Теплофизика и аэромеханика, *2012*, *том 19*, *№ 1*

КРАТКОЕ СООБЩЕНИЕ

УДК 532.5.013.3:536.25

Осесимметричный конвективный факел в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры

В.А. Шарифулин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

E-mail: vadim.sharifulin@gmail.com

Найдено точное решение уравнений пограничного слоя для ламинарного конвективного факела от точечного источника тепла в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры.

Ключевые слова: точечный источник тепла, пограничный слой, степенная зависимость плотности от температуры, точное решение.

Своеобразным примером конвективной системы с неоднородной стратификацией служит бесконечный слой воды, температура которой близка к 4 °C, над горизонтальной теплоизолированной поверхностью с точечным источником тепла (осесимметричный факел). В этой области температур плотность воды ρ нелинейно зависит от температуры T и в широком диапазоне значений солености, давления и температуры имеет вид [1]:

$$\rho(T) = \rho_m \left(1 - \alpha \left|T - T_i\right|^{\gamma}\right), \tag{1}$$

где ρ_{m} — максимальная плотность, α — коэффициент теплового расширения, T_i — температура инверсии плотности, γ — показатель температурной инверсии плотности.

Задача о конвективном факеле в приближении пограничного слоя в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры решалась численно в [1] для нескольких значений показателя инверсии — γ = 1,5, 1,81 и 2, соответствующих воде при различных давлениях и значениях солености. Были найдены автомодельные преобразования координат, преобразующие уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача для кубической зависимости (γ = 3) была исследована методом разложения по малому параметру и численно в работе [2] без использования приближения пограничного слоя.

Целью настоящей работы является обобщение точного решения, полученного в работе [3], для конвективного факела в жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры, т. е. для $\gamma = 1$, на случай степенной зависимости плотности от температуры в соответствии с (1), когда показателем температурной инверсии γ является произвольное действительное число.

Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет пространство над твердой горизонтальной теплоизолированной плоскостью. Будем считать кинематическую вязкость ν, температуропроводность χ, ускорение свободного падения g постоянными. Зависимость плотности от температуры определяется формулой (1). На плоскости находится точечный источник тепла. Над ним в поле тяжести возникает осесиммитричный конвективный факел. Ось z направлена вверх и совпадает с осью факела, r — радиальная координата, тогда уравнения конвекции в пограничном слое имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(rv_z\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(rv_r\right)=0,\quad v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}=\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+g\alpha T^{\gamma}\theta^{\gamma},$$
$$v_z\frac{\partial \theta}{\partial z}+v_r\frac{\partial \theta}{\partial r}=\frac{\nu}{\Pr}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \theta}{\partial r}\right). \tag{2}$$

Здесь $\Pr=\nu/\chi$ — число Прандтля.

В этих уравнениях v_r и v_z — компоненты скорости, а θ — безразмерная температура, связанная с температурой $T(r,z)$ и температурой вдали от факела $T_\infty = T_i$ следующим соотношением:

$$\theta=\left(T-T_\infty\right)/T_\infty .$$

Граничные условия:

$$\text{при } r=0:\ v_r=\frac{\partial v_z}{\partial r}=\frac{\partial \theta}{\partial r}=0,\quad v_z \text{ конечно;}$$
$$\text{при } r\to\infty:\ v_z\to 0,\quad \theta\to 0. \tag{3}$$

Задача допускает автомодельное предобразование переменных и координат:

$$v_z=\frac{a\nu}{r}z^{\frac{3-\gamma}{4}}f'(\xi), v_r=-\frac{\nu}{r}\left(f(\xi)-\frac{1+\gamma}{4}\xi f'(\xi)\right),$$
$$\theta(z,r)=\sqrt[\gamma]{\frac{a^4\nu}{gaz^{\gamma}}}\,\tau(\xi), \xi=arz^{-(1+\gamma)/4}. \tag{4}$$

Система уравнений движения жидкости в пограничном слое сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [1]:

$$\left(f''-\frac{f'}{\xi}\right)'+\frac{ff''}{\xi}-\frac{ff'}{\xi^2}-\frac{1-\gamma}{2}\frac{\left(f'\right)^2}{\xi}+\xi\tau=0,$$
$$\xi\tau'+\gamma\Pr f\tau=0. \tag{5}$$

Граничные условия:

$$f=f''=\tau'=0,\quad \text{при}\,\xi=0;$$
$$f'/\xi\to 0, \tau\to 0,\ \text{при}\,\xi\to\infty. \tag{6}$$

Будем искать решение системы (5)–(6) в следующем виде [3]:

$$f = \frac{b\xi^2}{b+\xi^2}, \quad \tau = c\left(b+\xi^2\right)^{-1/2\,\mathrm{Pr}\,b}. \qquad (7)$$

Подставив (7) в (5), получаем решение системы в двух случаях:

$$(\mathrm{I}) \quad b = \frac{24}{3+\gamma}, \quad c = 18432\frac{3-\gamma}{(3+\gamma)^3}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{3+\gamma}{4\gamma};$$

$$(\mathrm{II}) \quad b = 4, \quad c = 512(3-\gamma), \quad \mathrm{Pr} = \frac{2}{\gamma}.$$

Константа a выражается через расход жидкости W и тепловой поток E:

$$E = 2\pi\int_0^\infty \left(T(r,z_0) - T_\infty\right) r dr, \quad W = 2\pi\int_0^\infty v_z(z_0, r) r dr,$$

через горизонтальное сечение факела плоскостью $z = z_0$, следующим образом:

$$a = \left(g^2\beta^2\nu\right)^{\frac{1}{2-\gamma}} \left(\sqrt{\frac{E}{2\pi}}\int_0^\infty \tau^\gamma \xi d\xi\right)^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} z_0^{\frac{\gamma(1-\gamma)}{4(2-\gamma)}}, \quad z_0 = \left(\frac{W}{2\pi\nu f(\infty)}\right)^{\frac{2}{1+\gamma}}.$$

Заключение

Найдено точное решение задачи о конвективном факеле в жидкости с температурной инверсией плотности для избранных значений числа Прандтля $\mathrm{Pr} = 2/\gamma$; $(3+\gamma)/4\gamma$ в осесимметричном случае для любых действительных значений показателя инверсии γ. При $\gamma = 1$ решение, полученное в настоящей работе, переходит в решение, полученное в [3].

В заключение автор благодарит своего научного руководителя Т.П. Любимову и В.Н. Штерна, сделавших ряд полезных замечаний.

Список литературы

1. **Gebhart B., Mollendorf J.C.** A new density relation for pure and saline water // Deep Sea Research. 1977. Vol. 24, No. 9. P. 831–848.
2. **Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И.** Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. 336 с.
3. **Brand R.S., Lahey F.J.** The heated laminar vertical jet // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 29, No. 2. P. 305–315.

Статья поступила в редакцию 3 мая 2011 г.