УДК 531.01;539.3

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Г. В. Дружинин, Н. М. Бодунов

Казанский государственный технический университет, 420111 Казань

Для решения смешанной задачи двумерной теории упругости предлагается численно-аналитический подход, основанный на аппроксимации гармоническими или бигармоническими функциями. Он позволяет понизить геометрическую размерность краевой задачи, сведя ее к минимизации граничной невязки. Получаемое аналитическое приближенное решение удовлетворяет всем уравнениям теории упругости.

Общая схема метода. Пусть Ω — многомерная многосвязная область в $\mathbb{R}^n$, ограниченная гиперповерхностью Γ. Рассмотрим общую краевую задачу

$$LU(X) = 0, \quad X \in \Omega; \tag{1}$$

$$lU(X) = \Psi(Y), \quad Y \in \Gamma, \tag{2}$$

где L — линейный векторный дифференциальный оператор; $U(X)$, $\Psi(Y)$ — элементы некоторых функциональных пространств $R_1(\Omega)$ и $R_2(\Gamma)$ [1].

Метод разложения по неортогональным функциям решения краевой задачи (1), (2) сформулируем следующим образом. Пусть $\{\Psi_k(X)\}_{k=1}^{\infty}$ — система вектор-функций Ψ_k, удовлетворяющая условиям: каждая $\Psi_k(X)$ удовлетворяет в Ω уравнению (1); для каждой базисной функции $\Psi_k(X)$ на Γ определена новая функция $l\Psi_k(Y)$, где l — оператор из граничного условия (2); система функций $\{\Psi_k(X)\}_{k=1}^{\infty}$ является линейно независимой, плотной и полной в пространствах $C_4(\Gamma)$ или $L_2(\Gamma)$.

Найдем коэффициенты a_k наилучшего (в смысле $C_4(\Gamma)$ или $L_2(\Gamma)$) разложения функции $\Psi(Y)$ по первым N функциям системы $\{\Psi_k(X)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\Psi(Y) \approx \sum_{k=1}^{N} a_k^{(N)} l\Psi_k(Y).$$

Тогда выражение $U^N \approx \sum\limits_{k=1}^{N} a_k^{(N)} \Psi_k(X)$ можно считать приближенным решением задачи (1), (2), которое при $N \to \infty$ стремится к точному решению при условии корректности задачи.

Новизна данной работы состоит в том, что в ней предложен алгоритм построения глобальных и локальных базисных функций $\{\Psi_k(X)\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям. Метод получения базисных функций применим для всех канонических уравнений математической физики [2–4]. С помощью разумного подбора этих базисных функций, которые можно ортонормировать, решается широкий класс задач механики с произвольными граничными условиями.

Решение граничной задачи плоской теории упругости. Определение напряжений и перемещений в однородном изотропном линейно-упругом теле, находящемся в состоянии плоской деформации, сводится к решению краевой задачи для следующей системы уравнений (уравнений Ламе [5]):

$$(\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial x} + G\nabla^2 u + F_x = 0, \qquad (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial y} + G\nabla^2 v + F_y = 0, \tag{3}$$

где $(\lambda + G) = G/(1-2\mu)$; G, μ — модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно; $\theta = \partial/\partial x + \partial/\partial y$; $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. В задачах плоского напряженного состояния λ заменяется на $\lambda_1 = 2\lambda G/(\lambda + 2G)$. В двумерной области Ω ищется регулярное решение системы уравнений (3), удовлетворяющее на границе Γ соотношениям

$$l_1 u = \alpha_{11}\sigma_{n1} + \beta_{11}u + \alpha_{21}\sigma_{n2} + \beta_{21}v = \psi^1, \quad l_2 v = \alpha_{12}\sigma_{n1} + \beta_{12}u + \alpha_{22}\sigma_{n2} + \beta_{22}v = \psi^2. \tag{4}$$

Здесь α_{ij}, β_{ij}, ψ^i $(i, j = 1, 2)$ — известные функции точки $Y \in \Gamma$; σ_{ni} — компоненты вектора напряжений:

$$\sigma_{n1} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy}\cos(n, y); \quad \sigma_{n2} = \tau_{xy}\cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y),$$

где $\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\partial u/\partial x$, $\sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\partial v/\partial y$; $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ — направляющие косинусы внешней нормали к границе в точке $Y \in \Gamma$.

Частными случаями граничной задачи (3), (4) являются классические первая и вторая граничные задачи теории упругости, когда на границе Γ заданы либо напряжения ($\beta_{ij} = 0$, $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера), либо смещения ($\beta_{ij} = \delta_{ij}$, $\alpha_{ij} = 0$), а также смешанная задача, когда на части контура Γ заданы напряжения, а на остальной части — смещения, и другие граничные задачи. В дальнейшем без ограничения общности пренебрегаем массовыми силами F_x и F_y [5].

Как известно, вектор перемещения $\boldsymbol{u} = \{u, v\}$, удовлетворяющий уравнениям (3), может быть построен по одной из формул общих решений, например по формуле Папковича — Нейбера [5, 6], имеющей вид

$$u = \Phi_1 - 0{,}25(1-\mu)^{-1}\frac{\partial(\Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2)}{\partial x}, \qquad v = \Phi_2 - 0{,}25(1-\mu)^{-1}\frac{\partial(\Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2)}{\partial y}, \tag{5}$$

где Φ_0, Φ_1 и Φ_2 — функции координат x и y, удовлетворяющие уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y^2} = 0, \qquad i = 0, 1, 2. \tag{6}$$

Вопрос о полноте и общности решения (5) рассмотрен в [6].

Нетрудно видеть, что уравнение (6) допускает группу растяжения и переноса по независимым переменным и группу растяжения по зависимым переменным. Поэтому согласно работам [2, 7–9] инвариантно-групповые решения уравнения Лапласа можно искать, например, в виде

$$\Phi_0 = (c_1 x + b)^{\alpha}\varphi(\eta), \qquad \eta = \frac{c_2 y + h}{c_1 x + b}, \tag{7}$$

где α, c_1, c_2, b, h — произвольные действительные числа.

Подставив (7) в (6), получим

$$(c_1 x + b)^{\alpha-2}[(\eta^2 + D^2)\varphi'' - 2\eta(\alpha - 1)\varphi' + \alpha(\alpha-1)\varphi] = 0, \tag{8}$$

где φ', φ'' — первая и вторая производные по η; $(c_1 x + b)^{\alpha-2} \neq 0$; $D^2 = c_2^2/c_1^2$.

Решение дифференциального уравнения (8) ищем в виде ряда

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \eta^k. \tag{9}$$

Подставив (9) в (8) и приравняв коэффициенты ряда при одинаковых степенях η, найдем рекуррентную формулу

$$a_{k+2} = -\{(\alpha - k)(\alpha - k - 1)/[D^2(k+2)(k+1)]\}a_k, \tag{10}$$

позволяющую выразить все четные коэффициенты ряда (9) через a_0 и все нечетные — через a_1.

Таким образом, ряд (9) с коэффициентами, определяемыми по формуле (10), и произвольными значениями a_0 и a_1 является общим решением уравнения (8).

Рассмотрим решения уравнения (8), которые удовлетворяют условиям однозначности, непрерывности и конечности. Из формулы (10) следует, что при $a_k \neq 0$ коэффициент $a_{k+2} = 0$ только в том случае, когда постоянная α принимает значения $\alpha = k$ и $\alpha = k+1$. При выполнении этих условий можно получить конечные решения уравнения (8) в виде полиномов $P_k^\alpha(\eta)$.

При $k = 0$ и $k = 1$ имеем $a_2 = [-\alpha(\alpha-1)/(2D^2)]a_0$ и $a_3 = [-(\alpha-1)(\alpha-2)/(6D^2)]a_1$. Пусть $\alpha = 1$, тогда $a_2 = 0$ и $a_3 = 0$. При этом a_0 и a_1 могут быть произвольными. Выберем a_0 и a_1 в качестве коэффициентов, формирующих начальный базис. Тогда получим следующие полиномы, являющиеся при различных значениях α общим решением уравнения (8): $P_{k=\overline{0,1}}^{\alpha=1} = a_0 + a_1\eta$, $P_{k=\overline{0,2}}^{\alpha=2} = a_0(1 - \eta^2/D^2) + a_1\eta$ ($a_3 = a_4 = \ldots = 0$ при $\alpha = 2$), $P_{k=\overline{0,3}}^{\alpha=3} = a_0(1 - 3\eta^2/D^2) + a_1(\eta - \eta^3/(3D^2))$ ($a_4 = a_5 = \ldots = 0$ при $\alpha = 3$), $P_{k=\overline{0,4}}^{\alpha=4} = a_0(1 - 6\eta^2/D^2 + \eta^4/D^4) + a_1(\eta - \eta^3/D^2)$ ($a_5 = a_6 = \ldots = 0$ при $\alpha = 4$), ... ($k = 0, 2, 3, \ldots, m$).

Используя принцип суперпозиции решений в силу однородности и линейности уравнения (6), запишем решение уравнения Лапласа в виде

$$\begin{aligned}\Phi_0(x,y) = \sum_{\alpha=1}^{N} A_\alpha(c_{1\alpha}x + b_\alpha)^\alpha P_k^\alpha(\eta) = A_0a_{00} + A_1(c_{11}x + b_1)(a_{01} + a_{11}\eta) +\\ + A_2(c_{12}x + b_2)^2[a_{02}(1 - \eta^2/D^2) + a_{12}\eta] + A_3(c_{13}x + b_3)^3[a_{03}(1 - 3\eta^2/D^2) +\\ + a_{13}(\eta - \eta^3/(3D^2))] + \ldots + A_N(a_{1N}x + b_N)^N P_k^N(\eta),\end{aligned} \tag{11}$$

где $\eta = (c_{2\alpha}y + h_\alpha)/(c_{1\alpha}x + b_\alpha)$; A_α — подлежащие определению произвольные коэффициенты, количество которых зависит от метода решения граничной задачи и оценки точности приближенного решения.

Отметим, что выражения для полиномов $P_k^\alpha(\eta)$ зависят от выбора параметров a_0 и a_1, как и для полиномов Лежандра и Чебышева. Для каждого полинома эти коэффициенты должны выбираться таким образом, чтобы полиномы $P_k^\alpha(\eta)$ наименее уклонялись от нуля. В выражении (11) они обозначены через $a_{0\alpha}$ и $a_{1\alpha}$, так как для каждого полинома они могут быть различными. Параметры c_1, c_2, b и h в решении (11) могут быть также различными для каждого полинома $P_k^\alpha(\eta)$, поэтому они обозначены через $c_{1\alpha}$, $c_{2\alpha}$, b_α и h_α. Эти параметры выбираются таким образом, чтобы система линейных уравнений, к которой редуцируется исходная задача, не была плохо обусловленной. При любых N и A_α функция (11) удовлетворяет уравнению (6) в области Ω, но не граничным условиям на Γ. Так как определялись только полиномиальные решения, то решения через трансцендентные функции не учитывались (например, при $\alpha = k = 0$ имеем решение $\varphi = C_1 + C_2 \operatorname{arctg} \eta$ и т. д.).

Другие решения уравнения (6) можно получить, если инвариантное решение искать в виде $\Phi = (c_2y + h)^\alpha \varphi(\eta)$, $\eta = (c_1x + b)/(c_2y + h)$.

Так как гармонические функции найдены в виде полиномов, то можно легко найти сопряженные с ними гармонические функции, используя условия Коши — Римана [5].

Другой способ формирования новых решений из некоторых известных, не связанный с отысканием конечных преобразований, но применимый лишь в случае линейных однородных уравнений, изложен в работе [7]. Для таких уравнений решения, зависящие от параметров, порождают новые решения путем дифференцирования по этим параметрам. Кроме того, можно получить новые решения дифференциальных уравнений, если известна группа непрерывных преобразований, порождаемая операторами X_i. Пусть $U_k = \varphi_k(x,y)$ $(k=\overline{1,m})$ — решения линейной однородной системы, тогда функции

$$U_{kk} = X_i(U_k - \varphi_k(x,y))\Big|_{U_k=\varphi_k(x,y)}$$

также образуют решение исходной системы уравнений [7]. Важно, чтобы для всей найденной системы полиномиальных функций она была линейно независимой и полной в пространстве $C_4(\Gamma)$ или $L_2(\Gamma)$.

Предложенный алгоритм формирования базисных функций позволяет расширить полиномиальные представления базисных функций, приведенных в работах [5, 10, 11]. Найденные гармонические полиномы в декартовых координатах обладают более удобными аналитическими и вычислительными свойствами по сравнению, например, с шаровыми функциями.

Подставляя обобщенные полиномы (11) в формулу Папковича — Нейбера (5), найдем неизвестные коэффициенты A_α из граничных условий (4) любым из существующих методов [1, 5, 12–14], например методом взвешенных невязок или вариационным методом, если задача допускает вариационную формулировку.

Сведение двумерной задачи теории упругости к краевой задаче для бигармонического уравнения. В отсутствие массовых сил в Ω введение функции напряжений Эйри $\Psi(x,y)$ [5]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y} \tag{12}$$

позволяет свести смешанную задачу теории упругости к краевой задаче для бигармонического уравнения

$$\nabla^4\Psi = \frac{\partial^4\Psi}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4\Psi}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4\Psi}{\partial y^4} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega; \tag{13}$$

$$\sigma_{nx}\Big|_{\Gamma_1} = X(s), \quad \sigma_{ny}\Big|_{\Gamma_1} = Y(s), \quad u\Big|_{\Gamma_2} = u(s), \quad v\Big|_{\Gamma_2} = v(s), \tag{14}$$

где s — переменная длина дуги кривой Γ с кусочно-непрерывной внешней нормалью $n(s)$; $X(s)$, $Y(s)$, $u(s)$, $v(s)$ — проекции заданных на Γ_1 распределенных усилий и заданных на Γ_2 смещений граничных точек на оси декартовой системы координат ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$); $\sigma_{nx}\big|_\Gamma$, $\sigma_{ny}\big|_\Gamma$ — проекции на эти оси внутренних напряжений в граничных точках Ω:

$$\sigma_{nx}\Big|_\Gamma = d\big(\partial\Psi/\partial y\big|_\Gamma\big)\big/ds = \partial^2\Psi/\partial s\,\partial y\Big|_\Gamma, \qquad \sigma_{ny}\Big|_\Gamma = d\big(\partial\Psi/\partial x\big|_\Gamma\big)\big/ds = \partial^2\Psi/\partial s\,\partial x\Big|_\Gamma.$$

При нахождении регулярного решения (непрерывных в замкнутой области Ω полей напряжений и перемещений) принимается, что всюду, кроме точек излома границы Γ, функции $X(s)$ и $Y(s)$ непрерывны на Γ_1, а $u(s)$, $v(s)$ непрерывны и дифференцируемы на Γ_2 [5, 12].

По найденной в результате решения краевой задачи (13), (14) функции напряжений с помощью приведенных формул определяются напряжения и перемещения в любой точке замкнутой области Ω. При этом напряжения в области Ω выражаются через $\Psi(x,y)$ по формулам (12). Формулы, в явном (и подходящем в качестве конкретной инструкции для ЭВМ) виде выражающие поле перемещений в односвязной области Ω через функцию напряжений, приведены в работе [12].

С помощью изложенного выше алгоритма найдем бигармонические полиномы. Пусть решением уравнения (13) будет выражение (7), где вместо Φ используется Ψ. Подставив (7) в (13), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(c_1x+b)^{\alpha-4}[(\eta^4+2D^2\eta^2+D^4)\varphi'''' - 4(\alpha-3)(\eta^3+D^2\eta)\varphi''' + 2(\alpha-2)(\alpha-3)(3\eta^2+D^2)\varphi'' - \\ -4(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\eta\varphi' + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\varphi] = 0, \qquad (15)$$

где штрихи обозначают производные по η; $(c_1x+b)^{\alpha-4} \neq 0$.

Подставляя (9) в (15) и приравнивая коэффициенты ряда при одинаковых степенях η, получим рекуррентную формулу

$$a_{k+4} = a_{k+2}[-2k(k-1)+4k(\alpha-3)-2(\alpha-2)(\alpha-3)]/[D^2(k+3)(k+4)]+ \\ +a_k[-k(k-1)(k-2)(k-3)+4k(k-1)(k-2)(\alpha-3)-6k(k-1)(\alpha-2)(\alpha-3)+ \\ +4k(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)-\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)]/[D^4(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)], \qquad (16)$$

позволяющую выразить все четные коэффициенты ряда (9) через a_0 и все нечетные — через a_1.

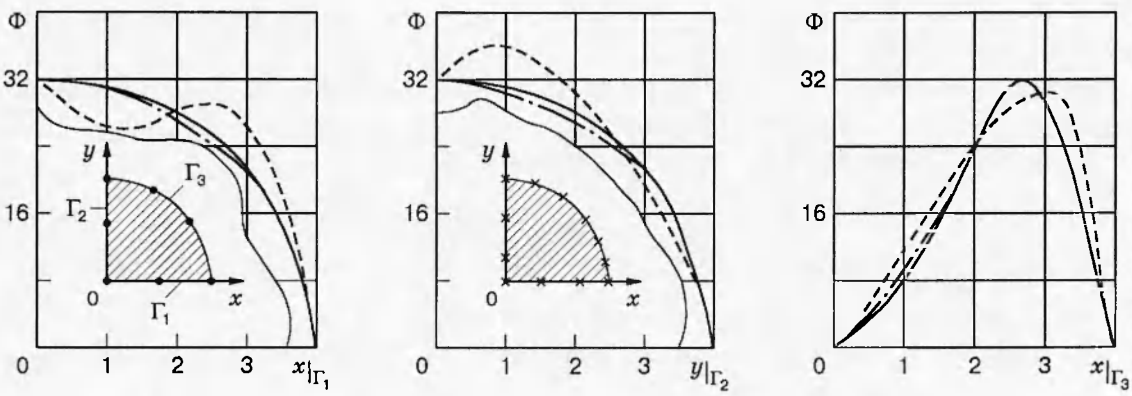
Структура уравнения (15) позволяет найти его решения, удовлетворяющие условиям однозначности, непрерывности и конечности. Из формулы (16) следует, что при $a_k \neq 0$ и $a_{k+2} \neq 0$ коэффициент $a_{k+4} = 0$ только в том случае, когда постоянная α принимает значения $\alpha = k+3$ и $\alpha = k+2$. При выполнении этих условий можно получить конечные решения уравнения (15) в виде полиномов $P_k^\alpha(\eta)$. Можно показать, что при $k = 0$; 1 и $\alpha = 3$ коэффициенты $a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = \ldots = 0$. При этом a_0, a_1, a_2 и a_3 могут быть произвольными. Выберем их в качестве коэффициентов, формирующих начальный базис. Воспользовавшись принципом суперпозиции решений, выпишем полиномиальное решение бигармонического уравнения (13) (аналогично решению уравнения Лапласа) в развернутой форме

$$\Psi(x,y) = \sum_{\alpha=0}^{N} A_\alpha(c_{1\alpha}x+b_\alpha)^\alpha P_k^\alpha(\eta) = A_0a_{00} + A_1(c_{11}x+b_1)(a_{01}+a_{11}\eta)+ \\ +A_2(c_{12}x+b_2)^2[a_{02}(1-\eta^2)+a_{12}\eta] + A_3(c_{13}x+b_3)^3[a_{03}+a_{13}\eta+a_{23}\eta^2+a_{33}\eta^3]+ \\ +A_4(c_{14}x+b_4)^4\left[a_{04}\left(1-\frac{\eta^4}{D^4}\right)+a_{14}\eta+a_{24}\left(\eta^2-\frac{\eta^4}{3D^2}\right)+a_{34}\eta^3\right]+A_5(c_{15}x+b_5)^5\left[a_{05}\left(1-\frac{5\eta^4}{D^4}\right)+\right. \\ +a_{15}\left(\eta-\frac{\eta^5}{5D^4}\right)+a_{25}\left(\eta^2-\frac{\eta^4}{D^2}\right)+a_{35}\left(\eta^3-\frac{\eta^5}{5D^2}\right)\Big]+A_6(c_{16}x+b_6)^6\Big[a_{06}\left(1-\frac{15\eta^4}{D^4}+\frac{2\eta^6}{D^6}\right)+ \\ +a_{16}\left(\eta-\frac{\eta^5}{D^4}\right)+a_{26}\left(\eta^2-\frac{2\eta^4}{D^2}+\frac{\eta^6}{6D^4}\right)+a_{36}\left(\eta^3-\frac{3\eta^5}{5D^2}\right)\Big]+\ldots+A_N(c_{1N}x+b_N)^N P_k^N(\eta), \qquad (17)$$

где $\eta = (c_{2\alpha}y+h_\alpha)/(c_{1\alpha}x+b_\alpha)$.

Важно отметить, что при любых N и A_α функция (17) удовлетворяет уравнению (13) в области Ω. Используя результаты, приведенные выше, найдем другие полиномиальные решения бигармонического уравнения. Предложенный алгоритм позволяет существенно расширить полиномиальные представления базисных функций для бигармонического уравнения [5, 10, 12]. Краевая задача для бигармонического уравнения относительно функций напряжений решается аналогично.

О численной реализации метода. Полиномиальные базисные функции типа (11) или (17) обладают следующими достоинствами: они не связаны с конкретной областью Ω



(аппроксимация решения строится только для границы Γ, так как полиномы являются точными решениями в области Ω) и обеспечивают равномерную сходимость приближенных решений к точному как на границе Γ, так и в области Ω (по теоремам Вейерштрасса, Гарнака, Маргеляна [10, 12, 15–17]). Эти функции удобны в вычислениях. Важная особенность описанного подхода — возможность оценки погрешности приближенного решения внутри области по величине уклонения его граничных условий от заданных.

В качестве примера рассмотрим приближенное решение уравнения (6), удовлетворяющее на четверти окружности $x^2+y^2=16$ (граница Γ) следующим граничным условиям: $\Phi(x,y)=32-x^4/8$ на Γ_1 ($y=0$), $\Phi(x,y)=32-y^4/8$ на Γ_2 ($x=0$), $\Phi(x,y)=x^2y^2$ на Γ_3 ($y=(16-x^2)^{1/2}$) [13]. Отметим, что точным решением этой задачи является функция $\Phi(x,y)=x^2y^2+[256-(x^2+y^2)^2]/8$. Воспользуемся приближенным решением (11), которое удовлетворяет уравнению Лапласа внутри области. Результаты точного и приближенного решений на границе Γ ($\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$) при $a_{0\alpha}=a_{1\alpha}=c_{1\alpha}=c_{2\alpha}=1$, $b_\alpha=h_\alpha=6$ при различных числах точек коллокации N показаны на рисунке. Аналитическое решение представлено сплошной линией, а результаты, полученные методом коллокации, — штриховой (при $N=7$) и штрихпунктирной (при $N=12$). Точками обозначено точное решение, крестиками — приближенное. Оценка точности приближенного решения проводилась по формуле $\Delta=\max\left|\Phi(x_i,y_i)-\Phi_0(x_i,y_i)\right|_\Gamma\leqslant\varepsilon$, где $\varepsilon=0{,}001$.

Изложенный метод не только дает возможность получить решения задач в аналитическом виде (найдены полиномиальные решения канонических уравнений математической физики эллиптического, параболического и гиперболического типов, зависящих от пространственных координат x, y, z и времени t [2–4]), но и существенно сокращает размерность алгебраической системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов по сравнению с методом конечных разностей и методом конечных элементов, так как строится аппроксимация решения только на границе. С помощью найденных глобальных и локальных базисных функций можно решить широкий класс как линейных, так и нелинейных задач [18] (используя, например, методы линеаризации) механики и математической физики. Бигармонические и гармонические полиномы применимы для решения ряда задач гидромеханики, электростатики, теории упругости (в частности, кручения и изгиба призматических тел, изгиба мембран и пластин).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексидзе М. А.** Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М.: Наука, 1978.

2. **Дружинин Г. В.** Об инвариантно-групповых решениях основных уравнений математической физики. Казань, 1996. Деп. в ВИНИТИ 17.05.96, № 1580-В96.
3. **Дружинин Г. В.** Базисные системы полиномиальных решений уравнений механики. Казань, 1997. Деп. в ВИНИТИ 15.10.97, № 3044-В97.
4. **Дружинин Г. В.** Об одном методе решения задач механики, использующем инвариантно-групповые решения уравнений математической физики // Тез. докл. VII Четаевской конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением». Казань: Казан. техн. ун-т, 1997. С. 117.
5. **Хан Х.** Теория упругости: Основы теории и ее приложения. М.: Мир, 1988.
6. **Остросаблин Н. И., Сенашов С. И.** Общие решения и симметрии уравнений линейной теории упругости // Докл. РАН. 1992. Т. 322, № 3. С. 112–122.
7. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
8. **Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И.** Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
9. **Дружинин Г. В., Закиров И. М., Бодунов Н. М.** Метод решения уравнений деформационной теории пластичности с использованием свойства их инвариантности // Актуальные проблемы фундаментальных наук: Тр. II Междунар. науч.-техн. конф., Москва, 1994 г. М.: Техносфера-информ, 1994. Т. 2, ч. 1. С. 59–63.
10. **Бондаренко Б. А., Филатов А. И.** Квазиполиномиальные функции и их приложения к задачам теории упругости. Ташкент: Фан, 1978.
11. **Лурье А. И.** Полиномиальное представление решений уравнений теории упругости // Проблемы механики твердого деформированного тела: Сб. ст. Л.: Судостроение, 1970. С. 251–256.
12. **Хохлов А. В.** Решение двумерных задач теории упругости путем минимизации граничной невязки на пространстве бигармонических функций // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 2. С. 232–242.
13. **Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.** Численные методы анализа. М.: Наука, 1967.
14. **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.
15. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
16. **Гончаров В. Л.** Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехтеоретиздат, 1954.
17. **Маргелян С. Н.** Равномерное приближение функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. 1952. Т. 7, вып. 2. С. 31–122.
18. **Zakirov I. M., Bodunov N. M., Mart'yanov A. G., Druzhinin G. V.** Mathematical modeling of stress-strained state in elastic forming elements // Proc. intern. conf. Technologia'97. Bratislava: Slovak univ. technology, 1997. V. 2. P. 492–495.

Поступила в редакцию 27/V 1996 г.,
в окончательном варианте — 8/VII 1997 г.