СПЕКТР МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

В. Н. Штерн

(Новосибирск)

В работе [1] изучено поведение спектра собственных значений в общем случае течений в плоскопараллельном канале при малых числах Рейнольдса R. Непосредственный численный расчет спектра малых возмущений для плоских течений Куэтта и Пуазейля, проведенный в работах [2-4], охватывает сравнительно широкий диапазон изменения R, но выполнен для фиксированных значений волнового числа α из довольно узкого диапазона.

В данной работе изучается зависимость спектра собственных значений от волнового числа во всем диапазоне его изменения для случая плоского течения Куэтта.

Задача сводится к отысканию собственных значений уравнения

$$\varphi^{\mathrm{VI}} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi = i\alpha R\,(y - C)\,(\varphi'' - \alpha^2\varphi)$$

$$-1 \leqslant y \leqslant 1,\ \varphi'(\pm 1) = \varphi(\pm 1) = 0 \qquad (1)$$

Здесь $\varphi(y)$ — комплексная амплитуда функции тока возмущенного движения, $C = X + iY$ — искомое собственное значение, X имеет физический смысл фазовой скорости, случай $Y < 0$ соответствует затуханию возмущения.

При малых α поведение спектра собственных значений можно описать зависимостями

$$X_k = 0, \quad Y_k = -\beta_k^2 / \alpha R, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (2)$$

Здесь β_k — занумерованные в порядке возрастания модуля корни уравнения

$$(\beta \operatorname{tg} \beta + \alpha \operatorname{th} \alpha)(\alpha \operatorname{tg} \beta - \beta \operatorname{th} \alpha) = 0 \qquad (3)$$

При больших α для всех спектральных номеров выполняется асимптотическая зависимость

$$Y_k = -\alpha / R, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (4)$$

Таким образом, роль непосредственного численного расчета сводится к заполнению «пробела» между областями, где справедливы зависимости (2) и (4). Расчеты проводились на БЭСМ-6 с использованием метода пошагового интегрирования [5], модифицированного для несимметричных профилей скорости.

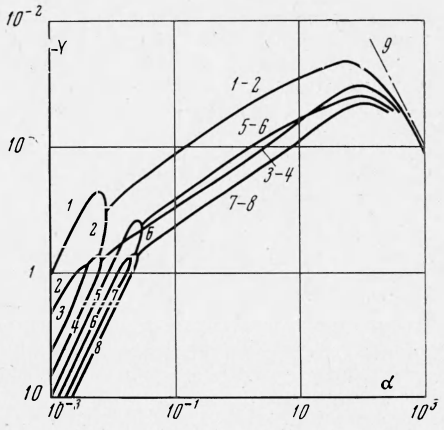
На фиг. 1 представлены зависимости $Y_k(\alpha)$ для $R = 10^4$, $k = 1, \ldots, 8$. Линия *9* соответствует зависимости (4). На фиг. 2 показано расположение собственных значений на комплексной плоскости $C = X + iY$ при изменении α. Линия $X = 0$ — ось симметрии.

В соответствии с общими закономерностями [1] для малых α возмущения затухают, оставаясь монотонными ($X = 0$). При некоторых α появляются точки краткости собственных значений, после чего возмущения начинают носить волновой характер, причем возникает пара волн, имеющих общий характер затухания Y и фазовую скорость $|X|$, но бегущих в противоположных направлениях. Поскольку собственная функция обычно отлична от нуля лишь в малой окрестности точки $y_c = X$, то волны распространяются каждая в своей половине потока.

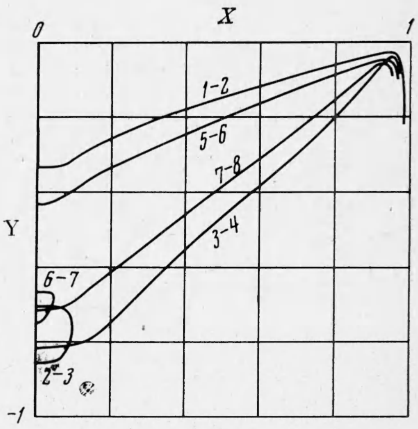
Однако структура спектра здесь сложнее по сравнению со случаями, рассмотренными в работах [2-4], и обнаруживаются новые интересные эффекты, связанные с точками кратности. После точки кратности второго и третьего собственных значений при $\alpha = 0.0038$ для этой пары с ростом α сначала $|X|$ растет, но затем вновь убывает до нуля при $\alpha = 0.0057$, где второе и третье собственные значения опять имеют точку кратности, далее разделяются и становятся чисто мнимыми. С увеличением α далее Y_3 уменьшается до точки кратности третьего собственного значения с четвертым (до этого бывшим чисто мнимым) при $\alpha = 0.006$ и затем образуется комплексно-сопряженная пара декрементов iC_k ($k = 3, 4$). Несколько позднее при $\alpha = 0.008$ происходит слияние второго и первого собственных значений, после чего образуется комплексно-сопряженная пара iC_k ($k = 1{,}2$).

В дальнейшем никаких перестроек эта четверка собственных значений не претерпевает. Для всех k $|X|_k$ растут и при $\alpha \to \infty$ стремятся к единице, т. е. возмущения локализуются у стенок. При этом $Y_{1,2}$ и $Y_{3,4}$ также растут, достигают максимальных значений — 0.021 и —0.033 при α, равных 59 и 105 соответственно, а затем убывают и выходят на асимптотическую зависимость (4).

Аналогичным образом ведет себя другая четверка собственных значений $k = 5, 6, 7, 8$. Характерно, что если при средних значениях α наблюдается пересечение зависимостей $Y_k(\alpha)$ для разных k, то, приближаясь к асимптотической зависимости (4), декременты вновь выстраиваются в том же порядке, что и при малых α. На фиг. 2 видно, что точки, в которых Y достигает наибольшего значения



Фиг. 1



Фиг. 2

для всех спектральных номеров k, лежат в окрестности $C = \pm 1$. Расчеты показывают, что точки $C = \pm 1$ будут предельными для собственных значений при произвольных фиксированных α и k и при $R \to \infty$.

Поступила 15 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
2. Gallagher A. P., Mercer A. McD. On the behavior of small disturbances in plane Couette flow, pt. 2. Higher eigenvalues. J. Fluid Mech, 1964, vol. 18, pt 3, pp. 350—352.
3. Бирих Р. В. О спектре малых возмущений плоскопараллельного течения Куэтта. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
4. Grosch C. E., Salwen H. The stability of steady and time—dependent plane Poiseuille flow. J., Fluid Mech., 1968, vol. 34, pt 1, pp. 177—205.
5. Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии поля массовых сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.

ВЛИЯНИЕ КОНЦЕВЫХ ИМПЕДАНСОВ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ АКУСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

В. А. Груздев, В. И. Слабняк

(Новосибирск)

Для исследования скорости распространения звука в газах часто используют акустический резонатор (труба, закрытая на одном конце излучателем, на другом — приемником звука). Влияние импеданса излучателя Z_0 и приемника Z_L на собственные частоты резонатора обычно учитывают введением эффективной длины резонатора, которая определяется из тарировочных опытов. Однако это не всегда приводит к правильным результатам, так как Z_0 и Z_L, а следовательно, и эффективная длина резонатора зависят не только от конструкции излучателя и приемника звука, но и от условий опыта и рода исследуемого газа.