ПМТФ, № 6, 1962

КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ТВЕРДОЙ ОБОЛОЧКИ С ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ НА УПРУГИХ ОПОРАХ (К ТЕОРИИ КАРУСЕЛЬНОГО ГИДРОКАНАЛА)

Л. М. Мархашов

(*Москва*)

Задача об устойчивости движения твердого маховика на гибком вале была изучена Н. Г. Четаевым методом Рауса [1]. Сунь Цао рассмотрел задачу о волнах на свободной поверхности жидкости внутри твердой оболочки, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг оси неподвижной оси [2].

В этой заметке в линейной постановке рассматривается следующая задача.

Тяжелый сосуд, имеющий круговую цилиндрическую полость, частично заполненную однородной идеальной несжимаемой жидкостью, приводится во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси симметрии полости z'. Ось z' находится под воздействием упругой силы, пропорциональной расстоянию δ между z' и некоторой неизменной вертикальной осью z. Перемещаясь поступательно, оболочка смещается вдоль вертикали на величину, пропорциональную δ^2, так что с точностью до этой величины, ортогональные обеим осям сечения совершают плоское движение.

Предполагается, что в невозмущенном движении жидкость покоится относительно подвижной системы координат $x'y'z'$, вращающейся с угловой скоростью ω, а величина последней столь велика, что свободную поверхность жидкости можно считать в невозмущенном движении цилиндрической.

Если вертикальная составляющая скорости жидкости не возмущается, то задача сводится, таким образом, к изучению малых движений системы в неизменной горизонтальной плоскости xOy, содержащей центр масс оболочки, а также начало O' подвижной системы. Пусть e, O — координаты центра масс оболочки в системе $x'O'y'$. Величина e предполагается малой. Положение точки O' определим в системе xOy полярными координатами δ, ψ, где ψ — угол, отсчитываемый от оси x по часовой стрелке. Ориентировку оси x' определим углом $\varphi = \omega t$, отсчитываемым таким же образом.

1. Составим уравнения движения оболочки. Функция Лагранжа с точностью до постоянного слагаемого и живой силы вертикального смещения системы, имеющей порядок δ^4, имеет вид

$$L = \frac{1}{2} M\, [\dot\delta^2 + \delta^2\dot\psi^2 + 2e\omega\, (\dot\delta \sin(\psi - \omega t) + \delta\dot\psi \cos(\psi - \omega t))] - \frac{c\delta^2}{2}$$

$$c = c_1 - c_0$$

Здесь M — масса оболочки; c_1 — жесткость опор. Согласно предположению, связи системы допускают вертикальные перемещения оболочки, пропорциональные δ^2. Поэтому силовая функция содержит величину $^1/_2\, c_0\delta^2$, где c_0 имеет размерность жесткости, не зависит от δ и e. Уравнения движения оболочки, соответствующие координатам δ и ψ, таковы:

$$M\ddot\delta - M\delta\dot\psi^2 + c\delta - Me\omega^2\cos(\psi - \omega t) = R_2 H \int_0^{2\pi} p\cos(\theta + \omega t - \psi)\, d\theta \qquad (1.1)$$

$$2M\delta\dot\delta\dot\psi + M\delta^2\ddot\psi + Me\delta\omega^2 \sin(\psi - \omega t) = \delta R_2 H \int_0^{2\pi} p \sin(\theta + \omega t - \psi)\, d\theta$$

Здесь H — высота, R_2 — радиус полости. Из условия стационарности поля давлений жидкости, вытекающего из уравнения ее движения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d^2\boldsymbol{\delta}}{dt^2} - \mathbf{r}\omega^2 + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \qquad (1.2)$$

(где $\mathbf{v}$ — относительная скорость), получим для стационарного режима

$$\dot{\psi}^\circ = \omega$$

В возмущенном движении положим

$$\delta = \delta^\circ + \xi, \qquad \psi = \omega t + \eta, \qquad p = p^\circ + p'$$

Из уравнения (1.2) в проекциях на подвижные полярные оси (r, θ) в предположении малости возмущений найдем уравнения возмущенного движения жидкости

$$u_t - 2\omega v = -\frac{1}{\rho} p_r^*, \qquad v_t + 2\omega u = -\frac{1}{r\rho} p_\theta^*, \qquad (ru)_r + v_\theta = 0 \quad (1.3)$$

$$p^* = p - \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 + \rho r(-\delta^\circ\omega^2 \cos\theta + \psi_1 \cos\theta + \psi_2 \sin\theta) \quad (1.4)$$

$$\psi_1 = \ddot{\xi} - \omega^2\xi - 2\omega\delta^\circ\eta, \qquad \psi_2 = 2\omega\dot{\xi} + \delta^\circ(\ddot{\eta} - \omega^2\eta)$$

Отсюда давления

$$p^\circ = \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 + \rho r\delta^\circ\omega^2 \cos\theta, \qquad p^* = p' + \rho r(\psi_1 \cos\theta + \psi_2 \sin\theta) \quad (1.5)$$

Величина δ° определится из первого уравнения (1.1) (второе из этих уравнений удовлетворяется тождественно)

$$\delta^\circ = e\frac{M\omega^2}{c - (M + M')\omega^2} \qquad \left(\frac{c}{M + M'} \neq \omega^2\right)$$

Здесь M' — масса, которую имела бы жидкость, если бы заполняла полость целиком. Так как δ° по смыслу положительна, то при $C - (M + M')\omega^2 < 0$ величине e следует приписывать отрицательное значение.

Полагая δ° величиной малой, но на один порядок ниже ξ, и разделив второе из уравнений (1.1) на $\delta = \delta^\circ + \xi \neq 0$, получим с учетом (1.5) уравнения возмущенного движения оболочки

$$\ddot{\xi} + (c' - \omega^2)\xi - 2\omega\delta^\circ\dot{\eta} = \frac{HR_2}{M + M'}\int_0^{2\pi} p^* \cos\theta \, d\theta$$

$$2\omega\dot{\xi} + \delta^\circ\ddot{\eta} + \delta^\circ(c' - \omega^2)\eta = \frac{HR_2}{M + M'}\int_0^{2\pi} p^* \sin\theta \, d\theta \quad (1.6)$$

$$c' = \frac{c}{M + M'}$$

2. Вычислим давление p^*. Из уравнений движения жидкости (1.3) получим с точностью до малых второго порядка уравнения [2] для u и p^*

$$[u_{\theta\theta} + r^2 u_{rr} + 3ru_r + u]_t = 0 \quad (2.1)$$

$$[r^2 p_{rr}^* + rp_r^* + p_{\theta\theta}^*]_t = 0 \quad (2.2)$$

Граничное условие на поверхности полости

$$u = 0 \quad \text{при } r = R_2 \quad (2.3)$$

Граничное условие на свободной поверхности жидкости получим, дифференцируя (1.4)

$$p_t^* + \rho\omega^2 R_1 u - \rho\delta^\circ\omega^2 v \sin\theta = \rho r(\dot{\psi}_1 \cos\theta + \dot{\psi}_2 \sin\theta) \quad \text{при } r = r_0 \quad (2.4)$$

Граничное условие (2.4) взято на невозмущенной поверхности, являющейся цилиндром радиуса R_1, с осью z. С точностью до величин второго порядка малости радиус-вектор его точек в системе $x'O'y'$

$$r_0 = R_1 - \delta^\circ \cos\theta$$

При помощи уравнений (2.1) и (2.2) нетрудно найти решение системы (1.3), удовлетворяющее условию (2.3)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{\lambda t}, \qquad v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n e^{\lambda t}, \qquad p^* = \sum_{n=1}^{\infty} p_n^* e^{\lambda t}$$

$$u_n = \alpha_n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \qquad v_n = \beta_n (B_n \cos n\theta - A_n \sin n\theta)$$

$$p_n^* = -\frac{\rho r}{n} [(\lambda\beta_n A_n - 2\omega\alpha_n B_n) \cos n\theta + (2\omega\alpha_n A_n + \lambda\beta_n B_n) \sin n\theta]$$

$$\alpha_n = r^{n-1} - R_2^{2n} r^{-n-1}, \qquad \beta_n = r^{n-1} + R_2^{2n} r^{-n-1}$$

Подставим выражения u, v и p^* в условие (2.4). Учитывая, что

$$\alpha_n (r_0) = \alpha_n' + \frac{\delta^\circ}{R_1} (\alpha_n' - n\beta_n') \cos\theta, \qquad \alpha_n' = \alpha_n (R_1) = \frac{R_1^{2n} - R_2^{2n}}{R_1^{n+1}}$$

$$\beta_n (r_0) = \beta_n' + \frac{\delta^\circ}{R_1} (\beta_n' - n\alpha_n') \cos\theta, \qquad \beta_n' = \beta_n (R_1) = \frac{R_1^{2n} + R_2^{2n}}{R_1^{n+1}}$$

получим путем сравнения коэффициентов при $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ систему уравнений

$$D_1 + \tfrac{1}{2}\delta^\circ (D_2^* + \omega^2\beta'_2 A_2) = \rho R_1 \dot\psi_1^\circ$$

$$C_1 + \tfrac{1}{2}\delta^\circ (C_2^* + \omega^2\beta'_2 B_2) = \rho R_1 \dot\psi_2^\circ$$

$$D_2 + \tfrac{1}{2}\delta^\circ (D_1^* - \omega^2\beta'_1 A_1) + \tfrac{1}{2}\delta^\circ (D_3^* + \omega^2\beta'_3 A_3) = -\tfrac{1}{2}\rho\delta^\circ\dot\psi_1^\circ$$

$$C_2 + \tfrac{1}{2}\delta^\circ (C_1^* - \omega^2\beta'_1 B_1) + \tfrac{1}{2}\delta^\circ (C_3^* + \omega^2\beta'_3 B_3) = -\tfrac{1}{2}\delta\rho^\circ\dot\psi_2^\circ$$

$$D_n + \tfrac{1}{2}\delta^\circ (D_{n-1}^* - \omega^2\beta_{n-1}' A_{n-1}) + \tfrac{1}{2}\delta^\circ (D_{n+1}^* + \omega^2\beta'_{n+1} A_{n+1}) = 0$$

$$C_n + \tfrac{1}{2}\delta^\circ (C_{n-1}^* - \omega^2\beta_{n-1}' B_{n-1}) + \tfrac{1}{2}\delta^\circ (C_{n+1}^* + \omega^2\beta'_{n+1} B_{n+1}) = 0$$

$$(n = 3, 4, \ldots)$$

где

$$D_n = \omega^2 R_1 \alpha'_n A_n - \frac{1}{n} (\lambda^2 R_1 \beta'_n A_n + 2\omega\lambda R_1 \alpha'_n B_n)$$

$$D_n^* = \omega^2 A_n (\alpha'_n - n\beta'_n) + \lambda^2 A_n \alpha'_n - 2\omega\lambda\beta'_n B_n$$

$$C_n = \omega^2 R_1 \alpha'_n B_n - \frac{1}{n} (2\omega\lambda R_1 \alpha'_n A_n + \lambda^2 R_1 \beta'_n B_n)$$

$$C_n^* = \omega^2 B_n (\alpha'_n - n\beta'_n) + 2\omega\lambda\beta'_n A_n + \lambda^2 \alpha'_n B_n$$

$$\psi_1^\circ = \psi_1 e^{-\lambda t}, \qquad \psi_2^\circ = \psi_2 e^{-\lambda t}$$

К этим уравнениям следует добавить уравнения движения оболочки, а также интегральное уравнение неразрывности для свободной поверхности в невозмущенном состоянии

$$\int_0^{2\pi} V_n (r_0, \theta)\, d\theta = 0, \quad \text{или} \quad \int_0^{2\pi} (uR_1 - \delta^\circ v \sin\theta)\, d\theta = 0 \qquad \left(V_n = u - \frac{\delta^\circ}{R_1} v \sin\theta\right)$$

Здесь V_n — нормальная составляющая скорости частиц свободной поверхности жидкости. Это дает $^1/_2\ \delta^\circ\alpha'_1 A_1 = 0$; отсюда $A_1 = 0$.

Полагая $\xi = \xi_0 e^{\lambda t}$, $\eta = \eta_0 e^{\lambda t}$, получим уравнение частот свободных колебаний поверхности жидкости

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \omega^2 [1 + (n-1) k_n] & 2\omega\lambda k_n \\ -2\omega\lambda k_n & \lambda^2 + \omega^2 [1 + (n-1) k_n] \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.5)$$

$$k_n = \frac{R_2^{2n} + R_1^{2n}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

и характеристическое уравнение для системы оболочка — жидкость

$$\lambda\delta^\circ \begin{vmatrix} \lambda^2 + c' - \omega^2 & -2\omega\lambda & 0 \\ 2\omega\lambda & \lambda^2 + c' - \omega^2 & \lambda\gamma\beta''_1 \\ \lambda^2 - \omega^2 & -2\omega\lambda & -2\omega\beta'_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.6)$$

$$\beta''_1 = \beta_1 (R_2) = 2, \qquad \gamma = \frac{M'}{M + M'}$$

Из уравнений (2.5) следует, что частоты малых свободных колебаний жидкости, начиная со второй гармоники по θ, не зависят от движения твердой оболочки. Корни уравнения (2.6) не зависят от δ° и не имеют положительных вещественных частей лишь тогда, если все, кроме нулевого. являются чисто мнимыми. Для этого необходимо и достаточно

$$c' > 0, \qquad \omega^2 > c' \frac{\gamma}{2\beta'_1}$$

(Напомним, что всегда $\gamma / 2\beta'_1 < 1$.) С другой стороны, $\omega^2 \neq c'$ является необходимым условием существования стационарного режима. Таким образом, если $c' < 0$ или $c' > 0$, но ω^2 находится внутри интервалов $(O, c'\gamma / 2\beta'_1)$, $(c' - \varepsilon, c' + \varepsilon)$, движение системы оболочка — жидкость неустойчиво.

3. Случай $e = 0$ является особым, так как при этом $\delta^\circ = 0$ и деление второго уравнения системы (1.1) на $\delta = \xi$ недопустимо. (Это видно также и из того, что уравнение (2.6) исчезает при $\delta^\circ = 0$.) В этом случае упомянутое уравнение следует отбросить, так как его левая и правая части являются величинами второго порядка малости.

Уравнение возмущенного движения оболочки получает вид

$$\ddot{\xi} + (c' - \omega^2)\, \xi = \frac{HR_2}{M + M'} \int_0^{2\pi} p^* \cos\theta \, d\theta$$

Условие на свободной поверхности жидкости

$$p_t^* + \rho\omega^2 R_1 u = \rho r (\dot{\psi}_1 \cos\theta + \dot{\psi}_2 \sin\theta) \quad \text{при } r = R_1$$

Уравнение частот свободных колебаний поверхности жидкости имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + k_n\omega^2 & 2\omega\lambda k_n \\ -2\omega\lambda k_n & \lambda^2 + k_n\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

и с точностью до обозначений совпадает с уравнением для случая, когда ось вращения z' неподвижна [2]

Характеристическое уравнение системы оболочка — жидкость

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + c' - \omega^2 & \lambda\gamma\beta''_1 & 0 \\ \lambda (\lambda^2 - \omega^2) & \beta'_1\lambda^2 - \alpha'_1\omega^2 & -2\omega\lambda\alpha'_1 \\ 2\omega\lambda^2 & 2\omega\lambda\alpha'_1 & \beta'_1\lambda^2 - \alpha'_1\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

кубическое относительно λ^2 и необходимое условие устойчивости состоит в отрицательности всех его трех корней. В обоих рассмотренных случаях условия устойчивости не зависят от наполнения. На объем содержащейся в сосуде жидкости накладывается лишь следующее естественное ограничение: он должен быть таков, чтобы радиус свободной поверхности не был исчезающе мал и чтобы свободная поверхность не соприкасалась с боковой стенкой полости.

Поступила 18 VIII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.
2. Сунь Цао. О волнах на поверхности жидкости под действием центробежной силы. ПМТФ, 1960, № 3.