УДК 621.391.15

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАВНОМЕРНОГО ПО ВЫХОДУ КОДИРОВАНИЯ МАРКОВСКИХ ИСТОЧНИКОВ ПРИ НЕИЗВЕСТНОЙ СТАТИСТИКЕ СООБЩЕНИЙ

В. К. Трофимов

[1] *Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 630102, г. Новосибирск, ул. Кирова, 86*
[2] *Институт систем информатики им. А. П. Ершова СО РАН, 630090, г. Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, 6*
E-mail: trofimov@sibsutis.ru

Предложен метод равномерного по выходу кодирования марковских источников с конечной памятью. Получена оценка эффективности рассмотренного кодирования и проведено сравнение с эффективностью равномерного по входу кодирования.

Ключевые слова: кодирование, стоимость кодирования, энтропия, хранение и обработка информации, источник сообщений.

Введение. Данная работа посвящена исследованию вопросов сжатия информации равномерным кодом в системах хранения и обработки данных [1]. Сжатие информации используется при выявлении скрытой информации [2], в теории управления [3], а также при создании большемасштабных распределённых вычислительных систем [4]. В работе [5] заложены основы теории сжатия информации, с помощью которой получены различные алгоритмы устранения избыточности как при известной, так и при неизвестной статистике сообщений. Подробную библиографию по этому вопросу можно найти в [6, 7].

В предлагаемой работе изучается вопрос о пословном сжатии информации блоками (словами одинаковой длины). Такое кодирование, называемое равномерным по выходу, является обобщением кодирования длин серий [8], характеризуется отсутствием бегущей ошибки синхронизации и удобно для последующего применения корректирующих кодов. Равномерное по выходу кодирование при известной статистике сообщений изучалось в [8–12], а при неизвестной статистике сообщений — в [6, 7, 13–18]. В частности, в [10] доказано, что при увеличении объёма памяти равномерное по выходу кодирование известных марковских источников является более эффективным, чем равномерное по входу.

Задача предлагаемой работы — доказать, что равномерное по выходу кодирование эффективнее равномерного по входу. Особо следует отметить, что рассматриваемое здесь кодирование сжимает информацию, порождённую любым источником из множества всех марковских источников с конечной памятью. При заданной энтропии источника с ростом памяти эффективность равномерного по выходу кодирования превосходит эффективность равномерного по входу. Если память источника равна нулю, то полученные результаты совпадают с результатами [18].

Основные определения и обозначения. Пусть буквы конечного алфавита $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $2 \leq k < \infty$, порождаются источником θ. Мера, заданная на последовательности букв, порождаемой источником, определяет его тип. Если вероятности порождения букв независимы, то источник называют бернуллиевским. В этом случае $P_\theta(a_j) = \theta_j$, $\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_k = 1$. Если же вероятность появления очередной буквы зависит от предыдущей, то $P_\theta(a_i/a_j) = \theta_{ij}$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_{ij} = 1$, и в этом случае источник называют марковским.

Если вероятность появления очередной буквы зависит от s предшествующих букв, т. е. $P_\theta(a_i/v) = \theta_{vj}$, где $v \in A^s$, то источник θ называют марковским с памятью s. Следует отметить, что для любого слова $v \in A^s$, $0 \le s < \infty$, выполняется равенство $\sum\limits_{j=1}^{k} \theta_{vj} = 1$. Множество всех марковских источников памяти s обозначим Ω_s.

Пусть u — произвольное слово в алфавите A, тогда $P_\theta(u)$ — вероятность слова u, порождённого источником θ. Число $|u|$ букв в слове u назовём его длиной. Энтропию источника θ обозначим $H(\theta)$. Как известно [19, 20], если θ — стационарный источник, то $H(\theta)$ определяется равенством

$$H(\theta) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{u \in A^n} P_\theta(u) \log P_\theta(u). \tag{1}$$

Здесь и далее $\log x = \log_2 x$, $0 \log 0 = 0$.

Для бернуллиевского источника θ из (1) следует, что его энтропия $H_0(\theta)$ вычисляется по формуле

$$H_0(\theta) = -\sum_{i=1}^{k} \theta_i \log \theta_i. \tag{2}$$

Если θ — марковский источник с памятью s, то его энтропия $H_s(\theta)$ имеет вид

$$H_s(\theta) = -\sum_{v \in A^s} \theta_{0v} \sum_{i=1}^{k} \theta_{vi} \log \theta_{vi}, \tag{3}$$

где θ_{0v} — начальные стационарные вероятности слов v, $v \in A^s$. При $s = 0$ из (3) получаем соотношение (2).

Рассмотрим T — конечное полное множество слов во входном алфавите. Множество T полное, если оно префиксное, и при любом непустом слове u (в алфавите A) множество слов $T \cup u$ уже не префиксное. Множество T назовём кодовым. Его примером может служить множество всех слов длины n, взятых в алфавите A, т. е. A^n; множество $A^n \setminus \underbrace{a_1, \ldots, a_k}_{n}$ не является кодовым, потому что оно неполное.

Пусть θ — произвольный источник из Ω_s. Обозначим $\theta(T)$ марковскую цепь, состояниями которой являются слова из T, а переходные вероятности $P_{\theta(T)}(u/v)$, $u, v \in T$, индуцируются источником θ. Будем рассматривать только марковские источники с памятью s, переходные вероятности которых строго положительны. Тогда для любых $u, v \in T$ выполняются равенства $P_{\theta(T)}(u/v) > 0$, поэтому для марковской цепи $\theta(T)$ существует стационарное распределение $P^0_{\theta(T)}(u) > 0$, $u \in T$. Средняя длина слова $d_s(T, \theta)$ для кодового множества T, как доказано в [21], запишется в виде

$$d_s(T, \theta) = \sum_{u \in T} P^0_{\theta(T)}(u) |u|. \tag{4}$$

Полубесконечная последовательность букв, порождаемая источником θ, однозначно разбивается на последовательность слов из фиксированного кодового множества T. Полученная последовательность слов из T с помощью отображения φ переводится в слова выходного алфавита B, который, не уменьшая общности, можно считать двоичным.

Из неравенства Мак-Милана — Крафта [19, 20] следует, что самое общее из всех возможных дешифруемых кодирований φ такое, что множество слов в выходном алфавите $\varphi(T) = \{\varphi(u),\ u \in T\}$ является префиксным. Если длины всех слов некоторого множества D равны между собой, то считается, что D состоит из блоков, в противном случае — из слов переменной длины. В зависимости от видов множеств T и $\varphi(T)$ логически возможны следующие виды кодирований:

1) отображающее блоки в слова переменной длины (обозначается BV);
2) отображающее слова переменной длины в блоки (VB);
3) отображающее слова переменной длины в слова переменной длины (VV);
4) отображающее блоки в блоки (BB).

Итак, всякое кодирование φ однозначно определяется тройкой $(T, \varphi, \varphi(T))$. Среднее количество букв выходного алфавита при кодировании типа σ ($\sigma = BV, VB, VV$), приходящееся на одну букву входного, назовём стоимостью кодирования и обозначим через $C_\sigma(T, \theta, \varphi)$. В [21] доказано, что стоимость кодирования типа σ ($\sigma = BV, VB, VV$) для произвольного кодового множества T и любого источника θ, $\theta \in \Omega_s$, $0 \le s < \infty$, находится из равенства

$$C_\sigma(T, \theta, \varphi) = \frac{1}{d(T, \theta) - \hat{s} + 1} \sum_{u \in T} P^0_{\theta(T)}(u) |\varphi(u)|, \tag{5}$$

где величина $d(T, \theta)$ задаётся равенством (4), $|\varphi(u)|$ — число букв в слове $\varphi(u)$.

Эффективность кодирования φ, как обычно [5, 9, 19, 20], будем оценивать разностью между стоимостью кодирования $C_\sigma(T, \theta, \varphi)$ и энтропией источника $H(\theta)$. Эта разность далее называется избыточностью кодирования и обозначается $r_\sigma(T, \theta, \varphi)$, т. е.

$$r_\sigma(T, \theta, \varphi) = C_\sigma(T, \theta, \varphi) - H(\theta). \tag{6}$$

Величину $R_\sigma(N, \Omega)$, определяемую соотношением

$$R_\sigma(N, \Omega) = \inf_{\varphi} \sup_{\theta \in \Omega} r_\sigma(T, \theta, \varphi), \tag{7}$$

где нижняя грань берётся по всем кодированиям φ, для которых кодовое множество T имеет не более чем k^N слов, назовём избыточностью универсального кодирования типа σ для множества источников Ω сложности N. Построение хорошего кодирования при заданной сложности — основной вопрос при изучении передачи сообщений по каналу без шума. Решение поставленной задачи позволяет ответить на вопрос: какой избыточности можно достигнуть при заданной сложности кодирования?

Если множество источников Ω состоит из единственного источника, то мы имеем дело с кодированием известного источника, которое подробно изучено для различных типов кодирования, например, в работах [5, 9–12]. Универсальное кодирование марковских источников различных типов также хорошо изучено [6, 7, 13–18].

В частности, в работе [12] показано, что кодирование типа VB для марковских источников с растущей памятью s эффективнее кодирования типа BV, т. е. избыточность кодирования $R_{VB}(N, \theta)$ меньше, чем $R_{BV}(N, \theta)$. Из [22] следует, что для избыточности $R_{BV}(N, \Omega_s)$ универсального равномерного по входу кодирования марковских источников Ω_s, определяемой равенством (7), имеет место асимптотическое равенство

$$R_{BV}(N, \Omega_s) \sim \frac{k^s(k-1)}{2} \log k \frac{\log \cdot \log \|A^N\|}{\log \|A^N\|}. \tag{8}$$

Отметим, что (8) верно и в случае, если Ω_s заменить любым множеством $\Omega \subset \Omega_s$, которое имеет ненулевую меру Лебега.

Вопросы сжатия информации возникают и при решении других задач, например при восстановлении непрерывного сигнала в случае равномерной дискретизации [23].

Построение кодирования и оценка его эффективности. В данной работе показано, что существует последовательность кодирований φ_N типа VB с областью определения T_N таких, что $\|T_N\| \leq k^N$, для которых избыточность $r_{VB}(T_N, \theta, \varphi_N)$ при любом источнике θ из Ω_s стремится к нулю. Получена верхняя оценка избыточности в зависимости от $\|T_N\|$.

Как было отмечено выше, марковский источник θ связанности s задаётся начальным распределением вероятностей θ_{0v} появления блока v за первые s шагов работы источника и вероятностями θ_{vi} появления буквы a_i после блока v, $a_i \in A$, $v \in A^s$. Отсюда следует, что вероятность $P_\theta(u)$ порождения слова u, $|u| > s$, начинающегося блоком v, $v \in A^s$, источником θ определяется равенством

$$P_\theta(u) = \theta_{0v} \prod_{v \in A^s} \prod_{i=1}^{k} \theta_{vi}^{r_{vi}(u)}. \tag{9}$$

В (9) и далее $r_{vi}(u)$ — число вхождений блоков vi в слово u.

На множестве источников Ω_s найдём распределение $\omega(\theta)$ [6], которое задаётся формулой

$$\omega(\theta) = \Big[\frac{r(k/2)}{k\pi^{k/2}}\Big] 1 \Big/ \sqrt{\prod_{v \in A^s} \prod_{i=1}^{k} \theta_{vi}}. \tag{10}$$

Проинтегрировав вероятность слова u, порождённого источником θ, по множеству источников Ω_s, если на Ω_s задана плотность $\omega(\theta)$, и используя (9), (10), получим [6]

$$\bar{P}_s(u) = \Big[\frac{\Gamma(k/2)}{k\pi^{k/2}}\Big]^{ks} \prod_{v \in A^s} \frac{\prod\limits_{j=1}^{k} \Gamma(r_{vj}(u) + 1/2)}{\Gamma(r_v(u) + k/2)}, \tag{11}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция от z; $r_v(u) = \sum\limits_{j=1}^{k} r_{vj}(u)$.

Величина $\bar{P}_s(u)$, определяемая равенством (11), — это средняя вероятность слова u по множеству источников Ω с заданной плотностью $\omega(\theta)$ (10).

В работе [17] для множества марковских источников Ω_s был предложен метод универсального равномерного по выходу кодирования φ_N, т. е. построена последовательность кодовых множеств T_N, $N = 1, 2, \ldots$, для которой выполняется равенство

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{\theta \in \Omega_s} r_{VB}(T_N, \theta, \varphi_N) = 0,$$

где величина $r_{VB}(T_N, \theta, \varphi_N)$ находится из равенства (6). Кодовое множество T_N включает все слова u в алфавите A, для которых одновременно выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &1/\bar{P}_S(u) \leq k^N, && u \in T_N, \\ &1/\bar{P}_S(ua_j) > k^N, && u \in T_N \text{ и, по крайней мере, для одного } a_j \in A. \end{aligned} \tag{12}$$

Кодирование φ_N каждому слову u ставит в соответствие последовательность $\varphi_N(u)$, содержащую $|\varphi_N(u)|$ символов выходного алфавита. Очевидно, что $|\varphi_N(u)| =]\log\|T_N\|[$.

Как доказано в [17], для избыточности $r_{VB}(T_N,\theta,\varphi_N)$, вычисляемой по формуле (6), предложенное равномерное по выходу универсальное кодирование позволяет получить оценку

$$r_{VB}(T_N,\theta,\varphi_N) \le \frac{k^s(k-1)+2}{2}\,\frac{\log d(T_N,\theta)+C}{d(T_N,\theta)}. \tag{13}$$

В формуле (13) постоянная C не зависит ни от θ, ни от T_N.

Формулировка и доказательство основного утверждения. Докажем вспомогательное предложение.

Лемма. Для последовательности кодовых множеств $\{T_N\}$, $N = 1, 2, \ldots$, построенных выше для произвольного источника $\theta \in \Omega_s$ такого, что $H_s(\theta) > \delta > 0$, справедливо следующее равенство:

$$d_s(T_N,\theta) = \frac{\log\|T_N\|}{H_s(\theta)+\alpha_N(\theta)},$$

где $\alpha_N(\theta) \to 0$ при $N \to \infty$.

Доказательство. Из (4) для $d_s(T_N,\theta)$ следует справедливость равенства

$$d_s(T_N,\theta) \ge \min_{u\,\in\,T_N} |u|. \tag{14}$$

Величина $\min\limits_{u\,\in\,T_N} |u| \to \infty$ при $N \to \infty$, что вытекает из построения кодового множества T_N согласно правилу (12). Из (13), (14) с учётом того, что функция $\log x/x$ убывает при $x \to \infty$, имеем

$$r(T_N,\theta,\varphi_N) \le \frac{k+1}{2}\,\frac{\log \min\limits_{u\,\in\,T_N}|u|}{\min\limits_{u\,\in\,T_N}|u|} + \frac{C}{\min\limits_{u\,\in\,T_N}|u|}. \tag{15}$$

Правая часть неравенства (15) не зависит от θ, а это означает, что $r(T_N,\theta,\varphi_N) \to 0$ равномерно по θ при $N \to \infty$.

Используя определение $r(T_N,\theta,\varphi_N)$ ((5), (6)) и теорему о связи предела и бесконечно малых величин, из (15) получаем

$$\frac{\log|T_N|}{d(T_N,\theta)} - H(\theta) = \alpha_N(\theta)$$

($\alpha_N(\theta)$ стремится к нулю равномерно при $N \to \infty$). Отсюда вытекает справедливость равенства

$$d(T_N,\theta) = \frac{\log\|T_N\|}{H(\theta)+\alpha_N(\theta)}.$$

Тем самым лемма доказана.

Перейдём к формулировке и доказательству основного результата работы.

Теорема. Существует последовательность кодирований φ_N, $N = 1, 2, \ldots$, такая, что избыточность $r_{VB}(T_N, \theta, \varphi_N)$ кодирования φ_N при заданной мощности кодового множества $\|T_N\| \leq k^N$ для произвольного источника $\theta \in \Omega_s$ удовлетворяет неравенству

$$r_{VB}(N, \theta) \leq \frac{k^s(k+1)}{2} H(\theta) \frac{\log \cdot \log \|T_N\|}{\log \|T_N\|} (1 + o(1)),$$

где $o(1) \to 0$ равномерно по θ при $N \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\{T_N\}$, $N = 1, 2, \ldots$, — кодовые множества, построенные по правилу, определяемому соотношениями (12). Как доказано в [17], для избыточности кодирования $r_{VB}(T_N, \theta, \varphi_N)$ при любом источнике θ, $\theta \in \Omega_s$, имеет место неравенство

$$r_{VB}(T_N, \theta, \varphi_N) \leq \frac{k^s(k-1)+2}{2} \frac{\log d(T_N, \theta) + C}{d(T_N, \theta)}, \tag{16}$$

где постоянная C не зависит ни от θ, ни от T_N (теорема 1 из [17]).

Из неравенства (16) и леммы, доказанной выше, вытекает

$$r_{VB}(T_N, \theta, \varphi_N) \leq \frac{k^s(k-1)+2}{2} \frac{\log \dfrac{\log \|T_N\|}{H_s(\theta) + \alpha_N(\theta)} + C}{\dfrac{\log \|T_N\|}{H_s(\theta) + \alpha_N(\theta)}},$$

или, преобразуя второй сомножитель, запишем

$$r(T_N, \theta, \varphi_N) \leq \frac{k^s(k-1)+2}{2} [H(\theta) + \alpha_N(\theta)] \times$$

$$\times \frac{\log \cdot \log \|T_N\| - \log(H(\theta) + \alpha_N(\theta))}{\log \|T_N\|} + \frac{(H_s(\theta) + \alpha_N(\theta))C}{\log \|T_N\|}. \tag{17}$$

Согласно [5, 19, 20] для величины $H_s(\theta)$ выполняются неравенства $0 \leq H(\theta) \leq \log k$; кроме того, $\lim\limits_{N \to \infty} \alpha_N(\theta) = 0$, поэтому при любом θ имеет место неравенство

$$(H(\theta) + \alpha_N(\theta)) \log[H(\theta) + \alpha_N(\theta)] \leq (1 + \log k) \log(1 + \log k).$$

Отсюда и из неравенства (17) следует

$$r_{VB}(T_N, \theta, \varphi_N) \leq \frac{k^s(k+1)}{2} H(\theta) \frac{\log \cdot \log \|T_N\|}{\log \|T_N\|} (1 + o(1)), \tag{18}$$

где $o(1) \to 0$ равномерно по θ при $N \to \infty$.

Теорема доказана.

Следствие. При выполнении неравенства $\frac{H(\theta)}{\log k} < \frac{k^s(k-1)}{k^s(k-1)+2}$ равномерное по выходу кодирование эффективнее равномерного по входу.

Доказательство. При фиксированном источнике $\theta \in \Omega_s$ избыточность равномерного по выходу кодирования, как это было доказано в теореме (соотношение (18)), стремится к нулю со скоростью

$$\frac{k^s(k-1)+2}{2} H(\theta) \frac{\log \cdot \log \|T_N\|}{\log \|T_N\|}, \tag{19}$$

а равномерное по входу кодирование согласно (8) имеет скорость стремления к нулю равную величине

$$\frac{k^s(k-1)}{2}\log k\cdot\log\frac{\log\cdot\log\|T_N\|}{\log\|T_N\|}. \tag{20}$$

При фиксированном N, если $H(\theta)\to 0$, величина (19) также стремится к нулю, при этом величина (20) постоянная. Следовательно, для источников, у которых энтропия мала, равномерное по выходу кодирование всегда лучше равномерного по входу. Из сравнения (19) и (20) видно, что при выполнении неравенства

$$\frac{H(\theta)}{\log k}<\frac{k^s(k-1)}{k^s(k-1)+2} \tag{21}$$

предложенное VB-кодирование эффективнее BV-кодирования. Отметим, что в (21) левая часть неравенства меньше единицы, правая часть как при $s\to 0$, так и при $k\to\infty$, возрастая, стремится к единице, т. е. с увеличением s мы всегда будем выигрывать при VB-кодировании.

Заключение. В данной работе предложен метод неравномерного по входу, но равномерного по выходу кодирования информации, порождаемой неизвестным марковским источником. Доказано, что при таком кодировании среднее число букв выходного алфавита, приходящееся на одну букву входного алфавита, с ростом числа кодовых слов стремится к энтропии. Установлено, что предложенное кодирование лучше равномерного по входу. При $s=0$ полученный результат совпадает с результатом [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабкин В. Ф., Куделова К., Луценко В. Н. и др.** Опыт применения бортовой информационно-вычислительной системы для обработки данных и управления экспериментом «Интершок» // Космические исследования. 1986. **24**, № 2. С. 210–216.
2. **Жилкин М. Ю., Меленцова Н. А., Рябко Б. Я.** Методы выявления скрытой информации, базирующейся на сжатии данных // Вычислительные технологии. 2007. **12**, вып. 4. С. 26–31.
3. **Петров Б. Н., Добрушин Р. Л., Пинскер М. С. и др.** О некоторых взаимосвязях теории информации и теории управления // Проблемы управления и теории информации. 1976. **5**, № 1. С. 31–38.
4. **Хорошевский В. Г.** Архитектура вычислительных систем. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. 512 с.
5. **Шеннон К.** Математическая теория связи. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 243–332.
6. **Krichevsky R. E., Trofimov V. K.** The performance of universal encoding // IEEE Trans. Inform. Theory. 1981. **27**, N 2. P. 199–207.
7. **Потапов В. Н.** Обзор методов неискажающего кодирования дискретных источников // Дискретный анализ и исследование операций. 1999. Сер. 1. **6**, № 4. С. 49–91.
8. **Блох Э. Л.** О передаче бинарной последовательности равномерным кодом // Проблемы передачи информации. 1960. Вып. 5. С. 12–22.
9. **Ходак Г. Л.** Оценки избыточности при пословном кодировании сообщений, порождаемых бернуллиевским источником // Проблемы передачи информации. 1972. **8**, № 2. С. 21–32.

10. **Jelinek F., Shneider K.** On variable-length-to-block coding // IEEE Trans. Inform. Theory. 1972. **18**, N 6. P. 756–774.
11. **Трофимов В. К.** Эффективное кодирование блоками слов различной длины, порожденных известным марковским источником // Обработка информации в системах связи. Л.: ЛЭИС, 1985. С. 9–15.
12. **Ziv J.** Variable-to-fixed length codes are better than fixed-to-variable length codes for Marcov dources // IEEE Trans. Inform. Theory. 1990. **36**, N 4. P. 861–863.
13. **Штарьков Ю. М.** Универсальное кодирование. Теория и алгоритмы. М.: Физматлит, 2013. 288 с.
14. **Трофимов В. К.** Универсальное равномерное по выходу кодирование бернуллиевских источников // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем. 1976. Вып. 29. С. 87–99.
15. **Lawrence T. C.** A new universal coding scheme for coding binary memoryless source // IEEE Trans. Inform. Theory. 1977. **23**, N 4. P. 446–472.
16. **Штарьков Ю. М.** Равномерное по выходу универсальное кодирование дискретных источников без памяти // Проблемы передачи информации. 1991. **27**, № 1. С. 3–13.
17. **Трофимов В. К.** Слабоуниверсальное равномерное по выходу кодирование дискретных стационарных источников // Вестн. СибГУТИ. 2010. № 2. С. 101–111.
18. **Трофимов В. К.** Об эффективности равномерного по выходу кодирования бернуллиевских источников при неизвестной статистике сообщений // Автометрия. 2010. **46**, № 6. С. 32–39.
19. **Фано Р.** Передача информаци. Статистическая теория связи. М.: Мир, 1965. 440 с.
20. **Галлагер Р.** Теория информации и надежная связь. М.: Сов. радио, 1974. 720 с.
21. **Могульский А. А., Трофимов В. К.** Тождество Вальда и стоимость кодирования для цепей Маркова // Докл. VII Всесоюз. конф. по теории кодирования и передачи информации. Москва — Вильнюс, 1978. Ч. 1. Теория информации. С. 112–116.
22. **Трофимов В. К.** Избыточность универсального кодирования произвольных марковских источников // Проблемы передачи информации. 1974. **10**, № 4. С. 16–24.
23. **Ефимов В. М., Резник А. Л., Бондаренко Ю. В.** О минимизации ошибки восстановления непрерывного периодического сигнала при его равномерной дискретизации // Автометрия. 2013. **49**, № 2. С. 3–11.

Поступила в редакцию 5 июня 2014 г.