УДК 532.516

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ СВОБОДНОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ

В. В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: pukhnachev@gmail.com

Исследуется равновесие свободной невесомой пленки жидкости, закрепленной по плоскому контуру и подверженной действию термокапиллярных сил. Закономерности поведения свободных жидких пленок важны для понимания процессов, происходящих в пенах. Уравнения равновесия неизотермической невесомой свободной пленки выведены в двух предельных случаях: температура пленки считается известной функцией координат; свободная поверхность пленки теплоизолирована. В плоском и осесимметричном случаях найдены условия существования решений возникающих нелинейных краевых задач и изучены их свойства. В общем случае получено приближенное решение задачи о равновесии при условии малости аналога числа Марангони.

Ключевые слова: свободная поверхность, термокапиллярный эффект, длинноволновое приближение, стационарные решения.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет слой Ω, верхняя и нижняя границы которого Γ^+ и Γ^- свободны, а боковая поверхность примыкает к твердой цилиндрической поверхности Σ с образующими, параллельными оси x_3. Ниже приняты следующие обозначения: x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты, v_1, v_2, v_3 — соответствующие компоненты скорости, p — давление жидкости. Плотность жидкости ρ, кинематический коэффициент вязкости ν и коэффициент температуропроводности χ предполагаются постоянными, а коэффициент поверхностного натяжения σ считается линейной функцией температуры T:

$$\sigma = \sigma_0 - \varkappa(T - T_0) \tag{1.1}$$

(σ_0, $\varkappa$, T_0 — положительные постоянные). Далее предполагается, что течение жидкости стационарно и симметрично относительно плоскости $x_3 = 0$. Кроме того, предполагается, что поверхностно-активные вещества и внешние массовые силы отсутствуют.

Математическая задача состоит в определении области Ω и решения системы уравнений Навье — Стокса и теплопроводности

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla_3 \boldsymbol{v} = -\rho^{-1} \nabla_3 p + \nu \Delta_3 \boldsymbol{v}, \qquad \nabla_3 \cdot \boldsymbol{v} = 0; \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla_3 T = \chi \Delta_3 T \tag{1.3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00355), Комиссии по высшему образованию Пакистана (грант № 1-28/HEC/HRD/2005), фонда “Ведущие научные школы России” (грант № НШ-5873.2006.1) и в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 111-2006.

в этой области, удовлетворяющих краевым условиям на свободной границе

$$-p\boldsymbol{N} + 2\rho\nu D \cdot \boldsymbol{N} = -2K\sigma\boldsymbol{N} + \nabla_\Gamma \sigma; \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N} = 0, \qquad x \in \Gamma^\pm, \tag{1.5}$$

условию прилипания на твердой части границы

$$\boldsymbol{v} = 0, \qquad x \in \Sigma, \tag{1.6}$$

условиям теплового контакта, которые формулируются ниже, и условиям симметрии. Последние означают, что поверхность Γ^- является отражением Γ^+ относительно плоскости x_1, x_2; кроме того, функции v_1, v_2, p, T — четные функции переменной x_3, а v_3 — нечетная функция x_3.

В соотношениях (1.2)–(1.5) ∇_3, Δ_3 — трехмерные градиент и лапласиан; $D = [\nabla_3\boldsymbol{v} + (\nabla_3\boldsymbol{v})^*]/2$ — тензор скоростей деформаций; $\boldsymbol{N}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ^+; K — средняя кривизна этой поверхности; $\nabla_\Gamma = \nabla - \boldsymbol{N}(\boldsymbol{N} \cdot \nabla)$ — поверхностный градиент.

Если величина σ в условии (1.4) постоянна, то динамическая задача (1.2), (1.4)–(1.6) отделяется от тепловой и имеет решение, в котором $p = \text{const}$, $\boldsymbol{v} = 0$, а Γ^+ определяется как поверхность заданной постоянной средней кривизны при заданном значении контактного угла. Если $\sigma \neq \text{const}$ (что неизбежно при непостоянстве температуры в силу равенства (1.1)), то задача существенно усложняется. Поскольку жидкость контактирует как с твердым телом вдоль поверхности Σ, так и с газовой фазой в точках свободной границы, на поверхностях Σ и Γ^+ следует задать дополнительные краевые условия. Будем считать, что на поверхности Σ известно распределение либо температуры, либо теплового потока:

$$T = f(x), \qquad x \in \Sigma \tag{1.7}$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial n} = q(x), \qquad x \in \Sigma. \tag{1.8}$$

Здесь $f(x)$, $q(x)$ — заданные функции; $\partial/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности Σ. Что касается условия теплового контакта пленки с газовой фазой, то обычно оно формулируется как условие 3-го рода для температуры, включающее эмпирическую постоянную (коэффициент межфазного теплообмена). Необходимость ее определения исчезает в двух предельных случаях: теплоизолированная свободная граница и идеальный тепловой контакт жидкой и газовой фаз. В последнем случае будем считать, что температура свободной поверхности θ является заданной функцией координат x_1 и x_2. После подстановки равенств (1.1) и $T = \theta$ при $x \in \Gamma^+$ в условие (1.4) задача определения функций $\boldsymbol{v}$, p и поверхности Γ^+ становится замкнутой, а функция T в области Ω определяется апостериори.

Если же свободная поверхность теплоизолирована, то условие для температуры имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial N} = 0, \qquad x \in \Gamma^+, \tag{1.9}$$

где $\partial/\partial N$ — производная по направлению внешней нормали к поверхности Γ^+. В этом случае при замыкании задачи условием (1.8) необходимо подчинить входящую в него функцию $q(x)$ соотношению

$$\int\limits_\Sigma q\, d\Sigma = 0. \tag{1.10}$$

Кроме того, следует задать значение угла трехфазного контакта в точках пересечения поверхностей Σ и Γ^+. Ограничимся простейшим случаем, когда этот угол равен $\pi/2$. В этом случае выполнено соотношение

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0, \qquad x \in \Sigma. \tag{1.11}$$

Здесь h — функция, задающая свободную поверхность посредством равенства $x_3 = h(x_1, x_2)$. Наконец, для однозначной определенности решения нужно задать объем области, занятой жидкостью:

$$\int\limits_{\omega} h(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = Q \tag{1.12}$$

(ω — сечение области Ω плоскостью $x_3 = 0$).

Таким образом, формулируются две задачи с неизвестной границей для системы (1.2), (1.3). В первой из них краевые условия имеют вид (1.4)–(1.7), (1.11), (1.12), причем значения функции T на поверхности Γ^+ (а только они и входят в условие (1.4)) заданы априори:

$$T = \theta(x_1, x_2), \qquad x \in \Gamma^+. \tag{1.13}$$

Задачу (1.1)–(1.7), (1.11)–(1.13) будем называть задачей А. Во второй задаче совокупность краевых условий заменяется на (1.4)–(1.6), (1.8)–(1.12). Эту задачу для системы (1.2), (1.3) будем называть задачей Б.

В общем случае задачи А и Б могут быть решены только численно. Однако в случае, когда толщина пленки значительно меньше диаметра области ω, а производные искомых функций по поперечной координате x_3 много больше их производных по продольным координатам x_1, x_2, можно использовать приближение тонкого слоя [1]. Оно существенно упрощает задачу, но не делает ее тривиальной. Основное упрощение, даваемое этим приближением, состоит в том, что задача с неизвестной границей переходит в задачу в фиксированной области.

2. Приближение тонкого слоя. Обозначим через l диаметр плоской области ω и предположим, что для $(x_1, x_2) \in \omega$ выполнены соотношения $h = \varepsilon l$, $|\nabla h| = O(\varepsilon)$, $l\Delta h = O(\varepsilon)$, когда $\varepsilon \to 0$ (здесь и далее ∇ и Δ — градиент и лапласиан по переменным x_1, x_2). Обозначим через δT характерный перепад температур вдоль пленки и предположим, что изменение коэффициента поверхностного натяжения, имеющее порядок $\varkappa\delta T$, значительно меньше его среднего значения σ_0 (это предположение всегда выполнено для реальных термокапиллярных течений). Примем, что $\varkappa\,\delta T/\sigma_0 = O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$.

Рассматриваемые задачи имеют два характерных линейных масштаба: продольный и поперечный. Соответственно имеется два масштаба скорости, причем поперечный масштаб много меньше продольного: $v_3(v_1^2 + v_2^2)^{-1/2} = O(\varepsilon)$. Характерную продольную скорость V можно оценить на основе баланса касательных напряжений на свободной границе в силу соотношений (1.4), (1.1), откуда следует $V = \varepsilon\varkappa\,\delta T/(\rho\nu)$. Баланс нормальных напряжений приводит к выражению для характерного давления $\bar{p} = \varepsilon\sigma_0/l$. Естественным масштабом длины является величина l.

В соотношениях (1.2)–(1.13) перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$x_i' = \frac{x}{l}, \quad v_i' = \frac{v_i}{V} \quad (i = 1, 2), \quad x_3' = \frac{x_3}{\varepsilon l}, \quad v_3' = \frac{v_3}{\varepsilon V}, \quad p' = \frac{p}{\bar{p}}, \quad h' = \frac{h}{\varepsilon l}, \quad T' = \frac{T}{\delta T}.$$

Ниже штрихи у безразмерных переменных опускаются. Предположим, что безразмерные искомые функции и их производные по безразмерным координатам порядка единицы при

$\varepsilon \to 0$. В работе [1] выполнена процедура асимптотического упрощения уравнений, начальных и краевых условий нестационарного аналога задачи А, основанная на предположении о существовании конечных положительных пределов

$$\frac{\varkappa\,\delta T}{\varepsilon^2\sigma_0} \to \gamma, \quad \frac{(\varkappa\,\delta T)^2}{\varepsilon\rho\nu^2\sigma_0} \to \beta \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Результатом этой процедуры является вывод уравнения для толщины пленки, которое в стационарном случае преобразуется в следующее:

$$\nabla \cdot (h\nabla\Delta h) = \gamma\Delta\theta. \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) требуется решать в области $\omega \in \mathbb{R}^2$ при следующих условиях на границе $\partial\omega$ области ω:

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0, \qquad h\,\frac{\partial \Delta h}{\partial n} = \gamma\,\frac{\partial\theta}{\partial n}, \qquad (x_1, x_2) \in \partial\omega. \tag{2.2}$$

Первое из них — записанное в новых переменных условие (1.11). Второе условие (2.2) выведено в работе [1]. Это условие вытекает из непроницаемости поверхности Σ. К соотношениям (2.1), (2.2) добавляется условие, задающее безразмерный объем жидкости:

$$\int\limits_{\omega} h(x_1, x_2)\, d\omega = S \tag{2.3}$$

(S — площадь области ω). Оно равносильно условию (1.12), если в качестве малого параметра ε выбрать отношение размерного объема Q к площади поперечного сечения пленки.

Замечательной особенностью рассматриваемой задачи является то, что форма свободной поверхности пленки определяется из решения задачи (2.1)–(2.3) при отсутствии детальной информации о зависимости вектора скорости от вертикальной координаты x_3. Этим задача о движении свободной пленки под действием термокапиллярных сил отличается от классической задачи о движении тонкого слоя вязкой жидкости, граничащего с твердой плоскостью. Если функция $h(x_1, x_2)$ определена, то поле скоростей в пленке находится из решения краевой задачи в фиксированной области, сформулированной в [1].

Перейдем к формулировке задачи Б в приближении тонкого слоя. В этой задаче температура жидкости T не является заданной, но в силу условия (1.9) ее зависимость от вертикальной координаты оказывается слабой, и с точностью до величины порядка ε ею можно пренебречь. Сделаем дополнительное предположение о малости числа Пекле $\mathrm{Pe} = Vl/\chi$, что позволяет, пренебрегая нелинейным членом в уравнении (1.3), свести его к уравнению Лапласа $\Delta_3 T = 0$. Полагая $T = T(x_1, x_2)$ и интегрируя последнее уравнение по переменной x_3 от нуля до $h(x_1, x_2)$ с учетом условия (1.9) и условия симметрии, получаем равенство

$$\nabla \cdot (h\nabla T) = 0. \tag{2.4}$$

Отметим, что предположение $\mathrm{Pe} \ll 1$ равносильно условию малости числа Рейнольдса для движения пленок жидкости, если число Прандтля для жидкости порядка единицы. Последнее условие лежит в основе многих приближенных моделей пленочных течений.

Краевое условие для уравнения (2.4) следует из условия (1.8), в котором функцию g можно считать не зависящей от переменной x_3. Тогда

$$h\,\frac{\partial T}{\partial n} = q(x), \qquad (x_1, x_2) \in \partial\omega. \tag{2.5}$$

Необходимое условие разрешимости задачи типа Неймана (2.4), (2.5) задается равенством

$$\int\limits_{\partial\omega} q\, ds = 0, \tag{2.6}$$

где ds — элемент длины дуги кривой $\partial\omega$.

Второе уравнение системы для определения функций h и T имеет вид (2.1), однако вместо известной функции $\Delta\theta$ в правой части стоит ΔT:

$$\nabla \cdot (h\nabla\Delta h) = \gamma\Delta T. \tag{2.7}$$

Краевые условия для (2.7) аналогичны (2.2):

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0, \qquad h\,\frac{\partial \Delta h}{\partial n} = \gamma\,\frac{\partial T}{\partial n}, \qquad (x_1, x_2) \in \partial\omega. \tag{2.8}$$

Окончательно задача Б в приближении тонкого слоя формулируется следующим образом: найти решение h, T системы (2.4), (2.7) в области ω, так чтобы выполнялись условия (2.3), (2.5), (2.8). В дальнейшем задачу (2.3)–(2.8) будем называть связанной задачей. Задачу (2.1)–(2.3), в которой имеется единственная искомая функция h, назовем несвязанной задачей. Заметим, что по физическому смыслу функция $h(x_1, x_2)$ не может принимать отрицательные значения в области ω.

Границы применимости рассматриваемого приближения обсуждаются в [1]. Пусть $g = \mathrm{const}$ — ускорение свободного падения, $d = (2\sigma_0/(\rho g))^{1/2}$ — капиллярная постоянная. Влияние силы тяжести на равновесную форму неизотермической пленки будет несущественным, если $h \ll d \sim l$. Это неравенство дает верхнюю оценку для h. Нижняя оценка величины h есть $h \gg \eta$, где η — характерная толщина двойного электрического слоя. При выполнении последнего неравенства действием расклинивающего давления можно пренебречь.

Введем безразмерный параметр $m = \rho g\beta h^2/\varkappa$, где β — объемный коэффициент теплового расширения жидкости. При $m \ll 1$ можно пренебречь вкладом сил плавучести в формирование профиля пленки и поля скоростей в ней. В качестве примера рассмотрим пленку чистой воды при пониженной гравитации ($g = 1$ см/с^2) в окрестности температуры 298 К. В этом случае $d = 12$ см. Если принять $h = 0{,}1$ см, $l = 5$ см, $\eta = 10^{-6}$ см, то неравенства $\eta \ll h \ll l$ будут выполнены, так же как и неравенство $m \ll 1$ (в данном случае $m = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$). При нормальной силе тяжести $d = 0{,}38$ см, и требуемые неравенства будут выполнены, если $l \sim 0{,}5$ см, $h \sim 0{,}05$ см.

3. Несвязанная задача (общий случай). Если в уравнении (2.1) $\gamma = 0$, то единственным решением задачи (2.1)–(2.3) является $h = 1$. Это утверждение доказывается путем умножения уравнения (2.1) на Δh и интегрирования полученного равенства по области ω с учетом краевых условий (2.2), (2.3).

Предположим, что параметр γ достаточно мал. Тогда решение задачи (2.1)–(2.3) естественно искать в виде степенного ряда

$$h = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k h_k(x_1, x_2). \tag{3.1}$$

Функция h_1 является решением краевой задачи

$$\Delta\Delta h_1 = \Delta\theta, \qquad (x_1, x_2) \in \omega; \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta h_1}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial n}, \qquad (x_1, x_2) \in \partial\omega; \tag{3.3}$$

$$\int\limits_{\omega} h_1\, d\omega = 0. \tag{3.4}$$

Функции h_k ($k = 2, 3, \ldots$) определяются последовательно как решения задач

$$\Delta\Delta h_k = -\nabla \cdot \Big(\sum_{i=1}^{k-1} h_i \nabla\Delta h_{k-i}\Big), \qquad (x_1, x_2) \in \omega; \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial h_k}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta h_k}{\partial n} = -\sum_{i=1}^{k-1} h_i \, \frac{\partial \Delta h_{k-i}}{\partial n}, \qquad (x_1, x_2) \in \partial\omega; \tag{3.6}$$

$$\int\limits_{\omega} h_k \, d\omega = 0. \tag{3.7}$$

Далее предполагается, что кривая $\partial\omega$ принадлежит классу Гёльдера $C^{4+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, а функция $\theta(x_1, x_2)$ — классу Гёльдера $C^{2+\alpha}(\bar{\omega}\,)$. Это обеспечит классическую разрешимость задач (3.2)–(3.7). Задача (3.2), (3.3) сводится к задаче Неймана для уравнения Пуассона

$$\Delta h_1 = \theta - \bar{\theta}, \quad (x_1, x_2) \in \omega, \qquad \frac{\partial h_1}{\partial n} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \partial\omega, \tag{3.8}$$

где $\bar{\theta}$ — среднее значение функции θ в области ω. С учетом дополнительного условия (3.4) функция h_1 определяется однозначно.

Заметим, что каждая из задач (3.5), (3.6) есть аналог задачи Неймана для неоднородного бигармонического уравнения. Необходимым условием разрешимости такой задачи является выполнение равенства

$$\int\limits_{\partial\omega} \sum_{i=1}^{k-1} h_i \, \frac{\partial \Delta h_{k-i}}{\partial n} \, ds = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots. \tag{3.9}$$

Для задачи (3.2), (3.3) условие разрешимости выполнено автоматически. Оказывается, что оно выполнено также для задач (3.5), (3.6) при любом $k = 2, 3, \ldots$. Для доказательства достаточно подставить выражение (3.1) в вытекающее из (2.2) равенство

$$\int\limits_{\partial\omega} h \, \frac{\partial \Delta h}{\partial n} \, ds = \gamma \int\limits_{\partial\omega} \frac{\partial \theta}{\partial n} \, ds$$

и приравнять к нулю коэффициенты при всех степенях параметра γ, используя второе условие (3.6). При выполнении условия разрешимости (3.9) и сформулированных ранее условий гладкости каждая из задач (3.5), (3.6) имеет решение $h_k \in C^{4+\alpha}(\bar{\omega}\,)$, которое определено с точностью до аддитивной постоянной. Возникающий произвол в решении устраняется с помощью условия (3.7). Доказательство сходимости ряда (3.1) в норме пространства $C^{4+\alpha}(\bar{\omega}\,)$ при достаточно малых γ проводится стандартным способом с использованием шаудеровских оценок решений бигармонического уравнения.

Приведем пример приближенного решения задачи (2.1)–(2.3) в случае, когда область ω является единичным кругом, а функция θ есть простейший гармонический полином: $\theta = x_1 x_2$. Вследствие гармоничности θ уравнение (2.1) является однородным и влияние термокапиллярных сил на деформацию пленки проявляется только через второе краевое условие (2.2). Переходя к полярным координатам (r, φ) на плоскости x_1, x_2 и решая последовательно задачи (3.2)–(3.7), получаем

$$\begin{gathered} h_1 = \frac{1}{24}\,(r^4 - 2r^2) \sin 2\varphi, \\ h_2 = \frac{1}{384}\Big[-\frac{1}{48}\,r^8 + \frac{1}{9}\,r^6 - \frac{1}{4}\,r^2 + \frac{7}{90} + \Big(\frac{1}{30}\,r^8 - \frac{11}{50}\,r^6 + \frac{79}{300}\,r^4\Big)\cos 4\varphi\Big]. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Оценивая максимальные значения модулей функций h_1, h_2 в круге $r \leqslant 1$, находим $\max |h_1| = 1/24 \approx 4{,}17 \cdot 10^{-2}$, $\max |h_2| \approx 4{,}13 \cdot 10^{-4}$. Это позволяет надеяться на то, что приближенное решение задачи (2.1)–(2.3) $h^{(3)} = 1 + \gamma h_1 + \gamma^2 h_2$ хорошо аппроксимирует ее точное решение, по крайней мере, для значений параметра γ порядка единицы.

Рассмотрим пленку чистой воды толщиной 0,05 см и диаметром 0,5 см при комнатной температуре. В этом случае значению $\gamma = 1$ соответствует перепад температуры на ее краях $\delta T = 3{,}64$ К. Формулы (3.10) показывают, что при данном распределении температуры $\theta = (r^2 \sin 2\varphi)/2$ и значениях $\gamma \sim 1$ значительные деформации профиля пленки сосредоточены вблизи ее границы. Так, если $\gamma = 2$, то в круге $r \leqslant 0{,}8$ отклонение толщины пленки от ее среднего значения $\bar{h} = 1$ не превышает 0,08. Представляет интерес вычисление выражения $\gamma\Delta(h_1 + \gamma h_2) = H^{(2)}$, которое в приближении тонкого слоя аппроксимирует среднюю кривизну пленки. В соответствии с (3.1), (3.10)

$$H^{(2)} = \frac{\gamma}{2}\, r^2 \sin 2\varphi + \frac{\gamma^2}{48}\Big[-\frac{1}{6}\, r^6 + \frac{1}{2}\, r^4 - \frac{1}{16} + \Big(\frac{1}{5}\, r^6 - \frac{11}{20}\, r^4\Big)\cos 4\varphi\Big].$$

Отсюда следует, что наибольшие значения функции $|H^{(2)}(r,\varphi)|$ достигаются на окружности $r = 1$. Если $\gamma \leqslant 2$, то $\max |H^{(2)}| < 1{,}023$.

Отметим, что при достаточно малых значениях γ решение $h(x_1, x_2)$ задачи (2.1)–(2.3) положительно в замкнутой области $\bar{\omega}$. С увеличением γ это свойство может утрачиваться. В работе [1] рассмотрены одномерные варианты задачи, соответствующие случаям, когда ω — круг, а функция h радиально-симметрична или ω — полоса $|x_1| < \mathrm{const}$ (в этом случае ω не зависит от x_2). Показано, что при $4\theta = -(x_1^2 + x_2^2) \equiv -r^2$ (либо $2\theta = -x_1^2$) найдется такое γ^*, что $h = 0$ в точке $r = 0$ (или $x_1 = 0$), в то время как в остальной части области ω $h > 0$. Было установлено, что в осесимметричном случае $\gamma^* \approx 32{,}4$, в плоском случае $\gamma^* \approx 39{,}2$. Приближенное решение задачи (2.1)–(2.3) в случае, когда ω — единичный круг, а $2\theta = r^2 \sin 2\varphi$, позволяет дать грубую оценку значений параметра γ, для которых положительное решение этой задачи еще существует: $\gamma < 24$. Представляется правдоподобной следующая гипотеза. Пусть $\Delta\theta = -1$ в области ω и $\partial\theta/\partial n < 0$ на ее границе. Тогда найдется такое значение $\gamma^* > 0$, что при $\gamma > \gamma^*$ не существует положительного решения задачи (2.1)–(2.3). Доказательство этой гипотезы является достаточно сложной задачей теории вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений.

4. Несвязанная задача (осесимметричный случай). Предположим, что ω — круг и $\theta = -r^2/4$. Будем разыскивать осесимметричные решения задачи (2.1)–(2.3) $h = h(r)$. Тогда уравнение (2.1) допускает однократное интегрирование. С учетом второго краевого условия (2.2) получим следующую задачу:

$$h\,\frac{d}{dr}\Big[\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\Big(r\,\frac{dh}{dr}\Big)\Big] = -\gamma r, \qquad 0 < r < 1; \tag{4.1}$$

$$h \quad \text{и} \quad \frac{d^2h}{dr^2} \quad \text{ограничены}, \qquad \frac{dh}{dr} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 0; \tag{4.2}$$

$$\frac{dh}{dr} = 0 \quad \text{при} \quad r = 1; \tag{4.3}$$

$$\int\limits_0^1 r h(r)\, dr = \frac{1}{2}. \tag{4.4}$$

Плоский аналог задачи (4.1)–(4.4) имеет вид

$$h\,\frac{d^3h}{dx^3} = -\gamma x, \qquad 0 < x < 1; \tag{4.5}$$

$$\frac{dh}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = 1; \tag{4.6}$$

$$\int_0^1 h(x)\,dx = 1. \tag{4.7}$$

Уравнение (4.4) может быть проинтегрировано еще раз:

$$h\,\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{dh}{dx}\Big)^2 = -\frac{1}{2}\,\gamma x^2 + \zeta. \tag{4.8}$$

Постоянная интегрирования ζ является функционалом от решения задачи (4.5)–(4.7). В работе [1] доказано, что задача (4.5)–(4.7) имеет, по крайней мере, одно положительное решение, если $0 \leqslant \gamma < 9$. Если $\gamma < 9(1 - \pi^{-3/2})^2$, то это решение единственное. При достаточно больших значениях γ положительных решений задачи не существует. Хотя найденная в [1] верхняя оценка допустимого диапазона значений параметра γ на пять порядков больше реального, полученного численно: $0 \leqslant \gamma < \gamma^* \approx 39{,}2$, этот результат имеет принципиальное значение. Ниже аналогичный результат устанавливается для решений задачи (4.1)–(4.4).

В соотношениях (4.1)–(4.4) перейдем к новой независимой переменной $t = r^2$ и новой искомой функции $u(t) = h(r)$. Функция u является решением следующей краевой задачи:

$$u(tu')'' = -a, \qquad 0 < t < 1; \tag{4.9}$$

$$u,\ u',\ u'' \quad \text{ограничены} \quad \text{при} \quad t \to 0; \tag{4.10}$$

$$u' = 0, \qquad t = 1; \tag{4.11}$$

$$\int_0^1 u\,dt = 1. \tag{4.12}$$

Здесь $a = \gamma/4$; штрих означает дифференцирование по t. Решение уравнения (4.9), удовлетворяющее условиям (4.10), назовем регулярным. Требуется получить априорные оценки регулярного положительного решения задачи (4.9)–(4.12) при $a > 0$.

Обозначим $u'' = p$. Функция $p(t)$ удовлетворяет следующему уравнению: $tp' + 2p = -au^{-1}$. Пусть u — регулярное положительное решение задачи (4.9)–(4.12). Тогда для решения последнего уравнения, ограниченного при $t \to 0$, справедливо представление

$$p(t) = -\frac{a}{t^2}\int_0^t \frac{x\,dx}{u(x)}.$$

Это означает, что $u'' < 0$ при всех $t \in [0, 1]$. Интегрируя последнее равенство от t до 1 и используя условие (4.11), получаем представление

$$u'(t) = a\int_t^1 \Big(\int_0^s \frac{x\,dx}{u(x)}\Big)\frac{ds}{s^2}.$$

Отсюда следует, что для любого регулярного положительного решения $u(t)$ задачи (4.9)–(4.12) имеет место неравенство $u' > 0$, если $0 \leqslant t < 1$.

Обозначим $u''' = q$. Поделив уравнение (4.9) на u и продифференцировав полученное равенство, получим уравнение $tq' + 3q = au^{-2}u'$. Заметим, что для любого регулярного решения уравнения (4.9) существует конечный предел функции $tu'''(t)$ при $t \to 0$. Это позволяет получить представление для функции q путем интегрирования последнего уравнения от $t = 0$ до текущего значения t:

$$q(t) = \frac{a}{t^3} \int\limits_0^t \frac{u'(x)x^2\,dx}{u(x)}.$$

Учитывая положительность u и u' при $t \in [0,1)$ и определение функции q, можно сделать вывод, что $u'''(t) > 0$ для всех $t \in [0,1]$.

Далее потребуются априорные оценки решения задачи (4.9)–(4.12). Простейшая из них получается посредством интегрирования уравнения (4.9) от 0 до 1 с учетом краевых условий (4.10), (4.11):

$$u(0)u'(0) - u(1)u''(1) + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 [u'(t)]^2\,dt = a. \qquad (4.13)$$

Заметим, что $u(1)u'''(1) + 2u(1)u''(1) = -a$ в силу уравнения (4.9). Так как $u'''(1) > 0$, отсюда вытекает неравенство

$$u(1)u''(1) < -a/2. \qquad (4.14)$$

Учитывая положительность $u(0)u'(0)$, из (4.13) и (4.14) получаем оценку

$$\int\limits_0^1 [u'(t)]^2\,dt < a. \qquad (4.15)$$

Неравенство (4.15) позволяет получить двусторонние оценки функции u. Действительно, в силу условия (4.12) найдется такая точка $t_1 \in [0,1]$, что $u(t_1) = 1$. Это дает возможность представить функцию u в виде

$$u(t) = 1 + \int\limits_{t_1}^t u'(x)\,dx.$$

Отсюда и из (4.15) следуют оценки $1 - [a|t - t_1|]^{1/2} < u(t) < 1 + [a|t - t_1|]^{1/2}$.

Усиливая верхнюю оценку, находим, что при $a > 0$

$$u(t) < 1 + a^{1/2}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \qquad (4.16)$$

Нижнюю оценку также можно усилить:

$$u(t) > 1 - a^{1/2}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad (4.17)$$

однако в отличие от (4.16) эта оценка является содержательной лишь для $a < 1$. Тем не менее она позволяет доказать разрешимость задачи (4.1)–(4.4) при малых значениях параметра $\gamma = 4a$. Такое доказательство проведено в работе [1], но в ней не указан гарантированный интервал существования решения задачи. На основании оценки (4.17) можно утверждать, что положительное решение задачи (4.1)–(4.4) заведомо существует, если $\gamma < 4$. При еще меньших значениях γ положительное решение единственно (доказательство этого факта здесь не приводится).

Докажем, что не существует положительного решения задачи (4.9)–(4.12) при больших значениях a. В отличие от уравнения (4.5) уравнение (4.9) не допускает интегрирования. Поэтому нельзя непосредственно воспользоваться приемом, предложенным в [1] для доказательства разрушения решения задачи (4.5)–(4.7) при достаточно больших γ. Однако определенное сходство между обеими задачами подсказывает правильный ход рассуждений. (Заметим, что порядок уравнения (4.9) может быть понижен вследствие его инвариантности относительно преобразования растяжения $\tilde{t} = ct$, $\tilde{u} = c^2u$, однако это обстоятельство не помогает получить нужный результат.)

В уравнении (4.9) перейдем к новой искомой функции $v = u^{1/2}$. Функция $v(t)$ удовлетворяет уравнению

$$v'' = \frac{f(t)}{2tv^3} - \frac{v'}{tv^2}, \tag{4.18}$$

где

$$f(t) = -at + a + u(1)u''(1) - \frac{1}{2}\int_t^1 [u'(x)]^2\,dx. \tag{4.19}$$

Используя представление (4.19) и неравенство (4.14), можно заключить, что функция f допускает оценку сверху

$$f(t) < -a(t - 1/2), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{4.20}$$

При этом существенно, что при $t > 1/2$ функция f принимает отрицательные значения.

Проинтегрируем уравнение (4.18) от $t \geqslant 1/2$ до 1, учитывая, что $v'(1) = 0$ в силу условия (4.11) и определения v. В результате получим

$$v'(t) = \int_t^1 \Big(- \frac{f(x)}{2xv^3(x)} + \frac{v'(x)}{xv^2(x)}\Big)\,dx. \tag{4.21}$$

Дальнейшие рассуждения основаны на получении оценки снизу функции v, которая при больших значениях a приводит к противоречию с условием (4.12). С этой целью оценим снизу подынтегральное выражение в (4.21). Для этого используем неравенство (4.20), $v' = 2uu' > 0$ и вытекающее из (4.16) неравенство $v < (1 + a^{1/2})^{1/2}$. В результате находим

$$v'(t) > \frac{a}{2(1+a^{1/2})^{3/2}}\int_t^1 \Big(1 - \frac{1}{2x}\Big)\,dx = \frac{a}{2(1+a^{1/2})^{3/2}}\Big(1 - t + \frac{1}{2}\ln t\Big), \qquad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1.$$

Интегрирование полученного неравенства от $t = 1/2$ до текущего значения t дает желаемую оценку

$$v(t) > \frac{a\eta(t)}{2(1+a^{1/2})^{3/2}} + v\Big(\frac{1}{2}\Big), \qquad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \tag{4.22}$$

где

$$\eta(t) = \frac{1}{2}\Big(t - t^2 + t\ln t + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\Big).$$

Функция $\eta(t)$ обладает следующими свойствами: 1) $\eta(1/2) = 0$; 2) $\eta(t)$ строго возрастает при $t \in (1/2, 1]$. Это означает, что

$$\int_{1/2}^1 \eta^2(t)\,dt = C > 0.$$

Используя неравенство (4.22) и учитывая определение $v = u^{1/2}$ и положительность $v(1/2)$, можно заключить, что

$$\int\limits_{1/2}^{1} u(t)\,dt > \frac{C^2 a^2}{4(1 + a^{1/2})^3}.$$

Очевидно, что для положительных решений задачи (4.9)–(4.12) последнее неравенство противоречит условию (4.12), если a достаточно велико. Это означает, что при больших значениях параметра $\gamma = 4a$ не существует положительных решений исходной осесимметричной задачи.

5. Связанная задача (общий случай). Данная задача состоит в определении пары функций h, T, удовлетворяющих уравнениям (2.4), (2.7) в области $\omega \in \mathbb{R}^2$, краевым условиям (2.5), (2.8) на ее границе $\partial\omega$ и дополнительному условию (2.3). Управляющим функциональным параметром задачи является функция q, задающая распределение теплового потока на кривой $\partial\omega$. Эта функция подчинена необходимому условию (2.6). При этом функция T в решении задачи (2.3)–(2.8) определена неоднозначно. Произвол в ее определении можно ликвидировать, если потребовать выполнения условия

$$\int\limits_{\omega} T(x_1, x_2)\,d\omega = 0. \tag{5.1}$$

Далее предполагается, что условие (5.1) выполнено.

По аналогии с несвязанной задачей (2.1)–(2.3) решение задачи (2.3)–(2.8) можно искать в виде

$$h = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k h_k(x_1, x_2), \qquad T = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k T_k(x_1, x_2). \tag{5.2}$$

Функции T_0, h_1 образуют решение следующей задачи:

$$\Delta T_0 = 0, \qquad \Delta\Delta h_1 = 0, \qquad (x_1, x_2) \in \partial\omega; \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial n} = q, \qquad \frac{\partial h_1}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta h_1}{\partial n} = q, \qquad (x_1, x_2) \in \partial\omega; \tag{5.4}$$

$$\int\limits_{\omega} T_0\,d\omega = 0, \qquad \int\limits_{\omega} h_1\,d\omega = 0. \tag{5.5}$$

Функции T_k, h_{k+1} $(k = 1, 2, \dots)$ определяются из рекуррентной системы уравнений и краевых условий

$$\begin{gathered} \Delta T_k = -\nabla \cdot \Big(\sum_{i=1}^{k} h_i \nabla T_{k-i}\Big), \\ \Delta\Delta h_{k+1} = \Delta T_k - \nabla \cdot \Big(\sum_{i=1}^{k} h_i \nabla \Delta h_{k+1-i}\Big), \qquad (x_1, x_2) \in \omega; \end{gathered} \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial T_k}{\partial n} = -\sum_{i=1}^{k} h_i \,\frac{\partial T_{k-i}}{\partial n}, \qquad \frac{\partial h_{k+1}}{\partial n} = 0, \\ \frac{\partial \Delta h_{k+1}}{\partial n} = \frac{\partial T_k}{\partial n} - \sum_{i=1}^{k} h_i \,\frac{\partial \Delta h_{k+1-i}}{\partial n}, \qquad (x_1, x_2) \in \partial\omega; \end{gathered} \tag{5.7}$$

$$\int\limits_{\omega} T_k\,d\omega = 0, \qquad \int\limits_{\omega} h_{k+1}\,d\omega = 0. \tag{5.8}$$

Предположим, что кривая $\partial\omega$ принадлежит классу Гёльдера $C^{4+\alpha}$, $0<\alpha<1$, а функция q — классу Гёльдера $C^{1+\alpha}(\partial\omega)$. Тогда каждая из задач (5.3)–(5.5), (5.6)–(5.8) имеет, и притом единственное, решение $T_k \in C^{2+\alpha}(\bar\omega\,)$, $h_{k+1} \in C^{4+\alpha}(\bar\omega\,)$, $k=0,1,2,\dots$. Если параметр $\gamma>0$ достаточно мал, то ряды (5.2) сходятся в нормах пространств $C^{4+\alpha}(\bar\omega\,)$, $C^{2+\alpha}(\bar\omega\,)$ соответственно к функциям h, T, образующим решение задачи (2.3)–(2.8).

Заметим, что функция T_0 является гармонической. Это позволяет сравнить решение несвязанной задачи, рассмотренной в п. **3**, с решением связанной задачи в случае, когда ω — единичный круг, а $q=\sin 2\varphi$ (напомним, что r и φ — полярные координаты). При таком задании функции q выполнено равенство $\theta = T_0$. Совпадение функций θ и T_0 обусловливает равенство функций h_1 в решениях обеих задач. Однако деформация пленки приводит к тому, что следующие члены в разложении (5.2) для температуры уже не будут являться гармоническими функциями. Вычисления показывают, что в случае $q=\sin 2\varphi$

$$T_1 = \frac{1}{288}\,r^6 + \frac{1}{96}\,r^4 - \frac{1}{384} + \Big(\frac{1}{480}\,r^6 - \frac{1}{30}\,r^4\Big)\cos 4\varphi.$$

Заметим, что функции h_1 и T_0, образующие решение задачи (5.3)–(5.5), связаны соотношением $\Delta h_1 = T_0$. Отсюда следует, что функция h_2, получающаяся в результате решения задачи (5.6)–(5.8) при $k=1$, отличается от функции h_2, определенной второй формулой (3.10), лишь множителем 2.

6. Связанная задача (плоский случай). Ниже исследуются решения системы (2.4), (2.7), в которых функции h и T зависят лишь от одной переменной $x_1 = x$. Эти решения описывают равновесие неизотермической пленки, ограниченной плоскостями $x=0$ и $x=1$, при условии, что ее свободная поверхность теплоизолирована, а на твердых границах задан тепловой поток с постоянной безразмерной плотностью q. В этом случае уравнения (2.4), (2.7) интегрируются и приводят к системе

$$h\dddot{h} = \gamma\dot{T} + d, \qquad h\dot{T} = q,$$

где точка означает дифференцирование по x; d — постоянная. В силу второго краевого условия (2.8) $d=0$. Исключая функцию T из полученных соотношений, приходим к уравнению для толщины пленки h

$$h\dddot{h} = -bh^{-1}, \qquad 0<x<1, \tag{6.1}$$

где $b=-\gamma q$. Краевые условия (2.3) и первое из условий (2.8) в одномерном случае принимают вид

$$\dot{h}(0) = \dot{h}(1) = 0; \tag{6.2}$$

$$\int\limits_0^1 h(x)\,dx = 1. \tag{6.3}$$

Заметим, что без потери общности число b можно считать неотрицательным. Случай $b<0$ сводится к случаю $b>0$ заменой $\tilde{x} = 1-x$.

Если $b=0$, то единственным решением задачи (6.1)–(6.3) является $h=1$. При малых b ее решение имеет асимптотику

$$h = 1 + b\Big(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{1}{6}\,x^3\Big) + O(b^2), \qquad b\to 0. \tag{6.4}$$

Из (6.4) следует, что при малых b функция $h(x)$ строго монотонно возрастает и имеет единственную точку перегиба. Эти качественные свойства решения сохраняются и при больших значениях параметра b. Наличие более одной точки перегиба невозможно в силу неравенства $\dddot{h} < 0$ для положительных решений задачи (6.1)–(6.3). Это же неравенство означает, что функция $\ddot{h}(x)$ строго убывает. Если $\ddot{h}(0) \leqslant 0$, то выполнение условия $\dot{h}(1) = 0$ невозможно. Таким образом, $\ddot{h}(0) > 0$, что приводит к монотонному возрастанию функции $h(x)$ при любом значении $b > 0$.

Положительность b означает уменьшение температуры с ростом x, в то время как толщина пленки увеличивается. Это естественно, так как при уменьшении температуры растет коэффициент поверхностного натяжения (1.1). Кроме того, значение толщины пленки на нагреваемом конце $h(0)$ уменьшается с увеличением параметра b. Для малых значений b это следует из формулы (6.4). Представляет интерес выяснить, может ли для положительного решения $h(x)$ задачи (6.1)–(6.3) величина $h(0)$ обратиться в нуль при каком-либо значении параметра $b > 0$. С этой целью исследуется поведение решений уравнения (6.1), таких что $h(x) \to 0$ при $x \to 0$.

В уравнении (6.1) перейдем к новой независимой переменной s и новой искомой функции z по формулам

$$h = \exp s, \qquad \dot{h} = z(s). \tag{6.5}$$

Функция $z(s)$ удовлетворяет уравнению второго порядка

$$z^2\Big(\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\Big) + z\Big(\frac{dz}{ds}\Big)^2 = -b. \tag{6.6}$$

Для уравнения (6.6) рассматривается задача Коши

$$z = c, \qquad \frac{dz}{ds} = 0 \qquad \text{при} \qquad s = s_*, \tag{6.7}$$

где $s_* = \log h(x_*)$; $c = \dot{h}(x_*)$; x_* — значение x, при котором функция $\dot{h}(x_*)$ принимает наибольшее значение. Отметим, что при $b > 0$ это значение единственно и $0 < x_* < 1$. Кроме того, $c > 0$. Подстановкой

$$\Big(z\,\frac{dz}{ds}\Big)^2 = w(z) \tag{6.8}$$

уравнение (6.6) сводится к уравнению первого порядка

$$\Big(\frac{dw}{dz} + 2\Big)^2 = z^2 w, \tag{6.9}$$

которое равносильно двум уравнениям

$$\frac{dw_1}{dz} = -2 - z w_1^{1/2}; \tag{6.10}$$

$$\frac{dw_2}{dz} = -2 + z w_2^{1/2}. \tag{6.11}$$

Функции w_1 и w_2 в силу их определения не могут принимать отрицательные значения. Для уравнений (6.12), (6.13) рассмотрим задачи Коши

$$w_k(c) = 0, \qquad k = 1, 2. \tag{6.12}$$

Правые части уравнений (6.10), (6.11) теряют гладкость в точке $z = c$, $w_k = 0$. Однако обе задачи Коши (6.10), (6.12) и (6.11), (6.12) имеют единственные решения, определенные в левой полуокрестности точки $z = c$. Далее представляет интерес решение первой из указанных задач.

Интегральная кривая уравнения (6.10), выходящая из точки $z = c$, $w_1 = 0$, лежит выше прямой $w_1 = 2b(c - z)$. Поскольку правая часть этого уравнения сублинейно растет по переменной w_1, решение задачи Коши (6.10), (6.12) может быть продолжено вплоть до точки $z = 0$, причем $w_1(0) > 2bc$, если $b > 0$, и имеет место неравенство

$$w_1 > 2b(c - z), \qquad 0 < z < c. \tag{6.13}$$

Если решение задачи (6.10), (6.12) известно, то функцию $s_1(z)$ можно определить соотношением

$$s_1(z) = -\int\limits_z^c \frac{\zeta\, d\zeta}{[w_1(\zeta)]^{1/2}} + s_*, \qquad 0 \leqslant z \leqslant c. \tag{6.14}$$

Знание этой функции позволяет найти параметрическую зависимость $h(x)$ на интервале $0 \leqslant x \leqslant x_*$ исходя из соотношений (6.5), (6.8). В силу (6.5), (6.13) и (6.14) справедлива априорная оценка

$$h(0) > h(x_*) \exp\{-2^{3/2}3^{-1}b^{-1/2}[\dot{h}(x_*)]^{3/2}\}, \qquad b > 0. \tag{6.15}$$

Из этой оценки следует, что при любом конечном значении $b > 0$ величина $h(0)$ положительна. Нарушение неравенства (6.15) означает, что $\dot{h}(x_*) \to \infty$ при $x \to x_*$, но это невозможно в силу уравнения (6.1), так как $h(x_*) > 0$.

Оценка (6.15) еще не позволяет доказать разрешимость задачи (6.1)–(6.3) при любом значении $b > 0$, но может оказаться полезной при численном решении этой задачи путем продолжения по параметру b. Вопрос о разрешимости задачи (6.1)–(6.3) при всех положительных b требует дальнейшего как аналитического, так и численного исследования.

В заключение еще раз подчеркнем, что под равновесием свободной неизотермической пленки в настоящей работе понимается ее стационарная форма и стационарное поле скоростей и температур в ней. В приближении тонкого слоя эти две задачи (определение равновесной формы пленки и нахождение поля скоростей и температур) решаются последовательно. Данная работа посвящена исследованию первой из этих задач. Вторая задача сформулирована в [1], там же приведено ее приближенное решение при малых значениях числа Марангони в предположении, что форма пленки известна.

Автор выражает благодарность Е. А. Карабуту за полезные обсуждения рассматриваемой задачи.

1. **Пухначев В. В., Дубинкина С. Б.** Модель деформации и разрыва пленки под действием термокапиллярных сил // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 5. С. 89–107.

Поступила в редакцию 23/V 2006 г.