

УДК 550.344.42

Восстановление источника цунами и выбор оптимальной системы наблюдения на основе метода r -решений

Т.А. Воронина

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук,
просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mail: vta@omzg.sccc.ru

Воронина Т.А. Восстановление источника цунами и выбор оптимальной системы наблюдения на основе метода r -решений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 4. — С. 343–356.

Применение предложенного ранее для модельных постановок подхода для определения первоначальной формы волны цунами в условиях реального события составляет суть представленных здесь результатов. Более того, в рамках развиваемого метода появляется возможность оценить действенность системы наблюдения для восстановления формы источника цунами и предложить методику выбора наиболее оптимального варианта этой системы. Задача определения источника по измерениям формы прошедшей волны в серии удаленных приемников ставится как обратная задача математической физики. Для решения этой некорректной задачи применяется подход, использующий r -решения. Предложенная методика позволяет избежать неустойчивости численного решения рассматриваемой некорректной задачи. Эффективность предложенного подхода подтверждается на примере численного моделирования для реального события.

DOI: 10.15372/SJNM20160401

Ключевые слова: цунами, численное моделирование, обратная некорректная задача, регуляризация, сингулярное разложение, r -решения.

Voronina T.A. Recovering a tsunami source and designing an observational system based on the r -solution method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 4. — P. 343–356.

This study deals with the application of the r -solution method to recover the initial tsunami waveform in a tsunami source area by inverting the remote water-level measurements for a real event. The inverse problem in question is regarded as the so-called ill-posed problem and it is regularized by means of the least square inversion using the truncated Singular Value Decomposition method. The method presented allows one to control the instability of the numerical solution and to obtain an acceptable result in spite of the ill-posedness of the problem. Moreover, it is possible to make a preliminary prediction of the quality of the inversion with a given set of observational stations and to estimate further changes in the inversion result after modifying the monitoring system.

Keywords: tsunami numerical modeling, ill-posed inverse problem, regularization, singular value decomposition and r -solution.

1. Введение

Цунами — это серия волн, движущихся с огромной скоростью и характеризующихся большой длиной. Такие волны формируются в результате резкого вертикального смещения больших объемов воды в океане. Причинами вертикального смещения воды могут быть подводные землетрясения, оползны, вулканические извержения, падения круп-

ных метеоритов и подводные ядерные испытания. Для количественной оценки цунами-опасности конкретных участков побережья существенными оказываются географическое положение исследуемого участка берега относительно цунамигенных зон, геометрические особенности рельефа дна на трассах прохождения волн цунами и характеристики самого очага, где, как правило, отсутствуют прямые приборные наблюдения. Анализ одних только сейсмических данных не позволяет дать достоверный прогноз о последующем цунами. В этих условиях математическое моделирование является почти единственным средством, позволяющим изучить закономерности процесса распространения цунами. Ключевым моментом численного моделирования цунами является конструирование источника, который генерирует волну цунами (под *источником* в дальнейшем будем понимать первоначальное поднятие морской поверхности в области источника). Этим объясняется увеличение интереса к обратной задаче цунами, которая заключается в восстановлении пространственно-временной области источника цунами по характеристикам регистрируемых волн в пунктах наблюдения. Обратная задача цунами ставится как обратная задача математической физики. Как известно, такие задачи относятся к классу некорректных или условно-корректных задач, что накладывает довольно жесткие ограничения на систему наблюдений и весь используемый математический аппарат. Применение математических методов для “обращения” мареографных записей началось с работ [1–3]. В этих работах использовались линейная теория распространения волн, численное построение функции Грина. При этом К. Satake существенно использовал в процессе инверсии и сейсмологическую информацию об источнике. В работе [4] важно было знать только пространственную локализацию источника, что также обычно известно из сейсмологических данных. Кроме того, они исследовали вопросы качества восстановления от количества и пространственного распределения мареографов, правда, для модельного случая бассейна постоянной глубины. Сопряженный метод, предложенный С. Pires и Р.М.А. Miranda в работе [5], базируется на оптимизационном подходе и позволяет использовать как линейную, так и нелинейную теории распространения волн. Однако применение оптимизационного подхода для геофизических приложений имеет существенные трудности: проблема выбора начального приближения; вопросы существования, единственности и устойчивости точки минимума целевого функционала; необходимость многократного решения прямой задачи. В последнее время в NOAA (США) успешно используется метод “минимальных невязок” [6, 7], когда на основе известных базовых моделей форма источника определяется по совпадению высот волны в некоторых точках.

В настоящей работе распространение волн также рассматривается в рамках линейной теории мелкой воды, а для решения обратной задачи применяется подход, использующий r -решения [10]. Регуляризация оператора в этом случае осуществляется путем сужения оператора на подпространство, являющееся линейной оболочкой его первых правых сингулярных векторов. Тем самым подпространство, в котором ищется решение, выбирается на основе анализа свойств сингулярного спектра оператора, которые определяются системой наблюдения и батиметрией. Строится обобщенное нормальное r -решение. Этот подход к решению задачи восстановления источника цунами был впервые предложен в 1998 г. Т.А. Ворониной и В.А. Чевердой для модельного случая постоянной глубины в работе [9] и позднее успешно применен к более сложным моделям. Обоснование и исследование свойств оператора обратной задачи, зависимость качества восстановления от количества и азимутального расположения приемников и уровня шумов приводятся в работах [11, 12, 14, 15]. Первые же результаты численного моделирования показали перспективность такого подхода, так как он позволяет преодолеть неустойчивость чис-

ленного решения, обусловленную некорректностью задачи. В данной работе предлагаются результаты численной реализации данного подхода на реальных данных цунами, произошедшего вблизи Соломоновых островов в 2013 году.

2. Модель

Возбуждение волны цунами будет предполагаться обусловленным резким поднятием и опусканием дна в начальный момент времени, до которого все находилось в состоянии покоя. При этом полагается, что поверхность воды повторяет форму подвижки морского дна в очаге цунами. Предполагается, что для всей области, от зоны генерации и вплоть до линии расположения мареографов, для описания процесса распространения волн цунами может использоваться линейное приближение мелкой воды. В работе не исследовались вопросы набегания волны на берег, полагая, что на береговой линии выполняется условие абсолютно отражающей твердой стенки. Кривизной Земли пренебрегается, что характерно при изучении региональных цунами. Задача рассматривается в декартовой системе координат, где ось z имеет направление силы тяжести. Область источника, прямоугольник Ω размером $[l_1 \times l_2]$, предполагается известной из сейсмической информации. Обозначим область вычислений Φ , т. е. водную часть прямоугольника $\Pi = \{(x; y) : 0 \leq x \leq X; 0 \leq y \leq Y\}$ на плоскости $\{z = 0\}$. Φ имеет произвольную береговую линию Γ и прямолинейные морские границы. $\Omega \subset \Phi \subseteq \Pi$. Функция $\eta(x, y, t)$ — функция колебания уровня свободной поверхности и решение следующей начально-краевой задачи:

$$\eta_{tt} = \operatorname{div}(gh(x, y) \operatorname{grad} \eta) \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$\eta|_{t=0} = \varphi(x, y); \quad \eta_t|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

с полностью отражающими твердыми границами Γ и абсолютно поглощающими краевыми условиями второго порядка точности [8] на так называемых открытых участках границ $\{y=0; y=Y; x=X; x=0\}$, которые соответствуют сторонам прямоугольника Π :

$$\begin{aligned} c\eta_{yt} - \eta_{tt} + \frac{c^2}{2} \eta_{xx} |_{y=0} &= 0; \\ \frac{\partial \eta}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= 0, & -c\eta_{yt} - \eta_{tt} + \frac{c^2}{2} \eta_{xx} |_{y=Y} &= 0; \\ & & -c\eta_{xt} - \eta_{tt} + \frac{c^2}{2} \eta_{yy} |_{x=X} &= 0; \\ & & c\eta_{xt} - \eta_{tt} + \frac{c^2}{2} \eta_{yy} |_{x=0} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где c — фазовая скорость волны, определяемая как $c(x, y) = \sqrt{gh(x, y)}$. Здесь $h(x, y)$ — гладкая функция, описывающая рельеф дна, g — ускорение силы тяжести.

Обратная задача состоит в определении первоначального поднятия свободной поверхности $\eta(x, y, t)|_{t=0}$, описываемого некоторой финитной функцией $\varphi(x, y)$ с носителем в области Ω по входным данным, которыми является вектор-функция $\vec{\eta}_0(t)$ с компонентами из мареограмм $\eta(x_i, y_i, t)$, зафиксированных в конечном числе точек (приемников) $R_p(x_p, y_p)$, $p = 1, 2, \dots, P$:

$$\vec{\eta}_0(t) = (\eta(x_1, y_1, t), \eta(x_2, y_2, t), \dots, \eta(x_P, y_P, t)). \quad (4)$$

3. Дискретизация задачи и построение r -решения

Сформулированная постановка (1)–(3) неявным образом вводит в рассмотрение так называемый оператор прямой задачи A , который переводит начальное поднятие $\varphi(x, y)$ в данные (4). Этот оператор действует следующим образом: при фиксированном профиле дна для текущего начального поднятия нужно решить начально-краевую задачу (1)–(3) и взять набор значений полученного решения в точках $R_p(x_p, y_p)$, $p = 1, 2, \dots, P$, т. е. получить вектор-функцию $\vec{\eta}_0(t)$. Это можно записать в операторном виде как

$$A\varphi = \vec{\eta}_0(t). \quad (5)$$

В работах [11, 14] показано, что оператор A является компактным линейным оператором $A : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(0, T)$, а, следовательно, операторное уравнение первого рода (5) может быть сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, для численного решения которой нужно перейти к ее конечномерной аппроксимации. Компактность исходного оператора означает, что с ростом размерности подпространств при конечномерной аппроксимации растет и число обусловленности получаемой матрицы и, следовательно, чувствительность получаемого решения к ошибкам. Один из способов разрешения возникающего противоречия состоит в построении так называемого r -решения [10]. Регуляризация оператора в этом случае осуществляется путем сужения оператора на подпространство, являющееся линейной оболочкой первых правых сингулярных векторов оператора.

Для тестовых расчетов задача (1)–(3) аппроксимируется на основе конечно-разностного подхода по явно-неявной разностной схеме, построенной на четырехточечном шаблоне и равномерной прямоугольной разнесенной сетке (см. [13, с. 61–62]). Схема имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным и первый по времени. Неизвестная функция $\varphi(x, y)$ ищется в прямоугольнике

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l_1; 0 \leq y \leq l_2\}$$

в виде конечного отрезка ряда Фурье по пространственным гармоникам

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} \sin \frac{m\pi}{l_1} x \sin \frac{n\pi}{l_2} y \quad (6)$$

с неизвестными коэффициентами $\vec{c} = \{c_{mn}\}$. Входные данные представляются в виде набора из конечного числа N_t значений функций в каждый момент времени t_j , $j = 1, \dots, N_t$, характеризующих колебания свободной поверхности в конечном числе точек наблюдения $R_p(x_p, y_p)$, $p = 1, \dots, P$. Обозначая $\eta_{pj} = \eta(x_p, y_p, t_j)$, можно записать $\vec{\eta} = (\eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{1N_t}, \eta_{21}, \dots, \eta_{2N_t}, \eta_{P1}, \dots, \eta_{PN_t})^\top$. Таким образом, размерность пространства решений для дискретной задачи равна $M \times N$, общая размерность пространства дискретизованных входных данных равна $P \times N_t$. Для неизвестного вектора коэффициентов \vec{c} получается следующая линейная система:

$$\vec{\eta} = \mathbf{A}\vec{c}. \quad (7)$$

Чтобы получить каждый столбец матрицы \mathbf{A} , надо численно решить задачу (1)–(3), где соответствующая гармоника из суммы (6) используется в качестве начального поднятия; $\vec{c} = \sum_{j=1}^{MN} \alpha_j \vec{e}_j$, $\alpha_j = \frac{(\vec{\eta}, \vec{l}_j)}{s_j}$, где \vec{l}_j и \vec{e}_j — левые и правые сингулярные векторы матрицы \mathbf{A} , а s_j — ее сингулярные числа. Тогда r -решение уравнения (7) имеет вид: $\vec{c}^{[r]} = \sum_{j=1}^r \alpha_j \vec{e}_j$, а в итоге r -решение дискретизованного уравнения (5) принимает вид

$$\varphi^{[r]}(x, y) = \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \beta_{mn}^j \varphi_{mn}(x, y), \quad (8)$$

где $\vec{e}_j = (\beta_{11}^j, \beta_{12}^j, \dots, \beta_{MN}^j)^\top$ и $\varphi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi}{l_1} x \sin \frac{n\pi}{l_2} y$. Понятно, что свойства полученной матрицы, а, следовательно, и решения зависят от батиметрии, конфигурации системы наблюдения и временного интервала наблюдений.

В рассматриваемой задаче сингулярные числа матрицы быстро убывают с ростом их номеров, это и означает некорректность данной задачи. Задаваясь определенным числом обусловленности (cond) получившейся матрицы конечно-мерной системы, можно определить возможное число r из условия: $r = \max \left\{ k : \frac{s_k}{s_1} \geq \frac{1}{\text{cond}} \right\}$. Меняя величину r , можно контролировать погрешность решения. Число r выбирается существенно меньшим, чем минимальный из размеров матрицы. Естественно, что с увеличением числа r повышается информативность получаемого r -решения, зато ухудшается устойчивость. В конечном итоге величина r определяется поведением сингулярного спектра и уровнем помех в данных.

4. Применение метода для восстановления источника цунами 2013 года вблизи Соломоновых островов

Применимость предложенного подхода проверялась при численных расчетах реального события — цунами, произошедшего вследствие землетрясения 6 февраля 2013 года вблизи Соломоновых островов с магнитудой 8.0 Mw, эпицентром (10.738 S, 165.138 E) на глубине 29 км. Область моделирования — водная часть прямоугольника

$$\Pi = \{(x; y) : 140^\circ \text{ E} \leq x \leq 185^\circ \text{ E}; 13^\circ \text{ N} \leq y \leq 17^\circ \text{ S}\}$$

с кусочно-линейными береговыми границами покрыта 1-минутной сеткой из 2700×1800 точек. Предполагаемая область источника

$$\Omega = \{164.638^\circ \text{ E} \leq x \leq 165.638^\circ \text{ E}; 11.238^\circ \text{ S} \leq y \leq 10.238^\circ \text{ S}\}$$

покрыта сеткой из 61×61 точек. Центр источника цунами предполагается в точке (165.138° E, 10.738° S) с координатами (1509, 376). На береговых границах расчетной области формулируется условие полного отражения, на открытых морских границах — свободного прохода. Шаг по времени $\Delta t = 4$ (секунды), длина используемой части каждой мареограммы $N_t = 2000$, начиная с первого вступления волны в соответствующем приемнике. Система наблюдения состояла из 6 глубоководных регистраторов DART[®], занумерованных согласно рисунку 1 по часовой стрелке и отмеченных кружками: 1–55012; 2–55023; 3–52403; 4–52402; 5–52406; 6–51425, в дальнейшем будем называть их приемниками, максимальное значение $P = 6$. На рисунках 1, 2, 5–7 по осям указаны расстояния в градусах: по горизонтали — долгота, по вертикали — широта. Количество используемых пространственных гармоник было выбрано $M = 15$; $N = 15$ согласно формуле (6), таким образом, размерность пространства решений равнялась 225. Распространение волны цунами для данного региона рассчитывалось по программе MOST (Method of Splitting Tsunami) [<http://nctr.pmel.noaa.gov/model.html>], адаптированной для NVIDIA GPU [16]. В этих вычислениях матрица \mathbf{A} имела размер $((2000 \times P) \times 225)$, где числа $P = 3, 4, 5, 6$ соответствуют количеству участвующих в инверсии приемников, т. е. записанных в них мареограмм.

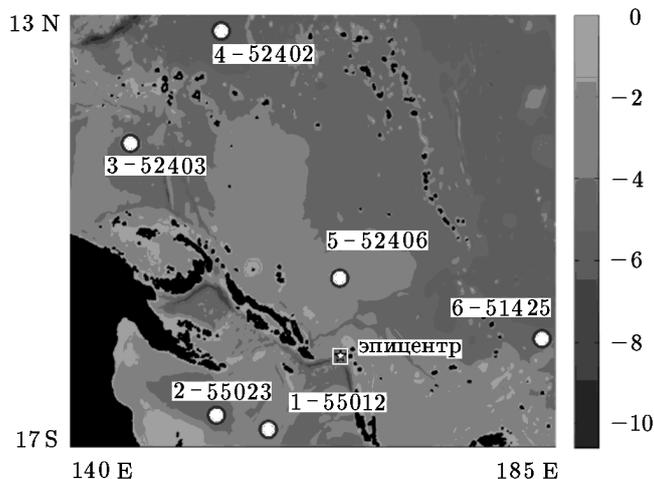


Рис. 1. Батиметрия области моделирования: глубоководные буи ДАРТ — кружки, область источника — квадрат, эпицентр землетрясения — белая звездочка в квадрате, суша — область черного цвета; шкала глубин дана в километрах

Наиболее трудоемкой частью вычислений является вычисление матрицы \mathbf{A} , расчет одного столбца для данной модели занимал почти 7 минут на NVIDIA GPU M2070. Но вычисления каждого из них независимы, что позволяет использовать технологии параллельных вычислений. Непосредственно же обращение занимает секунды.

На рис. 2 приводится результат инверсии для рассматриваемого события.

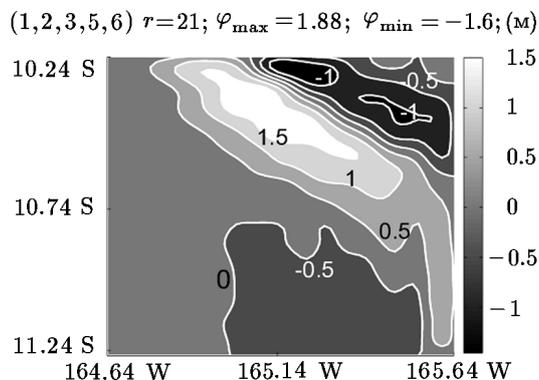


Рис. 2. Результат восстановления в области источника цунами Ω с использованием реальных мареограмм, записанных глубоководными буями: 1-55012; 2-55023; 3-52403; 5-52406; 6-51425

Для этого восстановленного источника было произведено моделирование распространения волны цунами в описанной выше акватории Тихого океана и получены колебания уровня поверхности океана в точках с координатами упомянутых глубоководных буев ДАРТ. На рис. 3 приведены графики наблюдаемых мареограмм (пунктирная линия) и вычисленных от источника, восстановленного с использованием мареограмм в приемниках (1, 2, 3, 5, 6) (сплошная линия). Для оценки адекватности результата моделирования важно совпадение первых трех периодов в записи колебаний. Сравнение этих графиков позволяет говорить в целом об адекватности предложенного подхода к решению обратной задачи восстановления первоначальной формы волны цунами. Вероятно, улучшая фильтрацию входных данных можно получить лучшее совпадение вычисленных мареограмм с наблюдаемыми.

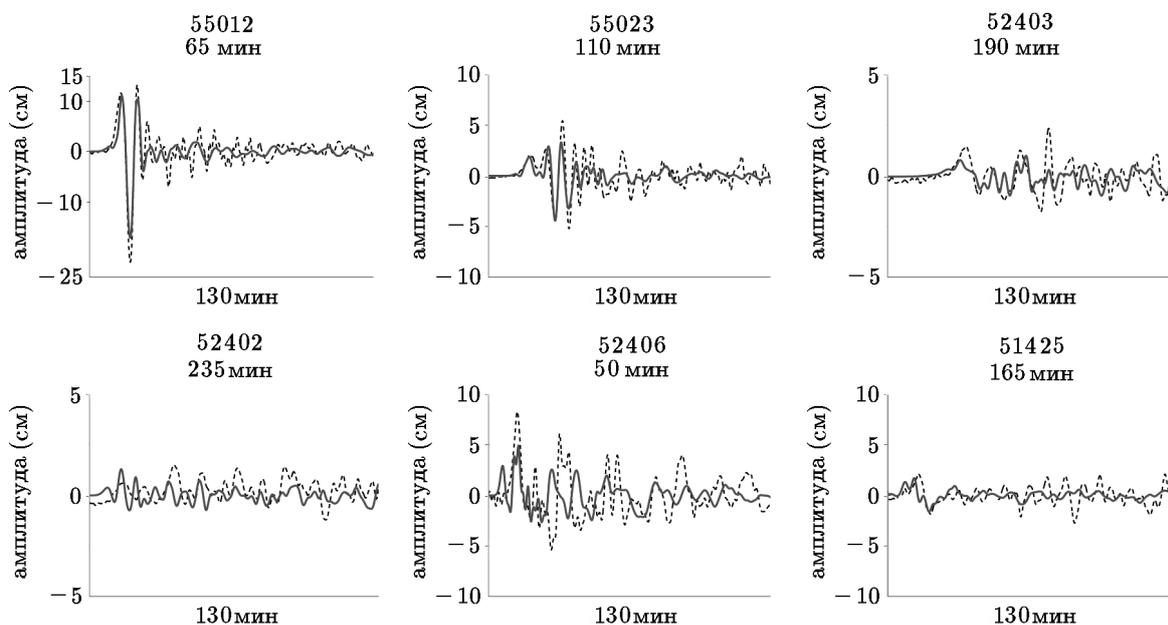


Рис. 3. Графики наблюдаемых мареограмм (пунктирная линия) и вычисленных от источника, восстановленного с использованием мареограмм в приемниках с номерами (1, 2, 3, 5, 6) (сплошная линия). Соответствующие ID реальных ДАРТов указаны сверху каждого графика, цифры ниже соответствуют началу записи, считая от начала землетрясения 06.02.2013 вблизи Соломоновых островов. Длина каждой представленной записи 130 минут

5. Выбор эффективной системы наблюдения

Анализ сингулярного спектра полученной матрицы \mathbf{A} позволяет непосредственно судить о возможности восстановления функции источника при заданной системе наблюдения. Этот вопрос детально рассматривался в [14, 15] для различных типов модельных постановок. Были подробно изучены свойства оператора обратной задачи, влияние параметров модели на результат инверсии как в случае прямоугольного бассейна постоянной глубины, так и для области моделирования с реальной батиметрией и синтетическими мареограммами. Как отмечено выше, сингулярные числа матрицы \mathbf{A} быстро убывают с ростом их номеров, что и означает некорректность задачи. Естественно, что сингулярный спектр матрицы \mathbf{A} определяется, при прочих равных условиях, именно числом и расположением точек наблюдения. Под точкой наблюдения или приемником здесь понимается место, где производится запись колебаний уровня океана. Как было показано в [14], увеличение числа приемников приводит к возможности использования большего числа правых сингулярных векторов для конструирования решения и, в конечном счете, к повышению его качества. Однако это верно всегда только для модельного случая ровного дна. В случае реального цунами начинают сказываться неоднородности океанического дна и зашумленность данных, что приводит к тому, что увеличение используемых в инверсии мареограмм может сказаться отрицательно на результатах восстановления источника цунами, что было хорошо видно из приведенного в [15] примера инверсии в случае с реальной батиметрией и модельным источником. Подтверждение полученных закономерностей в условиях реального события составляет суть представленных здесь численных экспериментов.

Предлагаемый подход дает возможность соблюсти баланс между количеством приемников и качеством результата инверсии: на основе анализа поведения сингулярного

спектра матрицы \mathbf{A} , полученного в каждом конкретном случае, определить критерий выбора числа r , чтобы избежать численной неустойчивости.

В проведенной серии численных экспериментов при обращении использовались реальные мареграммы, записанные при помощи перечисленных выше глубоководных датчиков. На рис. 4 (левый) приводятся десятичные логарифмы сингулярных чисел матрицы \mathbf{A} в зависимости от их номеров для различных наборов приемников из упомянутых ранее и на рис. 4 (правый) — “рабочая часть” тех же графиков с большей детализацией. При заданном числе обусловленности, что соответствует в определенном смысле горизонтальной прямой на графике, величина r , соответствующая пересечению этой прямой с графиком сингулярного спектра, определяется на горизонтальной оси. В расчетах использовались только такие базисные векторы, для которых соответствующие им сингулярные числа s_k удовлетворяли условию $\frac{s_k}{s_1} \geq d$, где $d = 1/\text{cond}$. Понятно, что при более пологом графике сингулярного спектра матрицы появляется возможность использовать большее r , т. е. получить более информативное решение.

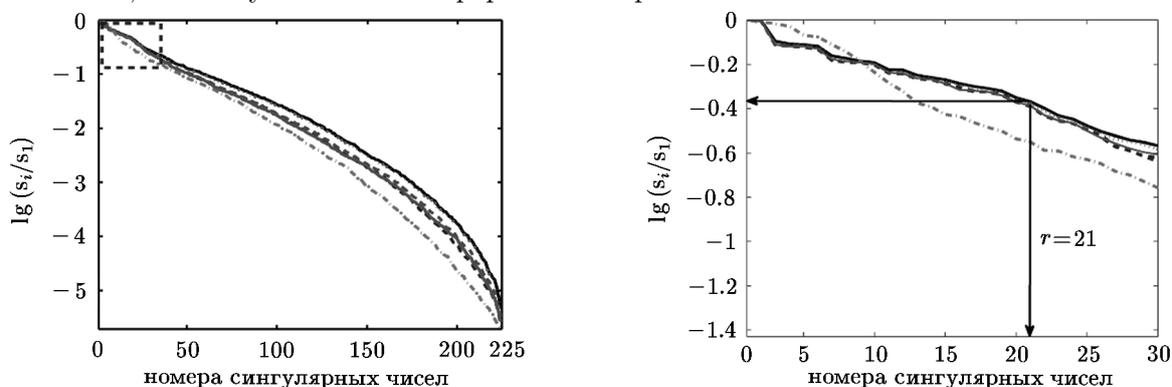


Рис. 4. Графики десятичных логарифмов сингулярных чисел матрицы \mathbf{A} в зависимости от их номеров (левый) и те же графики с большей детализацией (правый) для различных систем наблюдения: (4, 5, 6) — штрих-пунктирная линия, (1, 3, 5) — штрих-линия, (1, 5, 6) — тонкая черная линия; (1, 2, 3, 5, 6) — пунктирная линия; (1, 2, 3, 4, 5, 6) — непрерывная линия. В скобках перечислены используемые в инверсии приемники

Исходя из рис. 4 (правый) ясно, что худший результат восстановления следует ожидать для обращения по мареграммам набора из (4, 5, 6) приемников, так как при одном и том же числе обусловленности матрицы можно использовать гораздо меньшее значение числа r .

Этот вывод подтверждается приведенными ниже на рис. 5 и рис. 6 изображениями результатов восстановления реального источника для различных систем регистрации и значений числа r . Числа в скобках на рисунках указывают номера приемников, мареграммы которых участвовали в обращении. Нетрудно убедиться, что увеличение числа станций приводит, чаще всего, к возможности использования большего числа правых сингулярных векторов для конструирования решения и, в конечном счете, к повышению его качества.

Сравнение результатов инверсии при числе обусловленности получающейся матрицы $\text{cond} = 7.5$ и при использовании одинаковых по количеству, но разных наборов приемников, таких как (1, 2, 5), (1, 3, 5) и (4, 5, 6), представленных на рис. 5, демонстрирует влияние азимутального расположения приемников относительно очага цунами и особенностей батиметрии. Надо отметить, что при этом числе обусловленности форма источника практически не восстанавливается ни при каком наборе приемников, что, очевидно, объясняется большой зашумленностью данных. По-видимому, при таких значениях па-

раметра r решение при любых наборах приемников попадает в зону неустойчивости. Действительно, на рис. 5 приводится результат инверсии при $r = 46$ для той же системы наблюдения, что и на рис. 2 при $r = 21$, когда форма источника определяется уже достаточно четко. Проявление неустойчивости численного решения с ростом числа $r > 21$ для этого набора приемников связано с началом чуть более резкого убывания графика сингулярного спектра, что также объясняется большой зашумленностью реальных данных.

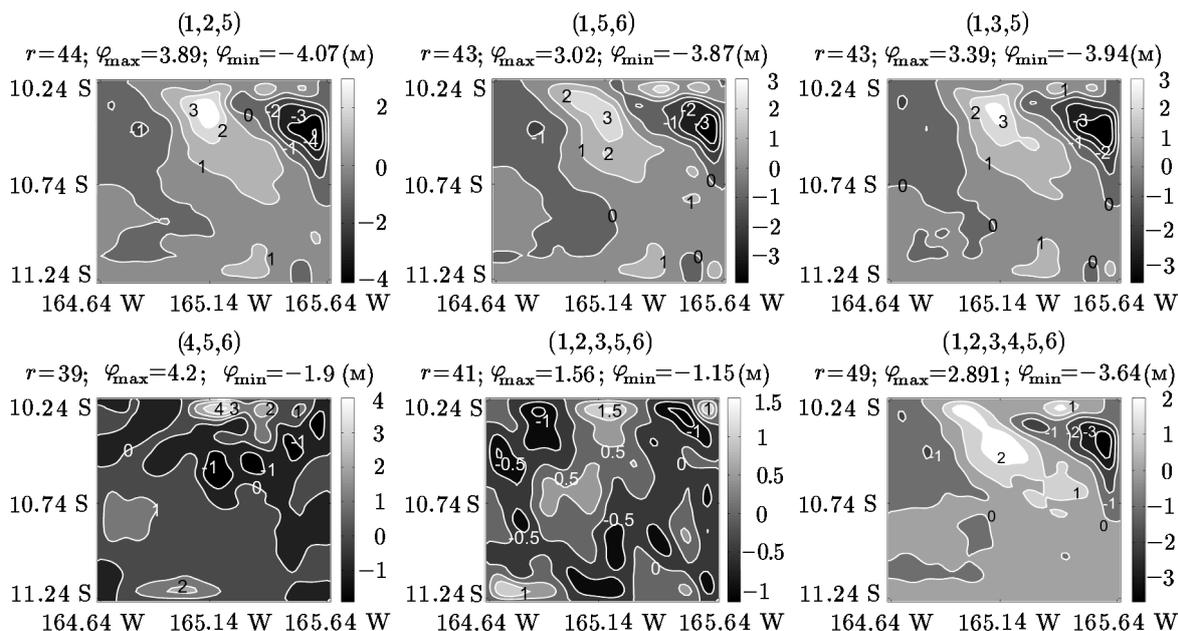


Рис. 5. Результаты восстановления источника цунами для различных наборов используемых приемников (перечислены в скобках) с числом обусловленности получающейся матрицы 7.5

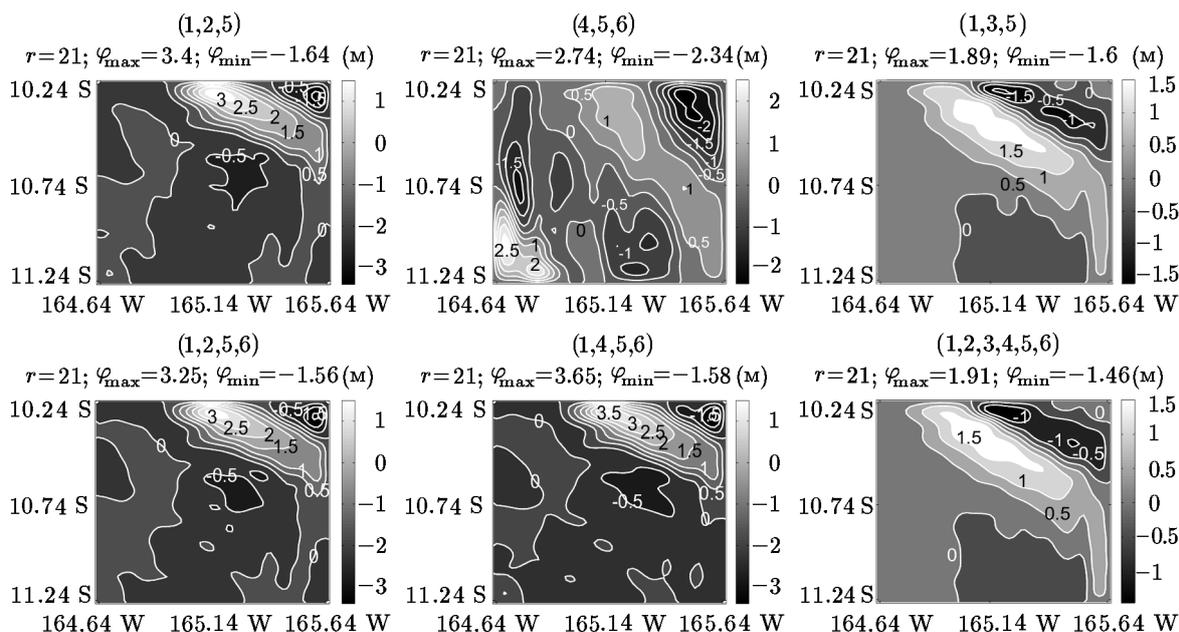


Рис. 6. Результаты восстановления источника цунами для различных наборов используемых приемников (перечислены в скобках) с числом обусловленности получающейся матрицы 2.5

Анализ всех представленных результатов позволяет сделать вывод, что именно к виду, представленному на рис. 2, приближаются восстановленные формы источника для различных наборов используемых приемников при уменьшении числа обусловленности соответствующих матриц. Последнее хорошо иллюстрируется сравнением результатов инверсии для системы наблюдения, состоящей из приемников (1, 3, 5) с $r = 43$ и $r = 21$ на рис. 5 и рис. 6. То же самое можно сказать, анализируя результаты для случая, когда использовались все шесть приемников. Поэтому можно утверждать, что форма и экстремальные значения источника, представленные на рис. 2, близки к реальности.

Худшим из представленных на рис. 5 и рис. 6 результатом инверсии, очевидно, является результат, полученный при использовании мареограмм приемников (4, 5, 6), что подтверждает предварительные выводы на основе анализа сингулярных спектров матрицы \mathbf{A} .

Из сравнения результатов для наборов (4, 5, 6) и (1, 5, 6) на рис. 5 и (4, 5, 6) и (1, 4, 5, 6) на рис. 6 видно, что присутствие в системе наблюдения 1-го приемника существенно сказывается на улучшении результата инверсии по форме и максимальным значениям, что можно объяснить попаданием этого приемника на отраженное направление от подводной “стенки”, относительно падающей от источника волны. По-видимому, удаленный и окруженный островами приемник 4 вообще мало информативен и только вносит дополнительную помеху. Здесь следует сказать, что батиметрия Тихого океана в области моделирования, представленная на рис. 1, очень сложная с многочисленными подводными скалами и горными хребтами.

Из рис. 5 видно, что наборы (1, 2, 3, 4, 5, 6) и (1, 3, 5) дают примерно одинаковые результаты по форме и максимальным значениям. Что говорит о том, что присутствие мареограмм от наиболее близких и менее экранированных островами приемников (1, 3, 5) играет основную роль при обращении.

Численные эксперименты с меньшим числом обусловленности для одних и тех же наборов приемников в случае реальных данных позволяют получить лучшие результаты в смысле формы и экстремальных значений, что видно из сравнения результатов инверсии на рис. 5 и рис. 6. Сравнивая результаты для наборов приемников (1, 2, 5) и (1, 2, 5, 6), можно видеть, что добавление к системе наблюдения приемника с номером 6 не повышает качество инверсии, несмотря на его относительную близость к области источника. Возможно, это связано с экранированием его от источника островами. А замена в наборе (1, 2, 5) приемника 2 на приемник 3 приводит к существенно лучшему результату. Это можно объяснить особенностями подводной части рельефа.

Связь местоположения приемников с направлениями падения–отражения обсуждалась в [15] для модельной постановки.

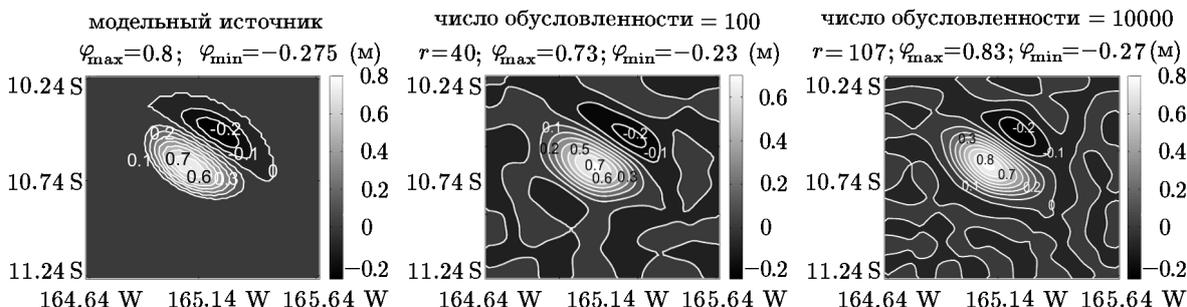


Рис. 7. Результаты восстановления модельного источника цунами в области Ω для набора приемников (1, 2, 3, 4, 5, 6) при различном значении числа r . Шкала высот в метрах

Результаты численных экспериментов с синтетическими незашумленными данными и реальной батиметрией, представленные на рис. 7, показывают, что отсутствие шумов в данных позволяет использовать число $r > 70$, следовательно, решение получается более информативным, т. е. больше соответствует исходному модельному источнику цунами.

Количество r используемых базисных векторов фактически оказывается существенно меньше минимального из размеров матрицы \mathbf{A} , что реально позволяет избежать неустойчивости задачи, связанной с резким убыванием сингулярных чисел матрицы. При дальнейшем увеличении числа r мы попадаем в зону неустойчивости и экстремальные значения искомой функции начинают удаляться от истинных. Предел устойчивости для каждого конкретного случая свой, он зависит от свойств матрицы \mathbf{A} , определяемых физической постановкой задачи. И здесь следует заметить, что увеличение количества используемых в инверсии реальных мареограмм приводит к улучшению результата инверсии только тогда, когда приемники имеют “хорошее” расположение относительно области предполагаемого очага, что соответствует увеличению пологого участка на графике сингулярного спектра. Определить “хорошее” расположение в конкретной ситуации можно, основываясь на численном моделировании. Изменение пространственного распределения системы наблюдения при той же батиметрии приводит, естественно, к изменению сингулярного спектра матрицы \mathbf{A} , что и позволяет оценить, как при этом будет меняться результат инверсии.

6. Заключение

Задача восстановления первоначальной формы волны цунами по записям колебаний уровня свободной поверхности, обусловленных пришедшей волной, в серии удаленных приемников рассматривается как обратная задача математической физики, которая относится к классу некорректных задач. Подобно большинству обратных задач сейсмологии на практике численное решение, полученное математическими методами, становится неустойчивым в силу объективной зашумленности реальных мареографных записей.

В данной работе мы применили метод r -решений к обратной задаче восстановления первоначальной формы волны цунами для события 6 февраля 2013 года вблизи Соломоновых островов. Предложенная методика позволяет избежать неустойчивости решения рассматриваемой некорректной задачи. Целью настоящего исследования было применение разработанной ранее методологии именно для реального события, т. е. с использованием реальных батиметрии и мареограмм.

Предложенный подход позволяет оценивать возможности используемой системы регистрации приходящих волн при предварительных расчетах на синтетических данных и предложить более эффективный проект расположения датчиков уровня свободной поверхности океана.

Предлагаемый подход, при котором решение строится на основе анализа свойств оператора решения задачи, определяемых выбранной системой наблюдения и реальной батиметрией, позволяет получить достаточно надежный результат восстановления для заданных условий. Форма предполагаемого источника цунами не имеет значения для применяемого метода, важно знать только область возможного источника. Полученный источник цунами может использоваться для последующего моделирования распространения волны цунами в качестве начальных данных.

Наибольшие вычислительные усилия для расчетов в заданной области с определенной системой регистрации цунами требуются только однократно для вычисления матрицы \mathbf{A} . Непосредственно же обращение занимает секунды. Если из сейсмологических

данных известна зона возможного очага цунами, то, сделав предварительные расчеты, так называемый “предварительный” цунами-сценарий можно в будущем обрабатывать по предложенной методике поступающие мареограммы в режиме реального времени.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность к.т.н. А.А. Романенко за помощь в расчетах и д.ф.-м.н. Г.В. Шевченко за полезные комментарии и помощь в подготовке данных.

Литература

1. **Satake K.** Inversion of tsunami waveforms for the estimation of a fault heterogeneity: method and numerical experiments // *J. Phys. Earth.* — 1987. — Vol. 35. — P. 241–254.
2. **Satake K.** Inversion of tsunami waveforms for the estimation of heterogeneous fault motion of large submarine earthquakes: the 1968 Tokachi-oki and the 1983 Japan sea earthquake // *J. Geophys. Res.* — 1989. — Vol. 94. — P. 5627–5636.
3. **Tinti S., Piatanesi A., and Bortolucci E.** The finite-element wavepropagator approach and the tsunami inversion problem // *J. Phys. Chem. Earth.* — 1996. — Vol. 12. — P. 27–32.
4. **Piatanesi A., Tinti S., and Pagnoni G.** Tsunami waveform inversion by numerical finite-elements Green’s functions // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* — 2001. — Vol. 1. — P. 187–194.
5. **Pires C., Miranda P.M.A.** Tsunami waveform inversion by adjoint methods // *J. Geophys. Res.* — 2001. — Vol. 106. — P. 19773–19796.
6. **Titov V.V., Gonzalez F.I., Bernard E.N., Eble M.C., Mofjeld H.O., Newman J.C., and Venturato A.J.** Real-time tsunami forecasting: Challenges and solutions / U.S. National Tsunami Hazard Mitigation Program // *Nat. Hazards.* — 2005. — Vol. 35, № 1. — P. 41–58. — (Special Issue).
7. **Percival D.B., Denbo D.W., Eble M.C., Gica E., Mofjeld H.O., Spillane M.C., Tang L., and Titov V.V.** Extraction of tsunami source coefficients via inversion of DART[®] buoy data // *Nat. Hazards.* — 2011. — Vol. 58, № 1. — P. 567–590.
8. **Enquist B., Majda A.** Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves // *Math. Comp.* — 1977. — Vol. 31, № 139. — P. 629–654.
9. **Voronina T.A., Tcheverda V.A.** Reconstruction of tsunami initial form via level oscillation // *Bull. Novosibirsk Comp. Center. Ser. Math. Model. Geoph.* — Novosibirsk, 1998. — Vol. 4. — P. 127–136.
10. **Cheverda V.A., Kostin V.I.** r -pseudoinverse for compact operator // *Siberian Electronic Mathematical Reports.* — 2010. — Vol. 7. — P. 258–282.
11. **Воронина Т.А.** Определение пространственного распределения источников колебаний по дистанционным измерениям в конечном числе точек // *Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.* — Новосибирск, 2004. — Т. 7, № 3. — С. 203–211.
12. **Voronina T.A.** Reconstruction of initial tsunami waveforms by a truncated SVD method // *J. Inverse and Ill-posed Problems.* — 2012. — Vol. 19. — P. 615–629.
13. **Марчук Ан.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И.** Численное моделирование волн цунами. — Новосибирск: Наука, 1983.
14. **Voronina T.A., Tcheverda V.A., and Voronin V.V.** Some properties of the inverse operator for a tsunami source recovery // *Siberian Electronic Mathematical Reports.* — 2014. — Vol. 11. — P. 532–547.

15. **Voronin V.V., Voronina T.A., and Tcheverda V.A.** Inversion method for initial tsunami waveform reconstruction // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. — 2015. — Vol. 15. — P. 1251–1263.
16. **Lavrentiev M.M., Romanenko A.A., and Lysakov K.F.** Modern computer architecture to speed-up calculation of tsunami wave propagation / Proc. of the Eleventh (2014) Pacific/Asia Offshore Mech. Symp. October, 12–16. Shanghai, China. — 2014. — P. 186–191. — (ISSN 1946-004X).

*Поступила в редакцию 14 апреля 2016 г.,
в окончательном варианте 30 мая 2016 г.*

Литература в транслитерации

1. **Satake K.** Inversion of tsunami waveforms for the estimation of a fault heterogeneity: method and numerical experiments // J. Phys. Earth. — 1987. — Vol. 35. — P. 241–254.
2. **Satake K.** Inversion of tsunami waveforms for the estimation of heterogeneous fault motion of large submarine earthquakes: the 1968 Tokachi-oki and the 1983 Japan sea earthquake // J. Geophys. Res. — 1989. — Vol. 94. — P. 5627–5636.
3. **Tinti S., Piatanesi A., and Bortolucci E.** The finite-element wavepropagator approach and the tsunami inversion problem // J. Phys. Chem. Earth. — 1996. — Vol. 12. — P. 27–32.
4. **Piatanesi A., Tinti S., and Pagnoni G.** Tsunami waveform inversion by numerical finite-elements Green's functions // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. — 2001. — Vol. 1. — P. 187–194.
5. **Pires C., Miranda P.M.A.** Tsunami waveform inversion by adjoint methods // J. Geophys. Res. — 2001. — Vol. 106. — P. 19773–19796.
6. **Titov V.V., Gonzalez F.I., Bernard E.N., Eble M.C., Mofjeld H.O., Newman J.C., and Venturato A.J.** Real-time tsunami forecasting: Challenges and solutions / U.S. National Tsunami Hazard Mitigation Program // Nat. Hazards. — 2005. — Vol. 35, № 1. — P. 41–58. — (Special Issue).
7. **Percival D.B., Denbo D.W., Eble M.C., Gica E., Mofjeld H.O., Spillane M.C., Tang L., and Titov V.V.** Extraction of tsunami source coefficients via inversion of DART[®] buoy data // Nat. Hazards. — 2011. — Vol. 58, № 1. — P. 567–590.
8. **Enquist B., Majda A.** Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves // Math. Comp. — 1977. — Vol. 31, № 139. — P. 629–654.
9. **Voronina T.A., Tcheverda V.A.** Reconstruction of tsunami initial form via level oscillation // Bull. Novosibirsk Comp. Center. Ser. Math. Model. Geoph. — Novosibirsk, 1998. — Vol. 4. — P. 127–136.
10. **Cheverda V.A., Kostin V.I.** r -pseudoinverse for compact operator // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2010. — Vol. 7. — P. 258–282.
11. **Voronina T.A.** Opredelenie prostranstvennogo raspredeleniya istochnikov kolebanii po distancionnym izmereniyam v konechnom chisle toчек // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2004. — T. 7, № 3. — S. 203–211.
12. **Voronina T.A.** Reconstruction of initial tsunami waveforms by a truncated SVD method // J. Inverse and Ill-posed Problems. — 2012. — Vol. 19. — P. 615–629.
13. **Marchuk An.G., Chubarov L.B., Shokin YU.I.** Chislennoe modelirovanie voln cunami. — Novosibirsk: Nauka, 1983.
14. **Voronina T.A., Tcheverda V.A., and Voronin V.V.** Some properties of the inverse operator for a tsunami source recovery // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2014. — Vol. 11. — P. 532–547.

15. **Voronin V.V., Voronina T.A., and Tcheverda V.A.** Inversion method for initial tsunami waveform reconstruction // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. — 2015. — Vol. 15. — P. 1251–1263.
16. **Lavrentiev M.M., Romanenko A.A., and Lysakov K.F.** Modern computer architecture to speed-up calculation of tsunami wave propagation / Proc. of the Eleventh (2014) Pacific/Asia Offshore Mech. Symp. October, 12–16. Shanghai, China. — 2014. — P. 186–191. — (ISSN 1946-004X).