимизации, причем в качестве начального приближения можно было воспользоваться грубой оценкой, полученной из следующих соображений. Можно считать экспериментально установленным, что в турбулентном потоке с градиентом средней скорости перенос скалярной примеси происходит быстрее, чем перенос импульса. При градиентном описании диффузионных процессов это различие в механизме переноса может быть качественно охарактеризовано безразмерным параметром — турбулентным числом Шмидта, которое должно быть меньше единицы. Для плоскопараллельного потока из системы уравнений (1.10) [4] и системы уравнений поля концентрации (2.4), пренебрегая конвективными и диффузионными слагаемыми (слагаемыми с третьими моментами), находим

$$\langle u'v' \rangle = - \frac{1}{\left[\frac{c_0}{L} + \frac{3}{4} \frac{a_0}{L} \right]} \frac{\langle v'^2 \rangle}{E^{1/2}} \frac{d \langle u \rangle}{dy},$$

$$\langle \theta'v' \rangle = - \frac{1}{\left[\frac{c_0}{L} + \frac{3}{8} \frac{a_0}{L} + \frac{3b_0}{L} \right]} \frac{\langle v'^2 \rangle}{E^{1/2}} \frac{d \langle \theta \rangle}{dy},$$

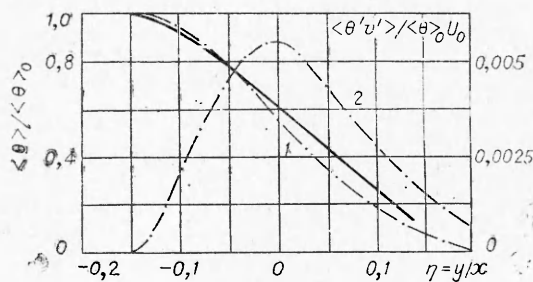
откуда турбулентное число Шмидта

$$(2.6) \quad Sm = \frac{\left[1 + \left(\frac{3}{8} \frac{a_0}{\alpha} \right) \left(\frac{c_0}{\alpha} \right) + \left(\frac{3b_0}{\alpha} \right) \left(\frac{c_0}{\alpha} \right) \right]}{\left[1 + \left(\frac{3}{4} \frac{a_0}{\alpha} \right) \left(\frac{c_0}{\alpha} \right) \right]} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} \left(\frac{b_0}{\alpha} \right) \left(\frac{c_0}{\alpha} \right)$$

(с учетом того, что отношение $\frac{3}{4} \frac{a_0}{\alpha} \frac{c_0}{\alpha}$ принято равным единице). Из (2.6) при принятом отношении $\frac{3}{4} \frac{a_0}{\alpha} \frac{c_0}{\alpha} = \frac{3}{2}$ [4] получаем условие $(b_0/\alpha) \leq \frac{3}{4}$. Уточненное численное значение b_0/α , найденное из условия согласования расчетного профиля дисперсии флуктуаций концентрации $\langle \theta'^2 \rangle$ с экспериментальным [5], равно 0,232. При численной реализации расширенной разностной схемы методом матричной прогонки на внешней границе зоны смешения (на « $+\infty$ ») должен быть известен искомый вектор (прямой ход

прогонки совершается из « $-\infty$ » в « $+\infty$ »), который, согласно краевым условиям на этой границе (2.5) и (1.14) из [4], является нулевым. Однако для системы уравнений типа пограничного слоя, используемой для описания поля течения в зоне смешения, однородным краевым условиям на внешней границе, по-видимому, нельзя удовлетворить, если приближенное решение отыскивается методом конечных разностей. Действительно, характеристика зацепленной системы уравнений для полей скорости и концентрации, совпадающая с линией тока, имеет угол наклона, равный $\arctg \langle v \rangle / \langle u \rangle$, который при $\langle u \rangle \rightarrow 0$ (вблизи внешней границы) принимает экстремально большое значение. В пределе при $\langle u \rangle = 0$ он равен $\pi/2$, линия тока и совпадающая с ней характеристика направлены нормально к оси x . Жидкость «вовлекается» в турбулентную зону из окружающей покоящейся жидкости под прямым углом и, следовательно, $\langle v \rangle \neq 0$. Тем самым вблизи внешней границы нарушается основное предположение приближения пограничного слоя: поперечная составляющая средней скорости течения должна быть много меньше продольной (у внешней границы зоны смешения эти скорости — величины одного и того же порядка). Таким образом, стремление удовлетворить краевому условию $\langle u(x, +\infty) \rangle = 0$ лежит за пределами справедливости уравнений типа пограничного слоя и не может быть корректным. Было найдено, что устойчивое (без каких-либо колебаний) решение вблизи внешней границы может быть получено, если в искомом векторе, имеющем семь компонент, на « $+\infty$ » будет отлична от нуля лишь одна его компонента $\langle u(x, +\infty) \rangle$, равная 0,01.

Численные результаты о моментах поля концентрации химически инертной примеси приведены на фиг. 1, 2, где сплошной линией нанесены опытные данные [5], а штрихпунктирной — численное решение («точки» различной конфигурации на фиг. 2 соответствуют экспериментальным точкам [5]). Цифрой 1 на фиг. 1 помечен автомоделный профиль средней концентрации, а цифрой 2 — поперечная составляющая турбулентного потока примеси $\langle \theta'v' \rangle$, опытных данных для которой в [5] не имеется.



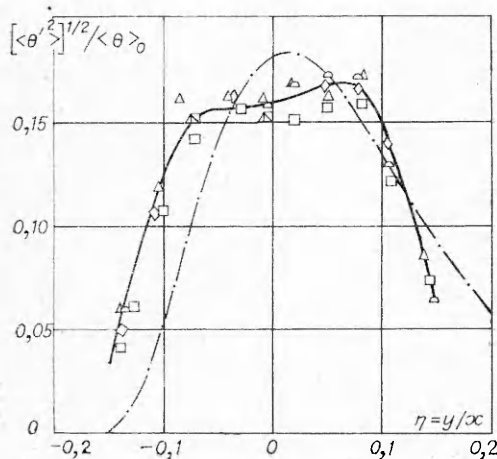
Фиг. 1

В целом совпадение численного решения с экспериментальными кривыми можно считать вполне удовлетворительным.

3. Влияние пассивной химической реакции на поле концентрации в турбулентной зоне смешения. При $\mu \neq 0$ система (2.4) содержит в правой части члены, характеризующие скорость химического превращения соответствующей статистической характеристики поля концентрации, которые для рассматриваемой модельной кинетики имеют вид стоков. После приведения системы (2.4) к безразмерному виду введением характерных масштабов скорости, концентрации и длины в источниковых членах правых частей (характеризующих скорость химического превращения) появляется безразмерный параметр, зависящий от линейного масштаба l и равный отношению характерного времени турбулентной диффузии химического компонента в потоке l/U_0 к характерному времени химической реакции $|1/\mu|$

(3.1)

$$\Gamma = (l/U_0)/(1/\mu).$$



Ф и г. 2

Уравнение сохранения средней концентрации примеси имеет вид

$$(3.2) \quad \langle u \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle \theta' v' \rangle}{\partial y} = \Gamma \langle \theta \rangle.$$

Поскольку рассматривается всего одна примесь, погруженная в несжимаемую химически инертную жидкость, допустимой реакцией (здесь 1-го порядка) будет реакция вида

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial t} \right]_{\text{хим}} = -\mu \theta \quad (\mu > 0),$$

механизм протекания которой (при наложении на внутренней границе зоны смешения при $y \rightarrow -\infty$ краевых условий: $\langle \theta \rangle \rightarrow 1$, $\langle \theta' v' \rangle \rightarrow 0$) должен удовлетворять условию: «константа скорости реакции» μ равна нулю, если $\langle \theta \rangle = 1$, и имеет постоянное значение (отличное от нуля) в противном случае. Химическая реакция возникает тогда в зоне смешения вследствие турбулентного перемешивания основного потока несжимаемой химически инертной жидкости (с погруженной в нее химически активной примесью) с окружающей (покоящейся) средой, играющей роль некоторого «катализатора», инициирующего реакцию. Поскольку химическая реакция в турбулентном потоке зависит от реального времени, все характерные масштабы должны быть заданы априори. Перемешивание турбулентных потоков при наличии в зоне смешения химической реакции рассматривается в идеализированной постановке [4], поэтому характерный линейный масштаб задачи отсутствует. Это связано с тем, что для описания химической реакции в зоне смешения в реальных условиях должны быть известны и реальные начальные условия, включающие в себя знание характеристик пограничного слоя, сходящего с разделительной стенки (см. фиг. 1 в [4]). Идеализация картины смешения (в смысле задания начальных условий) при протекании в потоке химической реакции не дает возможности задать линейный масштаб априори, который бы целиком относился к собственно потоку в зоне смешения. Однако цель рассмотрения влияния химической реакции первого порядка заключается в данном случае лишь в качественном учете этого влияния на моменты поля концентрации, и конкретизация масштаба l в (3.1) представляется необязательной. (Можно было бы взять в качестве масштаба l , например, высоту щели, из которой выходит внешний однородный поток (см. фиг. 1 в [4]), как это иногда делается [13], однако это будет масштаб, не относящийся к собственно течению в зоне смешения.)

При качественном учете эффекта химической реакции неопределенность задания масштаба l будет заключена в параметре Γ , который может принимать постоянные значения от нуля (замороженное течение химически реагирующего потока) до минус бесконечности (химически равновесный случай).

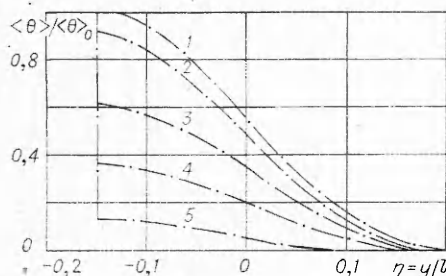
При замыкании системы уравнений поля концентрации типа пограничного слоя на уровне третьих моментов функции Φ_1 и Φ_2 , появляющиеся

ся при этом в соответствующих коэффициентах турбулентной диффузии, имеют вид *

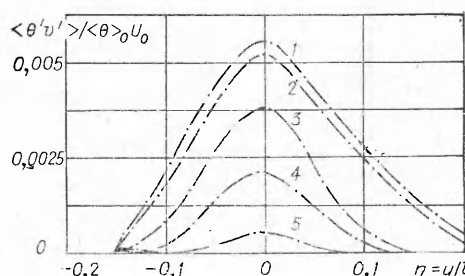
$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= L \left[\frac{3}{4} (a_0 + 4b_0) + c_0 - \Gamma (L/E^{1/2}) \right]^{-1}, \\ \Phi_2(x, y) &= L \left[\frac{3}{8} (a_0 + 16b_0) + c_0 - 2\Gamma (L/E^{1/2}) \right]^{-1}, \end{aligned}$$

и, следовательно, соответствующие коэффициенты турбулентной диффузии оказываются зависящими от члена, характеризующего скорость химического превращения. Этот вывод получен ранее в [14], где рассмотрена модельная задача о турбулентной диффузии скалярной примеси в химически реагирующем следе, когда в уравнении сохранения концентрации были оставлены лишь линейные и 2-го порядка члены в выражении, описывающем скорость химической реакции. Турбулентное поле скорости предполагалось заданным априори. (Использованная автором [14] линейаризация эквивалентна обрыванию цепочки моментных уравнений на уровне вторых моментов с пренебрежением третьими.) Проведенный анализ задачи показал, что член, характеризующий турбулентный перенос скалярной величины $\langle \theta'v' \rangle$, оказывается зависящим от члена, характеризующего скорость химической реакции. Следовательно, и коэффициент турбулентной диффузии, если он может быть введен в химически реагирующем потоке, также будет зависеть от члена, описывающего скорость химического превращения.

Численные результаты об эффекте влияния неравновесной (первого порядка) химической реакции на среднюю концентрацию примеси, поперечную составляющую турбулентного потока примеси и дисперсию флуктуаций концентрации примеси представлены на фиг. 3—5. На этих фигурах кривые соответствуют различным значениям параметра Γ : 1 — $\Gamma = 0$; 2 — $\Gamma = -0,08$; 3 — $\Gamma = -0,5$; 4 — $\Gamma = -0,1 \cdot 10^4$; 5 — $\Gamma = 0,2 \cdot 10^4$. По оси абсцисс на фиг. 3—5 отложена безразмерная поперечная координата y/l , а приведенные кривые соответствуют по координате x области, где наблюдается автомодельность статистических свойств полей скорости и концентрации в отсутствие химической реакции (при $\Gamma = 0$). Химическая реакция приводит с ростом (по абсолютной величине) параметра Γ к уменьшению амплитудных значений $\langle \theta'v' \rangle$, $\langle \theta'^2 \rangle$ и средней концентрации $\langle \theta \rangle$, причем характер убывания на внутренней границе зоны смешения (на « $-\infty$ ») оказывается не гладким, а скачкообразным. Это — следствие в яв-

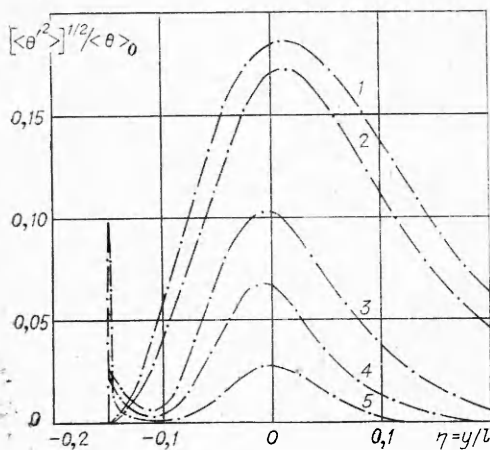


Ф и г. 3



Ф и г. 4

*Функции Φ_1 и Φ_2 , определенные формулами (3.3), должны стоять под знаком производной по y в правых частях последних двух уравнений системы (2.4).



Фиг. 5

ния наложенных на этой границе краевых условий и указанных выше особенностей протекания реакции в зоне смешения. Для $\Gamma \neq 0$ (см. фиг. 3) профиль средней концентрации приобретает почти «ступенчатый» вид, а размер «ступеньки» растет с ростом абсолютной величины параметра Γ . В равновесном пределе при $\Gamma \rightarrow -\infty$, $\langle \theta \rangle \rightarrow 0$ распределение $\langle \theta \rangle$ в поперечном направлении имеет вид ступенчатой функции. Такой характер убывания функции $\langle \theta \rangle$ сказывается на профиле $[\langle \theta'^2 \rangle]^{1/2}$ (см. фиг. 5), вызывая рост функции $[\langle \theta'^2 \rangle]^{1/2}$ с увеличением абсолютной величины параметра Γ , вблизи внутренней границы зоны смешения из-за роста градиента $\partial \langle \theta \rangle / \partial y$ (член $2 \langle \theta' v' \rangle (\partial \langle \theta \rangle / \partial y)$ характеризует собой порождение $\langle \theta'^2 \rangle$ вследствие взаимодействия турбулентных пульсаций с градиентом средней концентрации). Аналогичное поведение обнаруживает и убывание турбулентного потока примеси (см. фиг. 4) с ростом абсолютной величины параметра Γ . Однако поведение функции $\langle \theta' v' \rangle$ вблизи внутренней границы зоны смешения при сохранении тенденции поведения функции $\langle \theta'^2 \rangle$ вблизи этой границы является менее выраженным.

Автор благодарит И. Г. Друкера за полезное обсуждение вопроса о протекании химической реакции в потоке.

Поступила 23 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Онуфриев А. Т. Об уравнениях полуэмпирической теории турбулентного переноса. — ПМТФ, 1970, № 2, с. 62—71.
2. Миллиончиков М. Д. К теории однородной изотропной турбулентности. — Докл. АН СССР, 1941, т. 32, № 9, с. 611—614.
3. Flaschka H., Strang G. The Correctness of the Cauchy problem. — Advances in Mathematics, 1971, vol. 6, N 3. Рус. пер. в сб. пер. иностр. статей. Математика, 1973, 17 : 2, с. 74—97.
4. Курбацкий А. Ф. Численное моделирование процессов турбулентного переноса в зоне перемешивания. — ПМТФ, 1975, № 3.
5. Batt R. G., Kubota T., Laufer J. Experimental investigation of the effect of shear-flow turbulence on a chemical reaction. — In: AIAA Reacting Turbulent Flows Conference, San Diego, California. June 17—18, 1970. (AIAA Paper N 70—721).
6. Chung P. M. Chemical reaction in turbulent flow field with Uniform Velocity gradient. — Phys. of Fluids, 1970, vol. 13, N 5, p. 1153—1165.
7. Roberts P. H. On the application of a statistical approximation to the theory of turbulent diffusion. — J. of Mathem. and Mech., 1957, vol. 6, N 6, p. 781—799.
8. Kraichnan R. H. The closure problem of turbulent theory. — In: Proceedings of Symposium in Applied Mathematics. Vol. 13. Hydrodynamic instability. N. Y., 1962, p. 199—225. Рус. пер. в сб. Гидродинамическая неустойчивость. М., «Мир», 1964, с. 231—264.
9. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
10. Wygnanski I., Fiedler H. E. The two-dimensional mixing region. — J. of Fluid Mech., 1970, vol. 41, pt 2, p. 327—361.

11. *Liepmann H. W., Laufer J.* Investigations of free turbulent mixing. NACA Report N 1257.
12. *Rodi W., Spalding D. B.* A two-parameter model of turbulence and its application to free jets.— In: *Wärme — und Stoffübertragung*. Bd 3. Berlin, Springer — Verlag., 1970, p. 85—95.
13. *Vasilii J.* Turbulent mixing of [a rocket exhaust jet with a supersonic stream including chemical reactions.—*J. Aerospace Sci.*, 1962, vol. 29, N 1, p. 19—28.
14. *Kraichnan R. H.* Turbulent mixing in the chemically reacting wake. Research Council of Alberta. Report (RCA Report) 64—07. (December 1964).

УДК 532.517.4+536.2.023

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛА В ПРИСТЕННОМ ПОТОКЕ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА

П. И. Гешев

(Новосибирск)

Рассмотрен турбулентный перенос тепла в средах с малыми числами Прандтля ($Pr \ll 1$ — жидкие металлы). В этом случае тепловой подслоя в $Pr=1$ раз толще вязкого подслоя. Установлено, что коэффициент турбулентного переноса тепла меняется в тепловом подслое пропорционально второй степени расстояния до стенки; отношение коэффициентов турбулентного переноса тепла и импульса в этой области уменьшается по линейному закону с приближением к стенке. Выводы теории сравниваются с экспериментальными данными других авторов.

Как известно, числа Прандтля для жидких металлов малы: $Pr = \frac{\nu}{\chi} \sim 10^{-2} \dots 10^{-3}$ (ν — кинематическая вязкость, χ — коэффициент молекулярной температуропроводности), а при $\chi \gg \nu$ область влияния молекулярных эффектов переноса тепла («тепловой подслоя») намного превосходит по своим размерам вязкий подслоя, размеры которого определяются масштабом $y_1 = \frac{\nu}{v_*} \left(v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \right.$ — параметр «динамической скорости», τ_w — напряжение трения на стенке, ρ — плотность жидкости). Толщина теплового подслоя при $Pr \ll 1$ определяется масштабом $y_2 = \frac{\chi}{v_*}$ [1]. Вне теплового подслоя в слое постоянного напряжения трения соотношения размерности дают значение $\chi_T(y) = \text{const } v_* y$, где $\chi_T(y)$ — коэффициент турбулентной температуропроводности; y — расстояние до стенки. Поведение функции $\chi_T(y)$ в тепловом подслое определяется согласно уравнению для пульсаций температуры.

1. Рассмотрим турбулентный поток несжимаемой жидкости, текущей над гладкой поверхностью в направлении оси x , ось y направим по нормали к стенке, ось z — перпендикулярно осям x и y . Обозначим через $U(y)$ среднюю скорость потока, через u, v, w — пульсационные составляющие скорости в x, y, z -направлениях соответственно. Турбулентность предполагается статистически стационарной по времени и однородной по координатам x и z .

Ограничимся рассмотрением пристенной области $y \ll L$ (L — внешний масштаб потока), где турбулентность имеет универсальный характер [1,2]. Основные положения теории подобия пристенной турбулентности сформу-