б) Если $k_2 > 0$ и $N^s(0) = 0$, $N^l(0) \neq 0$, «затравка» $\Delta \sim N_2{}^l(0) \ll N_1{}^l(0)$, то

$$N_1{}^l(x) = \frac{N_1{}^l(0) + \Delta + \dfrac{k_1\Delta}{4k_0 - k_1}\exp(\gamma^* N_1{}^l(0)\,x)}{1 + \dfrac{4k_0\Delta}{(4k_0 - k_1)\,N_1{}^l(0)}\exp(\gamma^* N_1{}^l(0)\,x)} \qquad \left(\gamma^* = \frac{(4k_0 - k_1)\,\gamma}{6k_0 v_e \lambda_e k_2}\right) \tag{4.5}$$

Подчеркнем, что зависимость длины нелинейной перекачки x_0 от затухания является слабой. При рассмотрении задачи о многоступенчатом $t \to t' + l \to t' + l' + s$ распаде — п. 3 в зависимости от координаты в квазистационарном случае при $k_2 < 0$ длина нелинейной перекачки увеличивается в $(k_1 + 2k_0) / k_1$ раз, а при $k_2 > 0$ в $4k_0 / k_1$ раз по сравнению с длиной перекачки при одноступенчатом $t \to t' + l$ распаде.

Поступила 3 VIII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Л и п е р о в с к и й В. А., Ц ы т о в и ч В. Н., О распадах продольных ленгмюровских колебаний плазмы на ионно-звуковые, ПМТФ, 1965, № 5.
2. Ф е д о р ч е н к о В. Д., М у р а т о в В. И., Р у т к е в и ч Б. Н. Обмен энергией между высокочастотными и низкочастотными колебаниями в плазме. Ядерный синтез, 1964, т. 4, № 4, стр. 300.
3. Ц ы т о в и ч В. Н. Нелинейная генерация плазменных волн пучком поперечных волн. Ж. техн. физ., 1965, № 5.
4. С и л и н В. П., Р у х а д з е А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. Госатомиздат, 1961.
5. Д а н и л к и н И. С. О нелинейном взаимодействии трех волн с квазистационарной фазой в однородной изотропной плазме без столкновений. Ж. техн. физ., 1966, № 5.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

И. А. Жвания, Р. Я. Кучеров, Л. Э. Рикенглаз

(Сухуми)

В ряде теоретических работ по изучению стационарных состояний плазмы была показана возможность существования стационарных периодических решений самосогласованной задачи [1-5].

Выяснение вопроса об устойчивости этих решений представляет большие математические трудности ввиду неоднородности невозмущенного состояния. В работах [6,7] была рассмотрена сравнительно простая задача о колебаниях плотности заряда в электронных пучках с переменной скоростью. Было найдено, что в определенной области частот волна может нарастать вдоль направления движения пучка.

Периодическая структура плазмы возникает часто в ограниченном объеме, поэтому представляет интерес выяснить, является ли возникающая неустойчивость абсолютной или конвективной. С этой целью в настоящей работе решена задача о развитии возмущения в неоднородном периодическом электронном пучке.

Рассмотрим одномерную задачу о прохождении электронного пучка с постоянной плотностью потока частиц j через однородный ионный фон. В пренебрежении трением стационарное состояние системы описывается уравнениями

$$j = nV, \quad {}^1/_2 mV^2 - e\varphi = {}^1/_2 mV_{\min}^2 - e\varphi_{\min}, \quad d^2\varphi / dx^2 = 4\pi e(n - N) \tag{1}$$

Здесь n, V, e, m — плотность, скорость, заряд и масса электронов соответственно, N — плотность ионов, φ — потенциал. Выбрав начало отсчета в точке минимума потенциала и положив $\varphi_{\min} = 0$, будем искать решение уравнения Пуассона, удовлетворяющее условиям

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = 0 \tag{2}$$

Легко видеть, что решение в бесконечном пространстве будет периодическим для всех значений $\alpha \equiv NV_{\min} / j$ кроме $\alpha = 1$.

Интегрируя уравнение Пуассона, получим следующую неявную зависимость потенциала от координаты:

$$\pm\frac{x}{\lambda\sqrt{2}}=\frac{1}{\alpha^{3/2}}\arccos\frac{\alpha\sqrt{1+\psi}-1}{\alpha-1}-\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\left[\sqrt{1+\psi}-\frac{\alpha}{2}\psi-1\right]^{1/2}$$

$$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{4\pi e^2 J}{mV_{\min}^3},\qquad \varepsilon_0=\frac{mV_{\min}^2}{2},\qquad \psi=\frac{e\varphi}{\varepsilon_0}\tag{3}$$

Разрешая это уравнение относительно ψ в предельном случае малых амплитуд $(1-\alpha\ll 1)$, получим

$$\psi=2(1-\alpha)\left(1-\cos\frac{\alpha^{1/2}x}{\sqrt{2}\lambda}\right)\tag{4}$$

Рассмотрим устойчивость этого периодического решения по отношению к малым продольным возмущениям. Малые колебания электронного пучка описываются следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[V_0(x)V]=\frac{e}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[V_0(x)n]+\frac{\partial}{\partial x}[n_0(x)V]=0\tag{5}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=4\pi en$$

Здесь V, n, φ — возмущенные, а V_0, n_0, φ_0 — невозмущенные значения скорости, плотности и потенциала.

Начальным условием служит задание возмущения при $t=0$

$$V(x,0)=V_1(x),\qquad n(x,0)=n_1(x)\tag{6}$$

Предполагаем, что начальные возмущения отличны от нуля в конечной области пространства, тогда граничным условием является отсутствие возмущения на бесконечности в конечный момент времени

$$V(\pm\infty,\ t)=n(\pm\infty,\ t)=\varphi(\pm\infty,\ t)=0\tag{7}$$

Умножая уравнения (5), (7) на e^{pt} и интегрируя от 0 до ∞, получим

$$pv+\frac{d}{dx}(V_0v)-\frac{e}{m}\frac{d\Phi}{dx}=V_1(x),\quad p\rho+\frac{d}{dx}(V_0\rho)+\frac{d}{dx}(n_0v)=n_1(x),\ \frac{d^2\Phi}{dx^2}=4\pi e\rho\tag{8}$$

Здесь через v, Φ, ρ обозначено изображение V, φ, n по Лапласу.

Из системы (8) исключим Φ и ρ и будем искать $u(x,p)$ в виде

$$v(x,p)=\gamma(x,p)\,y(x,p)\tag{9}$$

$$\gamma(x,p)=\frac{1}{V_0(x)}\exp\left(-p\int_0^x\frac{dx'}{V_0(x')}\right)$$

В результате преобразований получим

$$y''+f(x)y=\Gamma(x,p)\tag{10}$$

$$f(x)=\frac{4\pi e^2n_0(x)}{mV_0^2(x)},\quad \Gamma(x,p)=\frac{1}{V_0^2(x)\gamma(x,p)}\left(\frac{4\pi e^2}{m}\int_{-\infty}^{x}n_1(x')\,dx'+pV_1+V_0\frac{dV_1}{dx}\right)$$

Обозначим через $y_1(x)$, $y_2(x)$, фундаментальные решения однородного уравнения (10). Тогда для $v(x,p)$ получим

$$v(x,p)=\frac{1}{WV_0(x)}\exp\left(-p\int_0^x\frac{dx'}{V_0(x')}\right)\int_{-\infty}^{x}\Gamma(x',p)K(x,x')\,dx'\tag{11}$$

Здесь

$$W=y_1y_2'-y_2y_1'=\text{const},\qquad K(x,x')=y_2(x)y_1(x')-y_1(x)y_2(x')$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа и меняя порядок интегрирования, найдем

$$V(x, t) = \frac{1}{WV_0(x)} \left\{ \int_{-\infty}^{x} \frac{K(x, x')}{V_0(x')} L(x')\, \delta\left(t - \int_{x'}^{x} \frac{dx''}{V_0(x'')}\right) dx' + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{x} \frac{K(x, x')}{V_0(x')} V_1(x') \frac{d}{dt} \delta\left(t - \int_{x'}^{x} \frac{dx''}{V_0(x'')}\right) dx' \right\}$$

$$L(x') = \frac{4\pi e^2}{m} \int_{-\infty}^{x} n_1(x')\, dx' + V_0 \frac{dV_1}{dx'} \qquad (12)$$

и после интегрирования по x'

$$V(x, t) = \frac{1}{WV_0(x)} \left\{ K(x, x')\, L(x') + \frac{d}{dx} [K(x, x')\, V_1(x')] \right\} \qquad \left(t = \int_{x'}^{x} \frac{dx''}{V_0(x'')}\right) \quad (13)$$

Так как начальное возмущение отлично от нуля лишь в конечной области пространства ($|x| < x_0$), то, как видно из формулы (13), для любого фиксированного значения $x = x_1$ найдется такое значение момента времени t_1, что $|x'| > x_0$ при $t > t_1$ и скорость $V(x, t)$ обратится в нуль. Для другой точки $x = x_2$ ($x_2 > x_1$) соответствующий момент времени $t_2 > t_1$. Это означает, что возмущение сносится в сторону возрастающих x. При помощи формулы (13) легко убедиться, что скорость сноса равна скорости невозмущенного пучка.

Вопрос о том, будет возмущение при этом нарастать или убывать, определяется поведением $K(x, x')$ как функции x'. Например, возрастание $K(x, x')$ свидетельствует о конвективной неустойчивости пучка. Полученное решение теряет смысл, если происходит опрокидывание волны с образованием многопотокового течения. Необходимым условием опрокидывания будет $dx / dV = d^2x / dV^2 = 0$. Легко показать (см. формулу (13)), что для всех достаточно гладких начальных значений n_1 и V_1 эти требования не выполняются.

Аналитическое исследование свойств фундаментальных решений уравнения (10) связано с большими математическими трудностями. Поэтому ограничимся случаем малых амплитуд, когда это уравнение сводится к уравнению Матье

$$\frac{d^2y}{dz^2} + 4(1 - 3(\alpha - 1)\cos 2z)\, y = 0 \qquad \left(z = \frac{x\alpha^{3/2}}{2\sqrt{2\lambda}},\ 1 - \alpha \ll 1\right) \qquad (14)$$

Как известно [8] это уравнение имеет одно нарастающее решение. Пользуясь методом Уиттекера [8], будем искать решение в виде $y = e^{\mu z}\Phi(z, \sigma)$, где μ, σ — новые параметры, а Φ — периодическая функция. В результате получим

$$y(z) \approx A_1 \exp\frac{\sqrt{7}\, q^2 z}{48} \sin 2z + A_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{7}\, q^2 z}{48}\right) \cos 2z \qquad (q = 6(\alpha - 1)) \qquad (15)$$

Из формулы (15) следует, что инкремент нарастания при малых амплитудах пропорционален квадрату амплитуды.

Поступила 25 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Bernstein I. B., Greene J. M., Kruskal M. D. Exact Nonlinear Plasma Oscillations. Phys. Rev., 1951, vol. 108, p. 546.
2. Auer P. L., Hurwitz N. J. Space Charge Neutralization by Positive Jons in Diods. T. Appl. Phys., 1959, vol. 30, p. 161.
3. Лебедев С. Д., Стависский Ю. Я., Бондаренко И. И., Маев С. А. Колебания плазмы при нейтрализации ионных пучков. Ж. техн. физ., 1961, т. 31, стр. 1202.
4. Ozawa Y., Kaji J., Kitom M. Nonlinear stationary plasma wave. J. Nucl. Energy C., 1964, vol. 6, p. 227.
5. Кучеров Р. Я., Рикенглаз Л. Э. О периодической структуре разряженной плазмы. ПМТФ, 1965, № 5.
6. Блиох П. В., Файнберг Я. Ю. О волнах плотности заряда в электронных пучках с переменной скоростью. Ж. техн. физ., 1956, т. 26, стр. 530.
7. Rydbeck O. E. H. Some Wave Propagation of the Electron Beam in Vacuum and in Ionized Media. Nuovo amento Supplemento, 1953, vol. 10, p. 101.
8. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. Москва, НИЛ, 1953.