УДК 536.421

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ПЕРВОГО РОДА В ДЕФОРМИРУЕМОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

И. Г. Гетц, А. М. Мейрманов, Н. В. Шеметов
(Новосибирск)

Предположим, что изучаемая сплошная среда может быть описана с помощью средних величин и для них справедливы законы сохранения массы, импульса и энергии [1]

(1) $$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0;$$

(2) $$\partial/\partial t(\rho\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} - \mathbf{P}) = \rho\mathbf{f};$$

(3) $$\partial/\partial t(\rho(U + (1/2)|\mathbf{v}|^2)) + \\ + \operatorname{div}(\rho(U + (1/2)|\mathbf{v}|^2)\mathbf{v} - \varkappa\Delta\Theta - P\langle\mathbf{v}\rangle) = \rho f\cdot\mathbf{v} + \rho g$$

всюду в области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, занятой средой при всех значениях времени t из интервала $(0, T)$, в каком бы состоянии не находилась сплошная среда. Здесь ρ — плотность; $\mathbf{v}$ — скорость; P — симметричный тензор напряжений; U — удельная внутренняя энергия; Θ — температура; $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности; $\mathbf{f}$ — плотность внешних массовых сил; g — плотность внутренних источников тепла. Уравнения (1)—(3) имеют форму абстрактного закона сохранения $\partial A/\partial t + \operatorname{div}(A\mathbf{v} - \varphi) = X$, и для функций A, $\mathbf{v}$, φ, терпящих разрывы первого рода, их надо понимать как интегральные тождества $\iiint\limits_{\Gamma}(A(\mathbf{l} + \mathbf{v}) - \varphi)\mathbf{v}d\Gamma = \iiiint\limits_{G} XdG$, справедливые для произвольного объема G четырехмерной области $\Omega_T = \Omega\times(0, T)$ с гладкой границей Γ, с ортом внешней нормали $\mathbf{v}$ ($\mathbf{l}$ — орт оси времени).

Легко видеть, что система (1)—(3) незамкнутая. Если бы среда находилась в каком-то одном состоянии, то она замыкалась бы уравнениями состояния и аксиомами термодинамики. Например, упругие деформируемые состояния сплошной среды полностью описываются тождеством Гиббса

(4) $$\Theta dS = dU - (1/\rho)P(I - 2E)^{-1} : dE$$

и уравнением состояния, определяющим свободную энергию $F = U - \Theta S$ как известную изотропную функцию термодинамических параметров E и Θ, где $E = (1/2)(I - T^{-1}T^{*-1})$ — эйлеров тензор деформаций, T — тензор дисторсии [1]. Применительно к системе (1)—(3) указанная конструкция определяет зависимости $P = P(E, \Theta)$ (например, закон Дюамеля — Неймана) и $U = U(E, \Theta)$.

Чтобы яснее изложить суть дальнейших рассуждений, ограничимся на время одной пространственной переменной. В этом случае тождество Гиббса записывается либо в виде $\Theta dS = dU - pdV$ ($V = 1/\rho$ — удельный объем, p — напряжение), либо как

(5) $$d\Phi = -Sd\Theta - Vdp$$

($\Phi = U - \Theta S - pV$ — термодинамический потенциал Гиббса). Если Φ есть известная функция независимых параметров Θ и p, то $S = -\partial\Phi/\partial\Theta$, $V = -\partial\Phi/\partial p$.

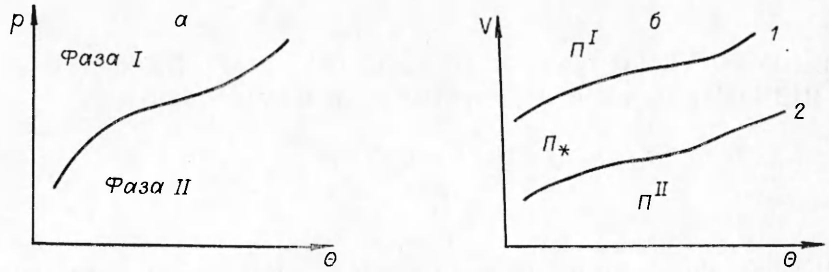

Рис. 1

Пусть среда находится в двух различных состояниях (фазах I и II), в каждой фазе известна зависимость потенциала Ф от Θ и p. Для двухпараметрических сред феноменологическое описание фазовых переходов первого рода достаточно подробно изложено в [2], и, следуя принятой там аксиоматике в области независимых термодинамических переменных Θ и p, можно выделить области, соответствующие каждой фазе. Согласно первому постулату, в точках соприкосновения различных фаз сплошной среды напряжение и температура среды непрерывны. Это значит, что в плоскости переменных Θ и p области, отвечающие различным фазам, имеют общую границу, называемую линией фазового равновесия. Конкретный вид линии фазового равновесия определяется из условия непрерывности термодинамического потенциала Гиббса в точках фазового равновесия: $\Phi^{\mathrm{I}}(\Theta,\ p) = \Phi^{\mathrm{II}}(\Theta,\ p)$, что составляет содержание второго постулата. Примерный вид линии фазового равновесия приведен на рис. 1, *а*. Если уравнение этой линии $\Theta = \Theta_*(p)$, то функцию $\Theta_*(p)$ обычно называют температурой плавления. Термин «равновесная термодинамика» применительно к нашему случаю означает, что значениям параметров Θ и p, лежащим выше линии фазового равновесия, всегда отвечает фаза I, а ниже — фаза II. Зная в каждой фазе зависимости U и V от Θ и p (возможно, негладкие при переходе через линию фазового равновесия), можно формально замкнуть систему (1)—(3).

На самом деле предложенная конструкция не полностью замыкает систему (1)—(3). Этот факт поясним на простом примере однопараметрической среды, когда не учитывается ее движение. Модель, описывающая фазовые переходы в среде, где единственный независимый термодинамический параметр — температура, называется задачей Стефана. Как правило, она формулируется не как задача об определении решения интегрального тождества, соответствующего закону сохранения энергии, в котором скорость положена равной нулю, а плотность — известной постоянной (такое решение называется обобщенным), а как следствие этого тождества, когда заранее предполагается известной структура решения. А именно считается, что решение обладает сильным разрывом, т. е. в области изменения физических переменных $(x,\ t)$ существует достаточно гладкая поверхность Γ (ее предстоит определить в процессе решения), разбивающая область Ω_T на две подобласти, каждая из которых занята только одной фазой. Если зависимость U от Θ линейная всюду вне точки плавления $\Theta = \Theta_*$, где функция U не определена и терпит разрыв первого рода, то из интегрального тождества следует, что в каждой выделенной подобласти Ω_T температура удовлетворяет уравнению теплопроводности, возможно, неоднородному. Из того же интегрального тождества вытекает и условие на поверхности Γ [1], так называемое условие Стефана. Уравнения в каждой подобласти, условия Стефана, условия термодинамического равновесия $\Theta = \Theta_*$ на границе Γ, начальные условия и условия на границе области Ω образуют классическую постановку задачи Стефана. Соответствующее решение обычно называют классическим. Очевидно, что всякое классическое решение будет и обобщенным, по обратное, вообще говоря, неверно.

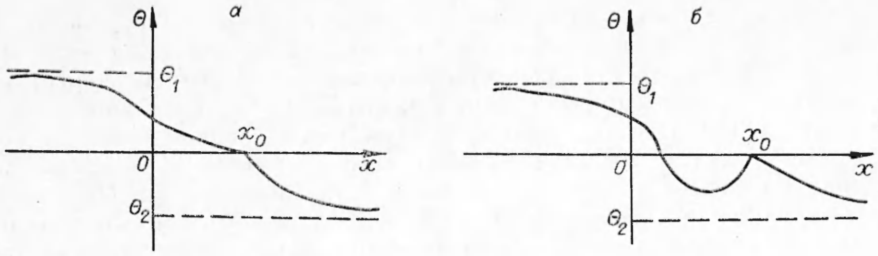

Рис. 2

В качестве примера рассмотрим задачу об остывании бесконечного цилиндрического слитка с температурой плавления $\Theta_* = 0$, который выдвигается с постоянной скоростью v_0 из муфеля печи, занимающего полупространство $x < 0$ и имеющего постоянную температуру $\Theta_1 > 0$, в охладитель, занимающий полупространство $x > 0$ и имеющий температуру $\Theta_2 = \mathrm{const} < 0$ [3, с. 193]. В предположении, что на боковой поверхности слитка задано условие теплоотвода $\partial\Theta/\partial n = \gamma(\varphi - \Theta)$ ($\varphi = \Theta_1$ при $x < 0$ и $\varphi = \Theta_2$ при $x > 0$), что температура слитка постоянна па сечениях, ортогональных оси слитка, и что в системе координат, связанной с неподвижным муфелем, процесс стационарный, классическая постановка задачи Стефана имеет вид (все встречающиеся постоянные для простоты изложения положим равными единице)

$$v_0 d\Theta/dx - d^2\Theta/dx^2 + \Theta = \varphi,\ x \neq x_0, \tag{6}$$

$$\Theta(x_0) = 0,\ d\Theta/dx(x_0 - 0) - d\Theta/dx(x_0 + 0) = v_0,\ \lim_{|x|\to\infty} |\Theta - \varphi| = 0.$$

При $\Theta_1 + \Theta_2 > 0$ решение $\Theta(x)$ и x_0 сформулированной задачи выписывается явно и при $v_0 \leqslant v_* = |\Theta_2|(1 + |\Theta_2|)^{-1/2}$ отвечает исходной гипотезе о структуре решения (рис. 2, *а*): $\Theta(x) > 0$ при $x < x_0$, $\Theta(x) < 0$ при $x > x_0$. Если же $v_0 > v_*$, то у решения появляется особенность (рис. 2, *б*): существует точка x_1 такая, что в интервале (x_1, x_0) функция Θ строго отрицательная. Поскольку точка x_0 — граница раздела фаз и левее ее всегда расположена жидкая фаза, то на первый взгляд может показаться, что задача (6) описала такое сложное явление, как переохлаждение. Но математическая модель описывает только то, что заложено в нее физическими аксиомами. А задача Стефана формулируется исходя из аксиом равновесной термодинамики, в которой жидкой фазе всегда отвечают только точки сплошной среды с температурой, большей или равной температуре плавления. Где же тогда ошибка? Ошибка была заложена в математической гипотезе о структуре решения при переходе от обобщенной постановки в виде интегрального тождества к классической в форме (6).

Прежде чем анализировать исходное интегральное тождество, необходимо корректно определить его решение. Для рассматриваемой задачи о слитке интегральное тождество имеет вид

$$(v_0 U - d\Theta/dx)\,\Big|_a^b + \int_a^b (\Theta - \varphi)dx = 0, \tag{7}$$

где (a, b) — произвольный интервал $-\infty < a < b < \infty$. Тождество (7) содержит искомые функции U и Θ и замыкается уравнением состояния, в котором U — известная гладкая функция температуры Θ, не определенная при $\Theta = \Theta_*$ и терпящая там разрыв первого рода. А как найти U, если область, занятая сплошной средой, имеет нулевую температуру? Ведь мы предположили, что любое состояние сплошной среды можно описать с помощью средних величин. Возможны два способа. Первый отражает чисто математический прием [4]: считается, что в этом состоянии энергия U может принимать любое значение из интервала $[U(\Theta_* - 0), U(\Theta_* + 0)]$ ($U(\Theta_* \pm 0)$ — предельные значения внутренней энергии соответственно слева и справа от точки разрыва $\Theta = \Theta_*$); второй — чисто физический [5]: считается, что в этом состоянии в каждой точке сплошной среды сосуществуют обе фазы и все термодинамические величины непрерывно зависят от нового параметра — доли жидкой фазы. Оказывается, в рамках равновесной термодинамики эти способы эквивалентны и в их основе лежит самостоятельная физическая аксиома: существуют состояния сплошной среды, в которых Θ тождественно равна Θ_*, а U принимает все значения из интервала $[U(\Theta_* - 0), U(\Theta_* + 0)]$.

Естественно назвать такое состояние среды и фазу, отличную от жидкой и твердой, переходными. После принятых соглашений корректно находится обратная зависимость температуры от внутренней энергии: Θ гладким образом зависит от U всюду вне интервала $[U(\Theta_* - 0), U(\Theta_* + 0)]$ (например, линейно), тождественно равна Θ_* на этом интервале и непрерывна при всех значениях U. В терминах функции U легко различать фазы даже при $\Theta = \Theta_*$: жидкой фазе отвечают значения $U \geqslant U(\Theta_* + 0)$, твердой — $U \leqslant U(\Theta_* - 0)$, переходной — $U(\Theta_* - 0) < U < U(\Theta_* + 0)$. Если теперь под решением тождества (7) понимать U, то все величины, образующие тождество, определены корректно. Детальный анализ тождества (7) показывает, что при $v_0 > v_*$ его единственное решение описывает жидкую фазу при $x \leqslant x_1$, твердую — при $x \geqslant x_2$, переходную — при $x_1 < x < x_2$ [3, с. 218].

Таким образом, для того чтобы корректно решить поставленную задачу, пришлось развернуть точку $\Theta = \Theta_*$ в пространстве независимой Θ в целый отрезок переходного состояния, введя новую независимую термодинамическую переменную — удельную внутреннюю энергию U.

Возвращаясь к исходной системе уравнений движения сплошной среды, в случае одной пространственной переменной видим, что кривую фазового равновесия в плоскости термодинамических переменных Θ и p можно рассматривать как складку, в которой спрятано переходное состояние. Эта складка разглаживается, если перейти к новым независимым переменным Θ и V либо U и p. Предположим, что линию фазового равновесия (см. рис. 1, *а*) можно задать в виде $p = p_*(\Theta)$, и рассмотрим новые независимые переменные Θ и V. В области изменения этих переменных фазе I соответствуют точки области Π^{I}, лежащие выше кривой *1* ($V = V_*^{\mathrm{I}}(\Theta)$), фазе II — точки области Π^{II}, лежащие ниже кривой *2* ($V = V_*^{\mathrm{II}}(\Theta)$), а переходной фазе — точки из области Π_*, лежащие между указанными кривыми (см. рис. 1, *б*). Конкретный вид кривых $V_*^{\mathrm{I}}(\Theta)$ и $V_*^{\mathrm{II}}(\Theta)$ получится, если в уравнения состояния $V = V^{\mathrm{I}}(p, \Theta)$ и $V = V^{\mathrm{II}}(p, \Theta)$ в каждой чистой фазе подставить значения $p = p_*(\Theta)$. На возможность такого описания переходного метастабильного состояния указывали авторы [2, с. 310], считая независимыми переменными V и Θ. Конечно, в реальных ситуациях переходное состояние, если оно возникает, неустойчиво, но поскольку один из основных принципов феноменологической теории механики сплошной среды — предположение о возможности описания любого состояния сплошной среды с помощью средних величин, то необходимость замыкания рассматриваемой модели фазовых переходов диктует полное описание переходной фазы.

Напомним, что предположение о существовании переходной фазы, позволяющее развернуть складку, идущую вдоль линии фазового равновесия в плоскости переменных Θ и p, первое из вновь вводимых постулатов модели. Второй постулат, не вызывающий возражений (поскольку он отражает закон сохранения энергии),— предположение о справедливости тождества Гиббса (5) и в переходной фазе. Третий постулат предполагает непрерывность термодинамического потенциала Φ всюду в области Π изменения переменных Θ и V.

Оказывается, второй и третий постулаты полностью определяют Φ, U, S, p, F как функции независимых параметров Θ и V всюду в области Π_*. В самом деле, каждой точке M на линии фазового равновесия $p = p_*(\Theta)$ соответствует отрезок $I(\Theta) = \{(\Theta, V) \in \Pi_* | \Theta = \text{const}\}$ в области Π_* переменных Θ и V, вдоль которого $p = p_*(\Theta) = \text{const}$ и $\Phi = \text{const}$. Последнее вытекает из тождества Гиббса (5) в Π_*. Условие непрерывности функции Φ всюду в Π единственным образом определяет ту постоянную, которой она равна на отрезках $I(\Theta)$. Плотность свободной энергии $F = \Phi + pV$ непрерывна всюду в Π как комбинация непрерывных функций. Если $F^{\mathrm{I}}(V_*^{\mathrm{I}}(\Theta), \Theta)$ и $F_*(V_*^{\mathrm{I}}(\Theta), \Theta)$ есть предельные значения функции $F(V, \Theta)$ па кривой $V = V_*^{\mathrm{I}}(\Theta)$ соответственно из области Π^{I} и Π_*, то, дифференцируя равенство $F^{\mathrm{I}}(V_*^{\mathrm{I}}(\Theta), \Theta) = F_*(V_*^{\mathrm{I}}(\Theta), \Theta)$ и используя соотношения $S = -\partial F/\partial\Theta$, $p = \partial F/\partial V$, получим, что и энтропия S непрерывна при переходе через линию $V = V_*^{\mathrm{I}}(\Theta)$. Аналогично рассматривается линия $V = V_*^{\mathrm{II}}(\Theta)$. Непрерывность U всюду следует из представления $U = \Phi + \Theta S + pV$.

Итак, если плотность свободной энергии F известна в областях Π^{I} и Π^{II}, то она известна всюду в области Π и непрерывна там вместе со своими производными $\partial F/\partial\Theta = -S$ и $\partial F/\partial V = p$.

В закон сохранения энергии (3) входит коэффициент теплопроводности $\varkappa$, который можно найти в каждой фазе (I или II), т. е. считать заданной функцией переменных Θ и p, возможно, терпящей разрыв первого рода при переходе через линию фазового равновесия $p = p_*(\Theta)$. Трудно привести какие-либо аргументы, позволяющие определить его в области Π_* новых переменных Θ и V, поэтому будем считать $\varkappa$ непрерывной функцией параметров Θ и V всюду в области Π, линейно зависящей от V на отрезках $I(\Theta)$ в Π_*. Так, например, поступают авторы [5] при определении характеристик двухфазной зоны В. Т. Борисова. Последнее предположение четвертое из вновь вводимых постулатов и полностью замыкает модель фазовых переходов в деформируемой упругой среде в случае одной пространственной переменной. Исходные постулаты модели хорошо согласуются с экспериментальными данными о связи давления с деформацией во всем интервале изменения деформаций при фазовых переходах первого рода в металлах [6, с. 540].

Принципы, положенные в основу математической модели фазовых переходов первого рода с одной пространственной переменной, полностью переносятся на большее число измерений. Правда, в общем случае число независимых термодинамических параметров деформируемой упругой среды больше двух, и для замыкания модели сверх уже введенных нужны дополнительные аксиомы. Всюду ниже ограничимся малыми деформациями среды, линейной зависимостью тензора напряжений от тензора деформаций и линеаризованным вариантом тождества Гиббса

$$\Theta dS = dU - P : dE. \tag{8}$$

Тождество (8), записанное для плотности свободной энергии $F = U - \Theta S$

$$dF = -S d\Theta + P : dE, \tag{9}$$

предположение об изотропной зависимости F от тензора деформации E и линейная связь между тензором напряжений и деформацией означают, что в каждой фазе уравнение состояния $F = F(\Theta, e_1, e_2)$ ($3e_1 = \operatorname{tr} E$, $(9/2)e_2^2 = 3E : E - (\operatorname{tr} E)^2$) и тождество (9) полностью определяют термодинамическое состояние среды как функцию трех независимых параметров: Θ, e_1, e_2. Следовательно, каждая фаза — трехпараметрическая среда, и естественно фазу, переходную между двумя наблюдаемыми, считать также трехпараметрической средой.

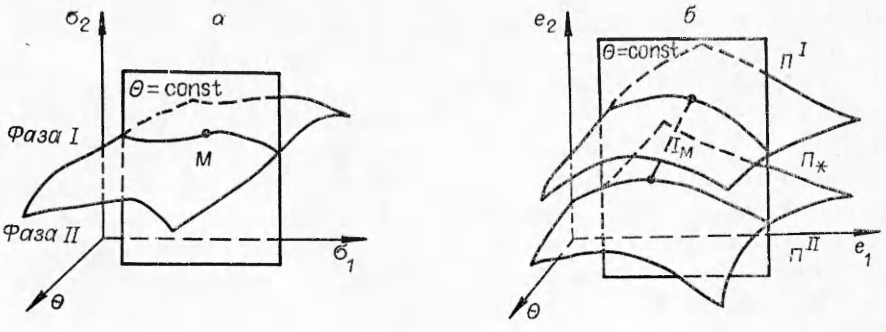

Рис. 3

Выберем в качестве независимых параметров термодинамического состояния среды температуру Θ и инварианты $\sigma_1 = (1/3)\operatorname{tr} P$, $\sigma_2 = (1/\sqrt{2})\sqrt{3P : P - (\operatorname{tr} P)^2}$ тензора напряжений. Если предположить, что в точке сплошной среды, где соприкасаются различные фазы, непрерывны Θ и σ_1, σ_2, то в пространстве независимых термодинамических параметров $(\Theta, \sigma_1, \sigma_2)$ равновесному состоянию отвечает поверхность фазового равновесия, разделяющая области, точки которых определяют различные фазы. Конкретный вид поверхности фазового равновесия получается, если потребовать непрерывность $\Phi = U - \Theta S - P : E$ в точках соприкосновения фаз:

$$\Phi^{\mathrm{I}}(\Theta, \sigma_1, \sigma_2) = \Phi^{\mathrm{II}}(\Theta, \sigma_1, \sigma_2).$$

Предположим, что поверхность Γ фазового равновесия задается уравнением (рис. 3, *а*)

$$\sigma_2 = \varphi(\sigma_1, \Theta). \tag{10}$$

Согласно ранее изложенным принципам, вводя новые независимые термодинамические переменные Θ, e_1 и e_2, развернем поверхность фазового равновесия Γ в область переходного состояния Π_*, отделяющую области Π^{I} и Π^{II}, соответствующие фазам I и II (рис. 3, *б*). Постулат о справедливости тождества Гиббса

$$d\Phi = -Sd\Theta - 3e_1 d\sigma_1 - e_2 d\sigma_2, \tag{11}$$

записанного для термодинамического потенциала Φ и инвариантов тензоров напряжений и деформаций, или того же тождества, но записанного для плотности свободной энергии

$$dF = -Sd\Theta + 3\sigma_1 de_1 + \sigma_2 de_2,$$

и постулаты о непрерывности потенциала Φ и давления σ_1 всюду в области Π изменения термодинамических параметров Θ, e_1 и e_2 полностью определяют зависимые термодинамические переменные Φ, F, U, S, σ_1, σ_2 в переходной фазе.

В самом деле, рассмотрим сечения множества Π_* плоскостями $\{\Theta = \mathrm{const}\}$ в виде

$$Q_\Theta = \{(e_1, e_2, \Theta) \in \Pi_* \mid \Theta = \mathrm{const}\}.$$

Как известно [7], для почти всех значений a множества уровня $\{\Phi_*(e_1, e_2, \Theta) = a\}$ представляют собой конечное число гладких спрямляемых кривых, либо замкнутых, либо с концами, выходящими па границы множества I_Θ, разделяющих множества

$$\{\Phi(e_1, e_2, \Theta) > a\}, \{\Phi(e_1, e_2, \Theta) < a\}$$

и таких, что

$$(\partial\Phi_*/\partial e_1)^2 + (\partial\Phi_*/\partial e_2)^2 > 0$$

($\Phi_*(e_1, e_2, \Theta)$ — значение Φ в области Π_* предполагается как минимум дважды непрерывно дифференцируемой функцией). Покажем, что все связанные компоненты множества уровня на самом деле есть отрезки прямых, соединяющих различные берега сечения Q_Θ. Перечисленные свойства линий уровня позволяют ввести в малой окрестности каждой связной компоненты множества уровня криволинейные координаты (ξ, η), где $\xi = \Phi_*(e_1, e_2, \Theta)$. Обращаясь к тождеству (11) и равенству (10), видим, что в каждой окрестности $\sigma_1 = \sigma_1(\xi)$. Из этих же соотношений вытекает равенство $1 = d\Phi_*/d\xi = -[3e_1 + e_2\partial\varphi(\sigma_1(a), \Theta)/\partial\sigma_1]\ (d\sigma_1(a)/d\xi)$ на линиях уровня $\{\Phi_* = a\}$. Таким образом, вдоль каждой связной компоненты линии уровня линейная комбинация независимых переменных e_1 и e_2 постоянна.

Если M — точка на поверхности фазового равновесия Γ в пространстве переменных $(\sigma_1, \sigma_2, \Theta)$, I_M — отрезок в Π_*, соответствующий M при отображении $(\sigma_1, \sigma_2, \Theta) \to (e_1, e_2, \Theta)$, то $\Phi_*(e_1, e_2, \Theta) = \Phi^{\mathrm{I}}(M) = \Phi^{\mathrm{II}}(M)$, $(e_1, e_2, \Theta) \in I_M$. По потенциалу Φ единственным образом восстанавливается плотность свободной энергии F, также являющаяся непрерывной функцией независимых термодинамических переменных (e_1, e_2, Θ) всюду в области Π. Кроме того, непрерывны в Π и производные функции F по переменным e_1, e_2 и Θ, поскольку производные $\partial F/\partial e_1 = 3\sigma_1$ и $\partial F/\partial e_2 = \sigma_2$ непрерывны по построению, а непрерывность производной $\partial F/\partial\Theta = -S$ доказывается аналогично одномерному случаю. Замыкает построение модели постулат о непрерывности коэффициента теплопроводности $\varkappa$ всюду в области Π и линейной зависимости $\varkappa$ в Π_* от переменной e_1 вдоль отрезков прямых, на которых $\Phi_* = \mathrm{const}$.

Возвращаясь к модели в целом, заметим, что непрерывность Θ, σ_1 и Φ в точках соприкосновения фаз не вызывает возражений, в то время как постулат о непрерывности σ_2 не подкрепляется никакими дополнительными теоретическими рассуждениями или экспериментальными фактами. Авторам не известны работы теоретического или экспериментального характера, где бы анализировались равновесные фазовые переходы в трехпараметрических деформируемых упругих средах, в частности строились бы поверхности фазового равновесия в пространстве независимых термодинамических переменных. Тем не менее, исходя из структуры тождества Гиббса (11) и проводя аналогию с многокомпонентными средами [2], где под знаком дифференциала в тождестве Гиббса стоят химические потенциалы компонентов смеси и температуры, непрерывные при изменении агрегатного состояния среды, естественно требовать непрерывность в точках фазового равновесия всех термодинамических переменных, стоящих под знаком дифференциала в тождестве (11), в том числе и инварианта σ_2. Поскольку в переходной зоне на линиях уровня потенциала Φ изменение деформаций носит пластический характер, то косвенным подтверждением правильности модели является факт существования пластической зоны между двумя чистыми фазами при твердофазных превращениях [8].

З а м е ч а н и е. 1. Полностью аналогично случаю одной пространственной переменной строится модель фазовых переходов в идеальных двухпараметрических средах с шаровым тензором напряжений.

З а м е ч а н и е 2. Вопрос о виде начальных и краевых условий диктуется внутренней структурой дифференциальных уравнений, и постановка начально-краевых задач — предмет отдельного обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Введение в механику сплошных сред // Учебное пособие для студентов НГУ.— Новосибирск: НГУ, 1977.— Ч. I, II.
2. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Статистическая физика.— М.: Наука, 1964.
3. **Мейрманов А. М.** Задача Стефана.— Новосибирск: Наука, 1986.
4. **Олейник О. А.** Об одном методе решения общей задачи Стефана // ДАН СССР.— 1960.— Т. 135, № 5.
5. **Борисов В. Т., Виноградов В. В., Тяжельникова И. Л.** Квазиравновесная теория двухфазной зоны и ее применение к затвердеванию сплавов // Изв. вузов. Черн. металлургия.— 1977.— № 5.
6. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Физматгиз, 1963.
7. **Кронрод А. С.** О функциях двух переменных // УМН.— 1950.— Т. 5, вып. 1.
8. **Чупахин А. П., Сидельников А. А., Болдырев В. В.** Влияние возникающих при твердофазных превращениях механических напряжений на их кинетику // Изв. СО АН СССР. Сер. хим. наук.— 1985.— Вып. 6.

Поступила 20/I 1987 г.

УДК 532.526

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛАХ ПРИ СИЛЬНОМ ВДУВЕ

С. В. Пейгин, Б. Ф. Филоненко
(Томск)

Исследование нестационарного тепло- и массообмена при течении сжимаемого газа около затупленных тел с проницаемой поверхностью необходимо для решения многих прикладных задач. В частности, такие задачи возникают при принудительном, зависящем в общем случае от времени выдувании газа через пористую либо перфорированную поверхность с целью организации газовой завесы. Аналогичные вопросы возникают также при рассмотрении ряда устройств химической технологии в различных режимах их работы.

В связи с этим в литературе имеется ряд работ, в которых как приближенными аналитическими [1, 2], так и численными методами [3—5] изучались нестационарные процессы, происходящие в ламинарных плоских либо осесимметричных пограничных слоях в сжимаемом газе на непроницаемой поверхности. Влияние вдува (отсоса) на характеристики нестационарного двумерного пограничного слоя рассматривалось в [6, 7]. Вопросы нестационарного теплообмена в окрестности критической точки двоякой кривизны освещены в [8, 9], а влияния интенсивного вдува на основные характеристики стационарного течения в пространственном ламинарном пограничном слое — в [10—13].

В настоящей работе в широком диапазоне изменения определяющих параметров задачи получены численные и асимптотические решения уравнений нестационарного пространственного ламинарного пограничного слоя на проницаемой поверхности, в том числе для случая сильного вдува.

1. Постановка задачи. Рассмотрим пространственное нестационарное обтекание сверхзвуковым потоком газа затупленных тел с проницаемой поверхностью при больших числах Рейнольдса Re набегающего потока. Выберем невырожденную криволинейную систему координат (x^1, x^2, x^3) с началом в критической точке, нормально связанную с обтекаемой поверхностью: $x^3 = \mathrm{const}$ — семейство поверхностей, параллельных поверхности тела ($x^3 = 0$), x^1 и x^2 — криволинейные координаты на поверхности.