УДК 536.46

ПЕРЕНОС ТЕПЛА НА ПЛАСТИНЕ, ПОМЕЩЕННОЙ В ПОРИСТУЮ СРЕДУ, С УЧЕТОМ КОНВЕКТИВНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

С. Мухопадхай, И. Ч. Мандал

Университет г. Бурдван, 713104 Бурдван, Индия
E-mails: swati_bumath@yahoo.co.in, iswar.chandra2010@gmail.com

С использованием модели Дарси — Форгеймера — Бринкмана исследуется процесс теплопереноса в вязкой несжимаемой жидкости в окрестности пластины, помещенной в пористую среду, с учетом конвективных граничных условий. Система дифференциальных уравнений в частных производных преобразуется к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, и находятся автомодельные решения. Уравнения, записанные в автомодельных переменных, решаются численно. Показано, что с увеличением параметра конвекции увеличивается температура поверхности, а с увеличением числа Прандтля увеличивается скорость теплообмена.

Ключевые слова: вынужденное конвективное течение, пористая среда, модель Дарси — Форгеймера — Бринкмана, автомодельные решения, конвективные граничные условия.

DOI: 10.15372/PMTF20160523

Введение. Перенос тепла в пористой среде используется в геотермальных процессах, при добыче нефти, обработке металлов, проектировании изолированных систем, в зернохранилищах, теплообменниках, каталитических реакторах и т. д. [1]. Анализ течений в пористой среде проведен в работах [2–4] и др. Для изучения свободно-конвективного течения вблизи вертикальной пластины, помещенной в пористую среду, авторы работы [2] получили автомодельные решения задачи теплообмена в плотине (дамбе). В [5] рассматривался процесс смешанной конвекции вблизи вертикальной пластины в насыщенной пористой среде. В [6, 7] исследовались течения в режиме смешанной конвекции вблизи вертикальной пластины, подчиняющиеся и не подчиняющиеся закону Дарси. Как известно, наличие пористости в ламинарном пограничном слое при обтекании пластины создает сопротивление течению, пропорциональное его скорости, что приводит к увеличению теплообмена на поверхности пластины. В работе [8] изучалось смешанное (свободное и вынужденное) конвективное течение вблизи полубесконечной пластины при неравномерном распределении температуры ее поверхности. Авторами [9] с использованием законов, отличных от законов Дарси, для описания течения вблизи вертикальной пластины обнаружено существенное влияние граничных условий и инерционных эффектов на скорость жидкости и скорость теплообмена на поверхности. В [10, 11] изучалась естественная конвекция в насыщенной пористой среде. В [10] с использованием интегрального метода задача, сформулированная в [7], обобщена на случай смешанной конвекции в режиме фильтрации Дарси.

Эффекты, возникающие при использовании законов, отличных от закона Дарси, для задач о вынужденном конвективном теплопереносе в окрестности пластины в высокопористых средах изучались в работе [12]. В [13] с помощью блочного метода Келлера для построения решения нелинейных уравнений исследовалось влияние магнитного поля и излучения на течение с вынужденным конвективным переносом тепла. Авторы [14] рассматривали вынужденные конвективные течения, подчиняющиеся закону Дарси, пренебрегая нелинейным членом Форгеймера. В [15] получены аналитические решения задачи о нестационарном магнитогидродинамическом конвективном тепло- и массообмене вблизи вертикальной проницаемой пластины и задачи о совместном влиянии излучения и химических реакций с использованием условий проскальзывания на границе. В работе [16] исследовалось течение с проскальзыванием в окрестности пластины при наличии магнитного поля, в [17] изучалось течение типа течения Дарси с условиями проскальзывания, в которых пренебрегалось членом Форгеймера. В [18] задача, рассмотренная в [14], решалась путем добавления в уравнение сохранения импульса для описания инерционных эффектов в пористой среде квадратичного члена, используемого в модели Дарси — Форгеймера. В [19] с использованием модели магнитогидродинамического течения вблизи пористой пластины исследовалась диффузия химически активного раствора в пограничном слое для случая химических реакций n-го порядка.

Для описания фильтрации в пористой среде используется закон Дарси, представляющий собой эмпирическую формулу, связывающую градиент давления, кажущееся сопротивление вязкой жидкости и ускорение свободного падения. Течение в пористой среде начинает отличаться от течения, моделируемого с использованием закона Дарси, при значениях числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1 \div 10$, вычисленных для диаметра пор [20]. При изучении течений в пористой среде с высокой проницаемостью авторы [21, 22] добавили в закон Дарси члены, используемые в классическом законе сопротивления.

Для описания теплообмена используются два типа граничных условий: заданная температура на границе или заданный тепловой поток. В некоторых случаях поверхностный теплообмен зависит от температуры поверхности. В наиболее простом случае задается линейная связь между поверхностным потоком тепла и температурой. Такие ситуации имеют место в сопряженных задачах (см., например, [23]) и при ньютоновском нагреве поверхности [24]. Нагрев по закону Ньютона, применяемый во многих инженерных устройствах, рассматривался в [25]. Задачи теплопереноса с учетом конвективных граничных условий исследовались в работах [26–29].

В настоящей работе, являющейся продолжением работы [18], исследуются течение в пограничном слое и теплообмен на плоской пластине с учетом конвективных граничных условий.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двумерное стационарное ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в приближении пограничного слоя в режиме вынужденной конвекции на плоской пластине (толщина пластины значительно меньше ее ширины), помещенной в пористую среду. В дифференциальных уравнениях при описании движения в пористой среде используется модель Дарси — Форгеймера — Бринкмана. В приближении пограничного слоя с учетом теплообмена основные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\nu}{k}\,(u - u_\infty) - \frac{k'}{\sqrt{k}}\,(u^2 - u_\infty^2); \tag{2}$$

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\varkappa}{\rho c_p}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{3}$$

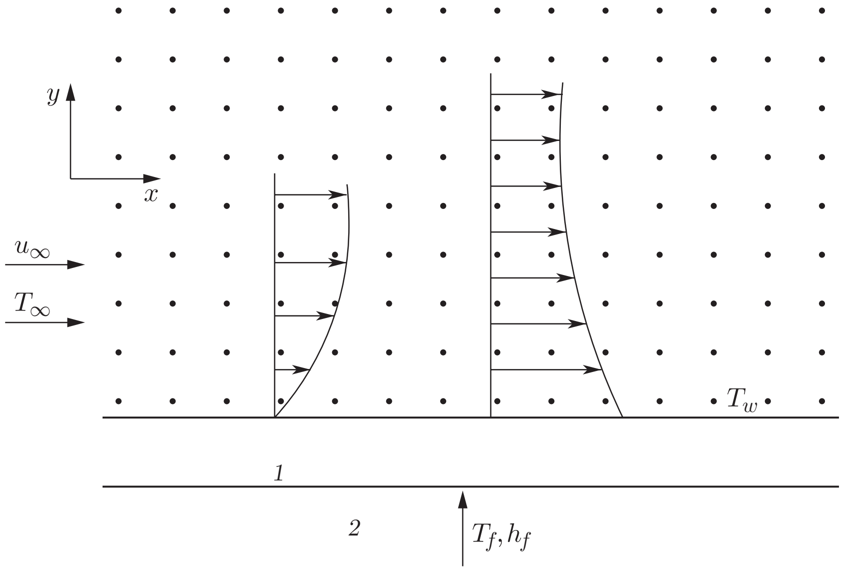

Рис. 1. Схема течения:
1 — пластина, *2* — горячая жидкость

Здесь u, v — компоненты скорости в направлениях x, y соответственно; $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость; μ, ρ — динамическая вязкость и плотность жидкости; $k = k_0 x$ — проницаемость в законе Дарси для пористой среды; k_0 — начальная проницаемость; $k' = k'_0/\sqrt{x}$ — коэффициент сопротивления в законе Форгеймера; k'_0 — константа Форгеймера, экспериментально измеряемая для различных пористых сред; T — температура; $\varkappa$ — теплопроводность жидкости; u_∞ — скорость потока на бесконечности; c_p — теплоемкость при постоянном давлении. Вследствие того что скорость течения мала, тепловыделением, возникающим при наличии вязкости, пренебрегается. Координата x отсчитывается от кромки пластины, ось y направлена по нормали к пластине (рис. 1).

Будем полагать, что пластина нагревается снизу горячей жидкостью с постоянной температурой T_f и коэффициентом теплопереноса h_f. Граничные условия на поверхности пластины представим в виде [26, 28]

$$y = 0: \qquad u = 0, \quad v = 0, \quad -\varkappa \frac{\partial T}{\partial y} = h_f(T_f - T_w),$$
$$y \to \infty: \qquad u = u_\infty, \quad T = T_\infty,$$

где T_w – температура стенки; T_∞ — температура потока на бесконечности, полагаемая постоянной ($T_f > T_w > T_\infty$). Для построения автомодельного решения положим

$$h_f = cx^{-1/2}$$

(c — константа).

Рассмотрим соотношения для u, v

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{4}$$

где ψ — функция тока.

Введем безразмерные переменные

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty}, \tag{5}$$

$$\eta = y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}, \qquad \psi = \sqrt{u_\infty \nu x}\, f(\eta). \tag{6}$$

С использованием соотношений (4)–(6) уравнения (1)–(3) можно представить в виде

$$f''' + \frac{1}{2}\, ff'' - k_1(f' - 1) - k_2(f'^2 - 1) = 0; \qquad (7)$$

$$\frac{\theta''}{\mathrm{Pr}} + \frac{1}{2}\, f\theta' = 0, \qquad (8)$$

где $k_1 = 1/(\mathrm{Da}_x \,\mathrm{Re}_x) = \nu/(k_0 u_\infty)$ — параметр пористости среды; $\mathrm{Da}_x = k/x^2 = k_0/x$ — локальное число Дарси; $\mathrm{Re}_x = u_\infty x/\nu$ — локальное число Рейнольдса; $k_2 = k_0'/\sqrt{k_0}$ — инерциальный параметр; $\mathrm{Pr} = \mu c_p/\varkappa$ — число Прандтля.

В безразмерных переменных граничные условия принимают вид

$$\eta = 0: \qquad f' = 0, \quad f = 0, \quad \theta' = -\gamma(1 - \theta),$$

$$\eta \to \infty: \qquad f' = 1, \quad \theta = 0,$$

где $\gamma = (c/\varkappa)\sqrt{\nu/u_\infty}$ — параметр конвекции.

2. Результаты исследования и их обсуждение. С использованием классического метода Рунге — Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0{,}01$ уравнения (7), (8) с граничными условиями преобразовывались к задаче Коши. Полученные уравнения интегрировались с помощью метода “стрельбы”.

Расчеты выполнялись для различных значений параметра пористости среды k_1, инерциального параметра k_2, параметра конвекции γ и числа Прандтля Pr. Полученные результаты представлены на рис. 2–7. Также было проведено сравнение полученных результатов с данными работ [26, 28] для соответствующих значений коэффициента теплопереноса $-\theta'(0)$ (см. таблицу). Из таблицы следует, что при $\mathrm{Pr} = 0{,}10$; $0{,}72$ полученные результаты хорошо согласуются с результатами работы [28]. При $\mathrm{Pr} = 0{,}72$ они также хорошо согласуются с данными [26]. При $\mathrm{Pr} = 0{,}1$ результаты настоящей работы и работы [26] различаются, что обусловлено малой областью расчета, использованной в [26].

На рис. 2,*а* видно, что толщина пограничного слоя уменьшается. В этом случае при увеличении проницаемости среды увеличивается горизонтальная составляющая скорости. Эта тенденция наблюдается при двух рассмотренных значениях параметра k_2. Также видно, что при увеличении значения инерциального параметра k_2 скорость внутри пограничного слоя также увеличивается (см. рис. 2,*б*), а толщина пограничного слоя уменьшается. Очевидно, что различие картин течения, полученных с использованием рассматриваемой

Значения коэффициента теплопереноса $-\theta'(0)$ в непористой среде
при различных значениях γ и числа Прандтля Pr

γ	$-\theta'(0)$					
	Pr = 0,10			Pr = 0,72		
	Данные работы [26]	Данные работы [28]	Данные настоящей работы	Данные работы [26]	Данные работы [28]	Данные настоящей работы
0,05	0,0373	0,036 844	0,036 835	0,0428	0,042 767	0,042 765
0,10	0,0594	0,058 338	0,058 329	0,0747	0,074 724	0,074 723
0,20	0,0848	0,082 363	0,082 359	0,1193	0,119 295	0,119 296
0,40	0,1076	0,103 720	0,103 721	0,1700	0,169 994	0,169 992
0,60	0,1182	0,113 533	0,113 529	0,1981	0,198 051	0,198 053
0,80	0,1243	0,119 170	0,119 172	0,2159	0,215 864	0,215 863
1,00	0,1283	0,122 830	0,122 833	0,2282	0,228 178	0,228 179
5,00	0,1430	0,136 215	0,136 217	0,2791	0,279 131	0,279 133

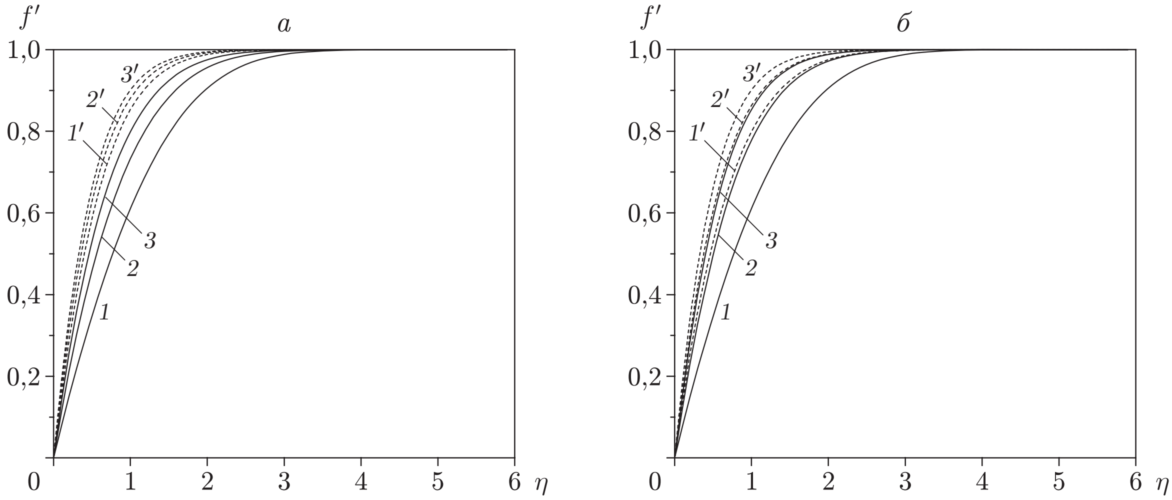

Рис. 2. Профили скорости при Pr = 0,7, $\gamma = 0{,}2$ и различных значениях параметра пористости k_1 и инерциального параметра k_2:
а — *1–3* — $k_2 = 0{,}1$, *1′–3′* — $k_2 = 0{,}9$; *1, 1′* — $k_1 = 0{,}1$, *2, 2′* — $k_1 = 0{,}5$, *3, 3′* — $k_1 = 0{,}9$;
б — *1–3* — $k_1 = 0{,}1$, *1′–3′* — $k_1 = 0{,}9$; *1, 1′* — $k_2 = 0{,}1$, *2, 2′* — $k_2 = 0{,}5$, *3, 3′* — $k_2 = 0{,}9$

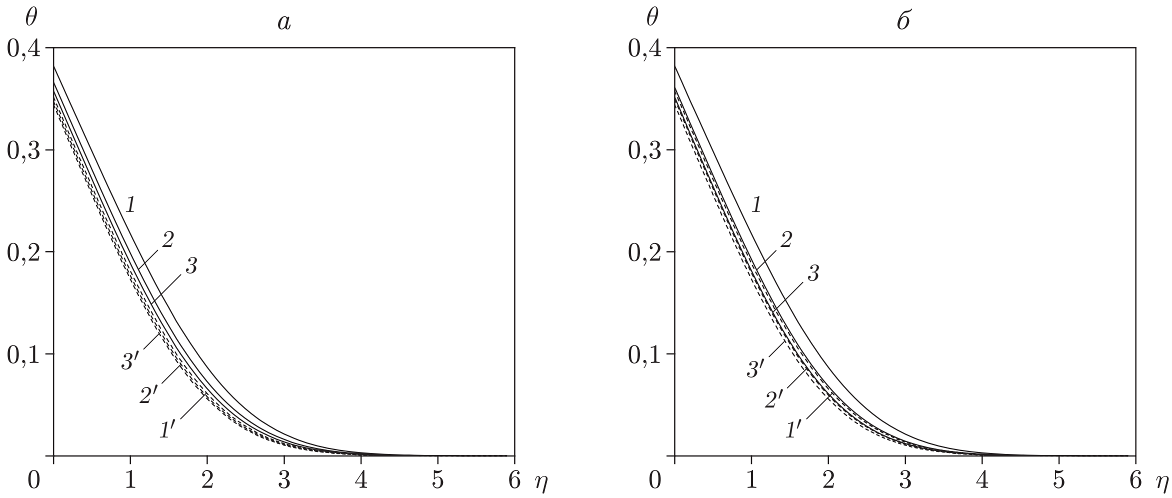

Рис. 3. Профили температуры при Pr = 0,7, $\gamma = 0{,}2$ и различных значениях параметра пористости k_1 и инерциального параметра k_2 (обозначения те же, что на рис. 2)

модели и модели Дарси, обусловлено наличием в первой из них члена Форгеймера, который оказывает значительное влияние на распределение скорости.

На рис. 3 видно, что при увеличении k_1, k_2 температура внутри пограничного слоя уменьшается, скорость теплопереноса увеличивается (тепловой пограничный слой становится тоньше). Скорость охлаждения значительно больше при больших значениях инерциального параметра k_2 (см. рис. 3,*б*). На рис. 4 приведены профили температуры и градиента температуры при различных значениях параметра конвекции γ. Видно, что при увеличении γ температура увеличивается, градиент температуры уменьшается. При $\gamma \to \infty$ решение стремится к классическому решению для постоянного значения температуры поверхности. Это следует из граничных условий (8), согласно которым $\theta(0)$ уменьшается до единицы при $\gamma \to \infty$. Для покоящейся жидкости и фиксированного значения скорости

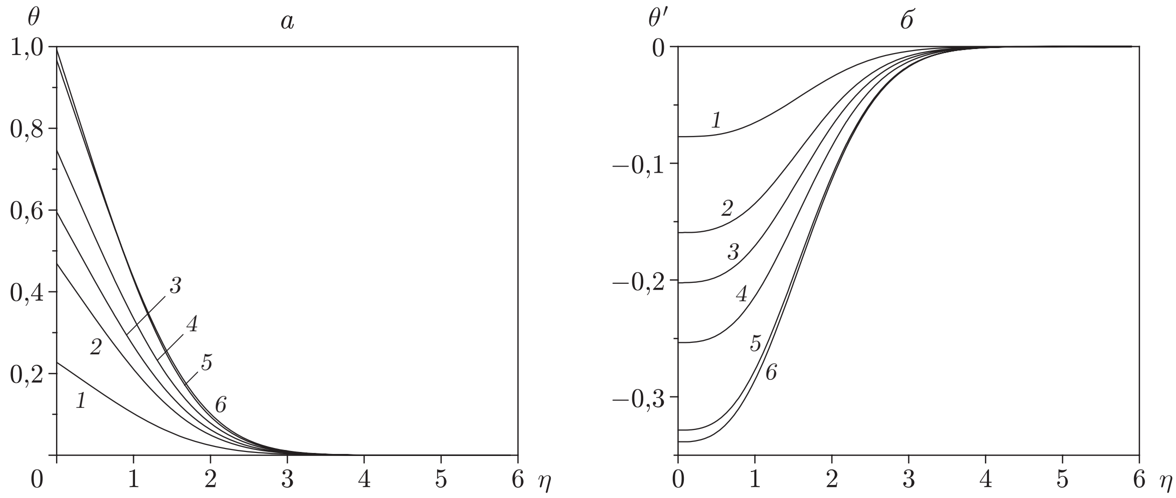

Рис. 4. Профили температуры (a) и градиента температуры ($б$) при $k_1 = k_2 = 0{,}2$, $\mathrm{Pr} = 0{,}7$ и различных значениях параметра конвекции γ:
1 — $\gamma = 0{,}1$, *2* — $\gamma = 0{,}3$, *3* — $\gamma = 0{,}5$, *4* — $\gamma = 1$, *5* — $\gamma = 10$, *6* — $\gamma = 100$

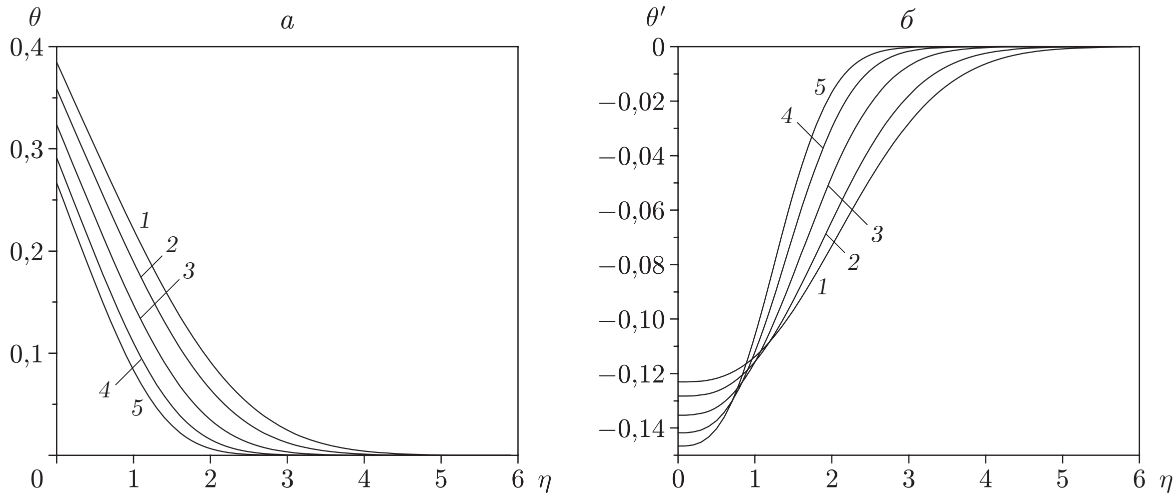

Рис. 5. Профили температуры (a) и градиента температуры ($б$) при $k_1 = k_2 = 0{,}2$, $\gamma = 0{,}2$ и различных значениях числа Прандтля:
1 — $\mathrm{Pr} = 0{,}6$, *2* — $\mathrm{Pr} = 0{,}8$, *3* — $\mathrm{Pr} = 1{,}2$, *4* — $\mathrm{Pr} = 1{,}8$, *5* — $\mathrm{Pr} = 2{,}5$

на бесконечности в любой точке x значение γ прямо пропорционально значению коэффициента теплопереноса h_f в горячей жидкости. Термическое сопротивление для горячей жидкости обратно пропорционально h_f. Таким образом, при увеличении параметра γ конвективное сопротивление горячей жидкости уменьшается и как следствие температура поверхности $\theta(0)$ увеличивается (см. рис. 4,a).

На рис. 5 приведены профили температуры и градиента температуры при различных значениях числа Прандтля. Видно, что при увеличении числа Прандтля температура уменьшается (см. рис. 5,a), градиент температуры сначала также уменьшается, при дальнейшем увеличении числа Прандтля — увеличивается (см. рис. 5,$б$), и как следствие увеличивается скорость теплообмена на поверхности. Это обусловлено тем, что жидкость с большим значением числа Прандтля обладает меньшей теплопроводностью.

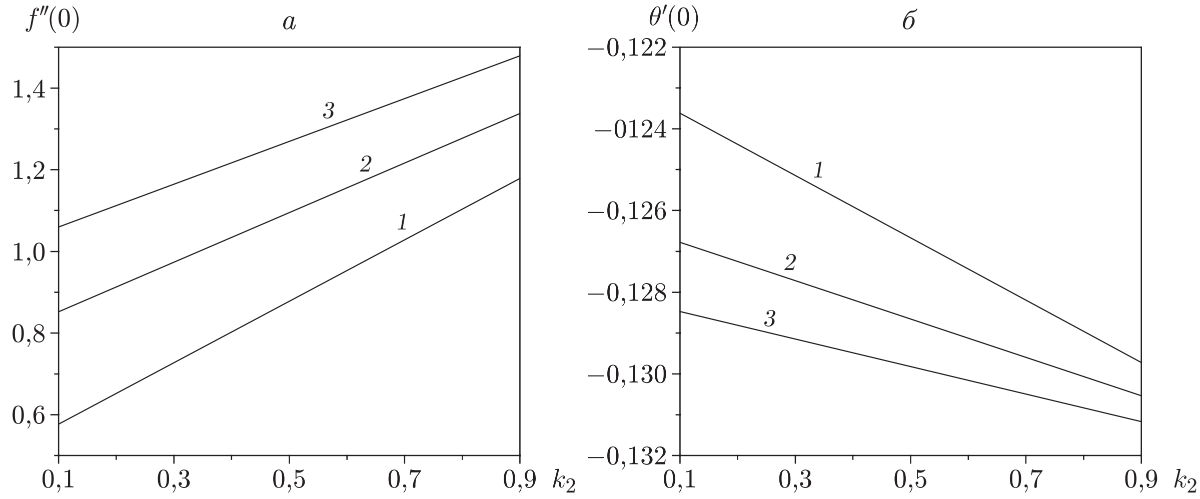

Рис. 6. Зависимости коэффициента поверхностного трения (a) и коэффициента теплопереноса ($б$) от инерциального параметра k_2 при $\Pr = 0{,}7$, $\gamma = 0{,}2$ и различных значениях параметра пористости k_1:
1 — $k_1 = 0{,}1$, *2* — $k_1 = 0{,}5$, *3* — $k_1 = 0{,}9$

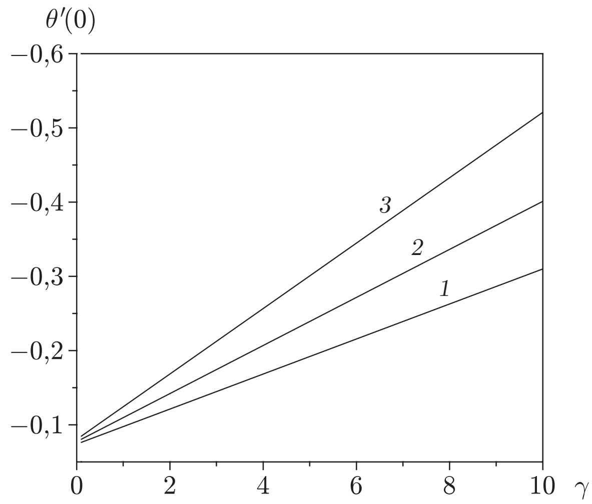

Рис. 7. Зависимость коэффициента теплопереноса от параметра конвекции γ при $k_1 = k_2 = 0{,}2$ и различных значениях числа Прандтля:
1 — $\Pr = 0{,}6$, *2* — $\Pr = 1{,}2$, *3* — $\Pr = 2{,}5$

На рис. 6 приведены зависимости коэффициента поверхностного трения и коэффициента теплопереноса от параметра пористости и инерциального параметра. Видно, что при увеличении обоих параметров коэффициент поверхностного трения и коэффициент теплопереноса увеличиваются. Коэффициент теплопереноса $-\theta'(0)$ также увеличивается при увеличении числа Прандтля и параметра конвекции γ (рис. 7). Это обусловлено тем, что процесс переноса тепла происходит от более нагретой поверхности к менее нагретой жидкости, так как $T_f > T_\infty$.

Заключение. В работе с учетом конвективных граничных условий выполнен анализ теплопереноса для стационарного течения в режиме вынужденной конвекции в приближении пограничного слоя на пластине, помещенной в пористую среду. Течение описывается с помощью модели Дарси — Форгеймера — Бринкмана. Обнаружено уменьшение температуры при увеличении параметра пористости. Показано существенное влияние инерционного параметра на картину течения. При увеличении инерциального параметра скорость теплопереноса увеличивается. Установлено, что член Форгеймера вносит значительный вклад в модель фильтрации. Показано, что с увеличением параметра конвекции температура стенки увеличивается. Зафиксировано также увеличение интенсивности теплопереноса при увеличении числа Прандтля.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bachok N., Ishak A., Pop I.** Mixed convection boundary layer flow over a permeable vertical flat plate embedded in an anisotropic porous medium // Math. Problems Engng. 2010. V. 2010. 659023. DOI: 10.1155/2010/659023.
2. **Cheng P., Minkowycz W. J.** Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a disk // J. Geophys. Res. 1977. V. 82. P. 2040–2044.
3. **Cheng P.** The influence of lateral mass flux on a free convection boundary layers in saturated porous medium // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1977. V. 20. P. 201–206.
4. **Wilks G.** Combined forced and free convection flow on vertical surfaces // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1973. V. 16. P. 1958–1964.
5. **Lai F. C., Kulacki F. A.** Non-Darcy mixed convection along a vertical wall in a saturated porous medium // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1991. V. 113. P. 252–255.
6. **Hsu C. T., Cheng P.** The Brinkman model for natural convection about a semi-infinite vertical plate in a porous medium // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1985. V. 28. P. 683–697.
7. **Vafai K., Tien C. L.** Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1981. V. 24. P. 195–203.
8. **Soundalgekar V. M., Takhar H. S., Vighnesam N. V.** The combined free and forced convection flow past a semi-infinite plate with variable surface temperature // Nuclear Engng Design. 1988. V. 110. P. 95–98.
9. **Hong J. T., Yamada Y., Tien C. L.** Effect of non-Darcian and non-uniform porosity on vertical plate natural convection in porous media // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1987. V. 109. P. 356–382.
10. **Kaviany M.** Boundary-layer treatment of forced convection heat transfer from a semi-infinite flat plate embedded in porous media // J. Heat Mass Transfer. 1987. V. 109. P. 345–349.
11. **Chen K. S., Ho J. R.** Effects of flow inertia on vertical natural convection in saturated porous media // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1988. V. 29. P. 753–759.
12. **Kumari M., Pop I., Nath G.** Non-Darcian effects on forced convection heat transfer over a flat plate in a highly porous medium // Acta Mech. 1990. V. 84. P. 201–207.
13. **Damesh R. A., Duwairi H. M., Al-Odat M.** Similarity analysis of magnetic field and radiation effects on forced convection flow // Turkish J. Engng Environment. Sci. 2006. V. 30. P. 83–89.
14. **Mukhopadhyay S., Layek G. C.** Radiation effect on forced convective flow and heat transfer over a porous plate in a porous medium // Meccanica. 2009. V. 44. P. 587–597.
15. **Pal D., Talukdar B.** Perturbation analysis of unsteady magnetohydrodynamic convective heat and mass transfer in a boundary layer slip flow past a vertical permeable plate with thermal radiation and chemical reaction // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2010. V. 15. P. 1813–1830.
16. **Bhattacharyya K., Mukhopadhyay S., Layek G. C.** MHD boundary layer slip flow and heat transfer over a flat plate // Chinese Phys. Lett. 2011. V. 28, N 2. 024701.

17. **Bhattacharyya K., Mukhopadhyay S., Layek G. C.** Steady boundary layer slip flow and heat transfer over a flat porous plate embedded in a porous media // J. Petroleum Sci. Engng. 2011. V. 78. P. 304–309.
18. **Mukhopadhyay S., De P. R., Bhattacharyya K., Layek G. C.** Forced convective flow and heat transfer over a porous plate in a Darcy — Forchheimer porous medium in presence of radiation // Meccanica. 2012. V. 47, iss. 1. P. 153–161. DOI: 10.1007/s11012-011-9423-3.
19. **Bhattacharyya K., Layek G. C.** Similarity solution of MHD boundary layer flow with diffusion and chemical reaction over a porous flat plate with suction/blowing // Meccanica. 2012. V. 47, iss. 4. P. 1043–1048. DOI: 10.1007/s11012-011-9461-x.
20. **Ishak A., Nazar R., Pop I.** Steady and unsteady boundary layers due to a stretching vertical sheet in a porous medium using Darcy — Brinkman equation model // Intern. J. Appl. Mech. Engng. 2006. V. 11, N 3. P. 623–637.
21. **Brinkman H. C.** A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Appl. Sci. Res. 1947. N 1. P. 27–34.
22. **Chen C. K., Chen C. H., Minkowycz W. J., Gill U. S.** Non-Darcian effects on mixed convection about a vertical cylinder embedded in a saturated porous medium // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1992. V. 35. P. 3041–3046.
23. **Merkin J. H., Pop I.** Conjugate free convection on a vertical surface // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1996. V. 39. P. 1527–1534.
24. **Merkin J. H.** Natural-convection boundary-layer flow on a vertical surface with Newtonian heating // Intern. J. Heat Fluid Flow. 1994. V. 15. P. 392–398.
25. **Yacob N. A., Ishak A., Pop I., Vajravelu K.** Boundary layer flow past a stretching/shrinking surface beneath an external uniform shear flow with a convective surface boundary condition in a nanofluid // Nanoscale Res. Lett. 2011. V. 6. P. 314.
26. **Aziz A.** A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14. P. 1064–1068.
27. **Makinde O. D., Aziz A.** MHD mixed convection from a vertical plate embedded in a porous medium with a convective boundary condition // Intern. J. Thermal Sci. 2010. V. 49. P. 1813–1820.
28. **Ishak A.** Similarity solutions for flow and heat transfer over a permeable surface with convective boundary condition // Appl. Math. Comput. 2010. V. 217. P. 837–842.
29. **Magyari E.** Comment on “A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition” by A. Aziz (Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14. P. 1064–1068) // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2011. V. 16. P. 599–601.

Поступила в редакцию 22/II 2014 г.,
в окончательном варианте — 19/X 2014 г.