

УДК 539.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ

Д. А. Ходжаев, Б. Х. Эшматов*

Ташкентский институт ирригации и мелиорации, 700000 Ташкент, Узбекистан

* Политехнический институт и государственный университет штата Вирджиния, 24061 Блэксбург, США

E-mails: dhodjaev@mail.ru, ebkh@mail.ru

Рассмотрена задача о колебаниях вязкоупругой пластины с сосредоточенными массами в геометрически нелинейной постановке. В уравнении движения пластины действие сосредоточенных масс учитывается с использованием δ -функции Дирака. С помощью метода Бубнова — Галеркина задача сводится к решению системы обыкновенных нелинейных интегродифференциальных уравнений типа уравнений Вольтерры. Для решения полученной системы с сингулярным ядром Колтунова — Ржаницына применен численный метод, основанный на использовании квадратурных формул. Исследовано влияние вязкоупругих свойств материала пластины, а также расположения и количества сосредоточенных масс на амплитудно-частотные характеристики колебания. Проведено сравнение результатов численных расчетов, полученных с использованием различных теорий.

Ключевые слова: вязкоупругая пластина, сосредоточенная масса, нелинейные колебания, метод Бубнова — Галеркина, ядро релаксации.

В машиностроении, строительной и авиационной промышленности часто возникают задачи о колебаниях пластин и оболочек из композитных материалов с продольными и поперечными ребрами, накладками или узлами приборов. При теоретическом изучении такого рода задач эти присоединенные элементы целесообразно интерпретировать как дополнительные массы, жестко соединенные с системами и сосредоточенные в точках. Влияние сосредоточенных масс на систему имеет инерционный характер [1]. Существует ряд работ, в которых рассмотрены колебания упругих систем с сосредоточенными массами [1–6]. В этих работах либо решались задачи в линейной постановке [1], либо учитывались лишь некоторые свойства материалов конструкций [2–6]. В то же время задачи о нелинейных колебаниях упругих пластин и оболочек с сосредоточенными массами исследованы недостаточно: имеются лишь отдельные работы на эту тему (см., например, [7]).

Как известно, большинство композитных материалов обладают ярко выраженными вязкоупругими свойствами [8]. Широкое применение в промышленности новых материалов, обладающих вязкоупругими свойствами, и анализ их динамического поведения свидетельствуют о существенном влиянии на их прочность неоднородностей типа присоединенных масс.

Значительно меньше внимания уделялось изучению особенностей поведения неоднородных в инерционном отношении вязкоупругих систем [9]. Задачи рассматривались с использованием либо дифференциальной модели Фойгта, либо интегральной модели Больцмана — Вольтерры, в которой при расчетах в качестве ядер релаксации применялись экспоненциальные ядра, не описывающие реальные процессы в оболочках и пластинах в начальные моменты времени [10].

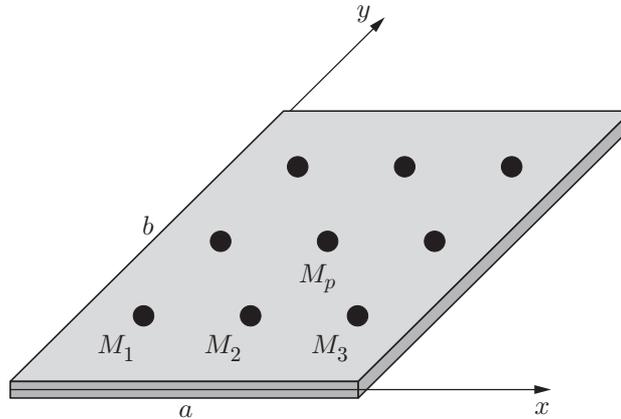


Рис. 1. Схема пластины с сосредоточенными массами

Одной из особенностей рассматриваемой задачи является то, что при использовании метода Бубнова — Галеркина задача и в линейной и в нелинейной постановках сводится к решению нераспадающихся систем интегродифференциальных уравнений с сингулярными ядрами, исследование которых существенно затруднено. Поэтому во многих работах для координатных функций вводятся дополнительные условия (см., например, [3]).

Целью данной работы является исследование нелинейных колебаний вязкоупругой пластины с сосредоточенными массами.

1. Математическая модель. Рассмотрим прямоугольную вязкоупругую пластину толщиной h со сторонами a и b , изготовленную из однородного изотропного материала с сосредоточенными массами M_p в точках (x_p, y_p) , $p = 1, 2, \dots, I$ (рис. 1).

Зависимость между напряжениями σ_x , σ_y , τ_{xy} и деформациями ε_x , ε_y , γ_{xy} в срединной поверхности запишем в виде [8, 10]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \mu^2} (1 - R^*) (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), & \sigma_y &= \frac{E}{1 - \mu^2} (1 - R^*) (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \mu)} (1 - R^*) \gamma_{xy}, \end{aligned} \tag{1}$$

где E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона; R^* — интегральный оператор с ядром релаксации $R(t)$:

$$R^* \varphi = \int_0^t R(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Связь между деформациями ε_x , ε_y , γ_{xy} в срединной поверхности и перемещениями u , v , w в направлениях x , y , z представим в виде [11]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right], & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $w_0 = w_0(x, y)$ — начальный прогиб.

Влияние сосредоточенных масс на вязкоупругую пластину имеет инерционный характер и учитывается в уравнении движения с помощью δ -функции Дирака [1]:

$$m(x, y) = \rho h + \sum_{p=1}^I M_p \delta(x - x_p) \delta(y - y_p) \tag{3}$$

(ρ — плотность материала пластины).

Подставляя (1) и (2) (с учетом (3)) в уравнения [11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ -\frac{D}{h} (1 - R^*) \nabla^4 (w - w_0) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ + \frac{q}{h} - \left(\rho + \frac{1}{h} \sum_{p=1}^I M_p \delta(x - x_p) \delta(y - y_p) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)] \end{aligned}$$

и вводя функцию напряжения F в виде [11]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

получим систему уравнений типа уравнений Кармана

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} (1 - R^*) \nabla^4 (w - w_0) + \left(\rho + \frac{1}{h} \sum_{p=1}^I M_p \delta(x - x_p) \delta(y - y_p) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = L(w, F) + \frac{q}{h}, \\ \frac{1}{E} \nabla^4 F = -\frac{1}{2} (1 - R^*) [L(w, w) - L(w_0, w_0)], \end{aligned} \quad (4)$$

где $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$ — жесткость пластины при изгибе; q — внешняя нагрузка;

$$L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right], \quad L(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Таким образом, математическая модель задачи о колебаниях вязкоупругих пластин с сосредоточенными массами в геометрически нелинейной постановке описывается системой интегродифференциальных уравнений в частных производных (4) при соответствующих граничных и начальных условиях.

Используя результаты [12], можно получить математические модели задачи о нелинейных колебаниях вязкоупругих пластин с сосредоточенными массами:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} (1 - R^*) \nabla^4 (w - w_0) + \left(\rho + \frac{1}{h} \sum_{p=1}^I M_p \delta(x - x_p) \delta(y - y_p) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \\ = \frac{6D}{h^3 ab} \nabla^2 w (1 - R^*) \left\{ \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\} + \frac{q}{h}. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Выбор ядра релаксации. Как показывают исследования, интегральные соотношения наследственной теории вязкоупругости эквивалентны линейным дифференциальным соотношениям с постоянными коэффициентами, если ядро представляет собой сумму экспоненциальных функций. В то же время при обработке экспериментальных данных оказывается, что ядра, содержащие один или несколько экспоненциальных членов, мало пригодны для описания свойств реальных материалов, поэтому необходимо использовать более сложные зависимости на основе слабосингулярных функций. При этом нужно учитывать следующие обстоятельства. Результаты исследования ползучести и релаксации

вязкоупругих материалов свидетельствуют о том, что интенсивность релаксационных процессов на начальной стадии испытаний чрезвычайно велика. При этом скорости процессов настолько большие, что их непосредственное измерение в начальный момент оказывается невозможным. Поэтому сами процессы необходимо рассматривать как динамические, а их скорости считать равными бесконечности [10].

Данное явление можно описать с использованием слабосингулярных функций, обеспечивающих конечные деформации и напряжения, в отличие от сильносингулярных функций, применение которых приводит к бесконечно большим значениям. Слабосингулярные функции хорошо описывают скорости релаксационных процессов, если содержат достаточное количество реологических параметров, например ядра, предложенные Ю. Н. Работновым, А. Р. Ржаницыным, М. А. Колтуновым и др. [10].

В дальнейшем при расчете задач будем использовать простейшее и в то же время достаточно общее слабосингулярное ядро Колтунова — Ржаницына с тремя реологическими параметрами (A , β и α) [10]:

$$R(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (6)$$

3. Алгоритм численного решения нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с сосредоточенными массами. Численный метод, предложенный в [13], применим для решения систем нелинейных интегродифференциальных уравнений вида

$$\sum_{n=1}^N a_{kn} \ddot{w}_n + \omega_k^2 w_k = X_k \left(t, w_1, \dots, w_N, \int_0^t \varphi_k(t, \tau, w_1(\tau), \dots, w_N(\tau)) d\tau \right), \quad (7)$$

$$w_k(0) = w_{0k}, \quad \dot{w}_k(0) = \dot{w}_{0k}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где $w_k = w_k(t)$ — неизвестные функции времени; X_k , φ_k — непрерывные функции в области изменения аргументов; a_{kn} , ω_k — заданные постоянные величины.

К системам (7) сводятся многие нелинейные динамические задачи вязкоупругости [14–16], в частности задачи о колебаниях и динамической устойчивости вязкоупругих конструкций с сосредоточенной массой.

Систему (7) запишем в матричном виде

$$A \ddot{w} + \omega^2 w = X \left(t, w, \int_0^t \varphi(t, \tau, w(\tau)) d\tau \right), \quad w(0) = w_0, \quad \dot{w}(0) = \dot{w}_0, \quad (8)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{pmatrix}, \quad \omega^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_N \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_N \end{pmatrix}.$$

Решая систему (8) относительно w , для определения неизвестных в точках $t_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \dots$ (h — шаг интерполяции) получим рекуррентную формулу

$$w_{i+1} = \dot{w}_0 t_{i+1} + w_0 + A^{-1} \sum_{j=0}^i A_j (t_{i+1} - t_j) \left[-\omega^2 w_j + X \left(t_j, w_j, \sum_{k=0}^j B_k \varphi(t_j, t_k, w_k) \right) \right], \quad (9)$$

где A^{-1} — матрица, обратная матрице A ; A_j, B_k ($j = 0, 1, \dots, i, k = 0, 1, \dots, j$) — узлы интерполяционной формулы.

Соответствующая задача в двумерной постановке при использовании метода Бубнова — Галеркина сводится к решению системы нелинейных интегродифференциальных уравнений вида

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{klnm} \ddot{w}_{nm} + \omega_{kl}^2 w_{kl} = X_{kl} \left(t, w_{11}, \dots, w_{NM}, \int_0^t \varphi_{kl}(t, \tau, w_{11}(\tau), \dots, w_{NM}(\tau)) d\tau \right),$$

$$w_{kl}(0) = w_{0kl}, \quad \dot{w}_{kl}(0) = \dot{w}_{0kl}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad l = 1, 2, \dots, M.$$

Если в рассматриваемой задаче ввести матрицы A, ω^2, X, φ , то для определения зависимости $w = w(t)$ получим матричное уравнение (8), решение которого находится из рекуррентного соотношения (9).

4. Тестовый пример. Рассмотрим систему нелинейных интегродифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \lambda_1^2 u &= p_x + \lambda_2 \int_0^t R(t-\tau)u(\tau) d\tau + \lambda_3 \int_0^t R_1(t-\tau)v(\tau) d\tau + \lambda_4 \int_0^t R_2(t-\tau)w^2(\tau) d\tau, \\ \ddot{v} + \varphi_1^2 v &= p_y + \varphi_2 \int_0^t R_1(t-\tau)v(\tau) d\tau + \varphi_3 \int_0^t R(t-\tau)u(\tau) d\tau + \varphi_4 \int_0^t R_2(t-\tau)w^2(\tau) d\tau, \\ \ddot{w} + \omega_1^2 w &= q + \omega_2 \int_0^t R_3(t-\tau)w(\tau) d\tau + \omega_3 w \int_0^t R(t-\tau)u(\tau) d\tau + \\ &+ \omega_4 w \int_0^t R_1(t-\tau)v(\tau) d\tau + \omega_5 \int_0^t R_2(t-\tau)w^2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

с начальными условиями $u(0) = 1, \dot{u}(0) = -\beta_1, v(0) = 1, \dot{v}(0) = -\beta_2, w(0) = 1, \dot{w}(0) = -\beta_3$, где

$$\begin{aligned} R(t) &= A e^{-\beta_1 t} t^{\alpha-1}, & R_1(t) &= A_1 e^{-\beta_2 t} t^{\alpha_1-1}, & R_2(t) &= A_2 e^{-2\beta_3 t} t^{\alpha_2-1}, \\ R_3(t) &= A_3 e^{-\beta_3 t} t^{\alpha_3-1}, & 0 < \alpha < 1, & \quad 0 < \alpha_1 < 1, & \quad 0 < \alpha_2 < 1, & \quad 0 < \alpha_3 < 1, \\ p_x &= \left(\beta_1^2 + \lambda_1^2 - \frac{\lambda_2 A}{\alpha} t^\alpha \right) e^{-\beta_1 t} - \frac{\lambda_3 A_1}{\alpha_1} e^{-\beta_2 t} t^{\alpha_1} - \frac{\lambda_4 A_2}{\alpha_2} e^{-2\beta_3 t} t^{\alpha_2}, \\ p_y &= \left(\beta_2^2 + \varphi_1^2 - \frac{\varphi_2 A_1}{\alpha_1} t^{\alpha_1} \right) e^{-\beta_2 t} - \frac{\varphi_3 A}{\alpha} e^{-\beta_1 t} t^\alpha - \frac{\varphi_4 A_2}{\alpha_2} e^{-2\beta_3 t} t^{\alpha_2}, \\ q &= \left(\beta_3^2 + \omega_1^2 - \frac{\omega_2 A_3}{\alpha_3} t^{\alpha_3} \right) e^{-\beta_3 t} - \frac{\omega_3 A}{\alpha} e^{-(\beta_1+\beta_3)t} t^\alpha - \frac{\omega_4 A_1}{\alpha_1} e^{-(\beta_2+\beta_3)t} t^{\alpha_1} - \frac{\omega_5 A_2}{\alpha_2} e^{-2\beta_3 t} t^{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Система уравнений (10) имеет точное решение $u = e^{-\beta_1 t}, v = e^{-\beta_2 t}, w = e^{-\beta_3 t}$, удовлетворяющее начальным условиям. Дважды интегрируя систему уравнений (10) с учетом

начальных условий, приближенные значения $u_n = u(t_n)$, $v_n = v(t_n)$, $w_n = w(t_n)$ в узлах $t_n = (n - 1)\Delta t$, $n = 1, 2, \dots$ (аналогично формуле (9)) находим из соотношений

$$\begin{aligned}
 u_n &= 1 - \beta_1 t_n + \sum_{i=0}^{n-1} B_i(t_n - t_i) \left[p_x(t_i) - \lambda_1^2 u_i + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^i \left(\frac{\lambda_2 A}{\alpha} C_k e^{-\beta_1 t_k} u_{i-k} + \frac{\lambda_3 A_1}{\alpha_1} C_{1k} e^{-\beta_2 t_k} v_{i-k} + \frac{\lambda_4 A_2}{\alpha_2} C_{2k} e^{-2\beta_3 t_k} w_{i-k}^2 \right) \right], \\
 v_n &= 1 - \beta_2 t_n + \sum_{i=0}^{n-1} B_i(t_n - t_i) \left[p_y(t_i) - \varphi_1^2 v_i + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^i \left(\frac{\varphi_2 A_1}{\alpha_1} C_{1k} e^{-\beta_2 t_k} v_{i-k} + \frac{\varphi_3 A}{\alpha} C_k e^{-\beta_1 t_k} u_{i-k} + \frac{\varphi_4 A_2}{\alpha_2} C_{2k} e^{-2\beta_3 t_k} w_{i-k}^2 \right) \right], \\
 w_n &= 1 - \beta_3 t_n + \sum_{i=0}^{n-1} B_i(t_n - t_i) \left[q(t_i) - \omega_1^2 w_i + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^i \left(\frac{\omega_2 A_3}{\alpha_3} C_{3k} e^{-\beta_3 t_k} w_{i-k} + \frac{\omega_3 A}{\alpha} w_i C_k e^{-\beta_1 t_k} u_{i-k} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\omega_4 A_2}{\alpha_2} w_i C_{1k} e^{-\beta_2 t_k} v_{i-k} + \frac{\omega_5 A_2}{\alpha_2} C_{2k} e^{-2\beta_3 t_k} w_{i-k}^2 \right) \right],
 \end{aligned} \tag{11}$$

где $B_i, C_k, C_{1k}, C_{2k}, C_{3k}$ — коэффициенты квадратурной формулы трапеции; $B_0 = h/2$; $B_i = h$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$);

$$\begin{aligned}
 C_0 &= h^\alpha/2, & C_i &= h^\alpha[i^\alpha - (i - 1)^\alpha]/2, & C_k &= h^\alpha[(k + 1)^\alpha - (k - 1)^\alpha]/2, \\
 C_{l0} &= h^{\alpha_l}/2, & C_{li} &= h^{\alpha_l}[i^{\alpha_l} - (i - 1)^{\alpha_l}]/2, & C_{lk} &= h^{\alpha_l}[(k + 1)^{\alpha_l} - (k - 1)^{\alpha_l}]/2, \\
 & & & & k &= 1, 2, \dots, n - 1, & l &= 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

В таблице приведены результаты расчетов по формулам (11) в интервале $t = 0 \div 0,8$ с шагом $\Delta t = 0,001$. Использовались следующие начальные данные: $\lambda = 1,1$; $\lambda_1 = 1,2$; $\lambda_2 = 1,3$; $\lambda_3 = 1,4$; $\lambda_4 = 1,5$; $\varphi = 1,2$; $\varphi_1 = 1,3$; $\varphi_2 = 1,4$; $\varphi_3 = 1,5$; $\varphi_4 = 1,6$; $\omega = 1,3$; $\omega_1 = 1,4$; $\omega_2 = 1,5$; $\omega_3 = 1,6$; $\omega_4 = 1,7$; $\omega_5 = 1,8$; $A = 0,01$; $A_1 = 0,02$; $A_2 = 0,03$; $A_3 = 0,04$; $\beta = 0,25$; $\beta_1 = 0,26$; $\beta_2 = 0,27$; $\beta_3 = 0,28$; $\alpha = 0,05$; $\alpha_1 = 0,06$; $\alpha_2 = 0,07$;

t	Решение		Δ
	Точное	Приближенное	
0	1,000 000	1,000 000	—
0,1	0,974 335	0,974 237	$9,8 \cdot 10^{-5}$
0,2	0,949 329	0,948 868	$4,6 \cdot 10^{-4}$
0,3	0,924 964	0,923 942	10^{-3}
0,4	0,901 225	0,899 560	$1,6 \cdot 10^{-3}$
0,5	0,878 095	0,875 867	$2,2 \cdot 10^{-3}$
0,6	0,855 559	0,853 050	$2,5 \cdot 10^{-3}$
0,7	0,833 601	0,831 336	$2,0 \cdot 10^{-3}$
0,8	0,812 207	0,810 994	$1,2 \cdot 10^{-3}$

$\alpha_3 = 0,08$. Из таблицы следует, что погрешность Δ расчетов, выполненных описанным методом, совпадает с погрешностью использованных квадратурных формул и имеет тот же порядок малости относительно шага интерполяции.

5. Расчет нелинейных колебаний вязкоупругой пластины с сосредоточенными массами. Метод Бубнова — Галеркина. Пусть пластина шарнирно оперта со всех сторон. Прогибы пластины w и w_0 аппроксимируем функцией

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ w_0(x, y) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{0nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) во второе уравнение (4) и приравнявая в обеих частях этого уравнения коэффициенты при одинаковых гармониках тригонометрических функций, находим функцию усилий

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= E \sum_{i,j=1}^N \sum_{r,s=1}^M (1 - R^*)(w_{ir}w_{js} - w_{0ir}w_{0js}) \left(C_{irjs} \cos \frac{(i+j)\pi x}{a} \cos \frac{(r+s)\pi y}{b} + \right. \\ &+ A_{irjs} \cos \frac{(i+j)\pi x}{a} \cos \frac{(r-s)\pi y}{b} + D_{irjs} \cos \frac{(i-j)\pi x}{a} \cos \frac{(r+s)\pi y}{b} + \\ &\left. + B_{irjs} \cos \frac{(i-j)\pi x}{a} \cos \frac{(r-s)\pi y}{b} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_{irjs} &= -\frac{\lambda^2 ir(ir - js)}{4[(i+j)^2 + \lambda^2(r+s)^2]^2}, & A_{irjs} &= \frac{\lambda^2 ir(ir + js)}{4[(i+j)^2 + \lambda^2(r-s)^2]^2}, \\ D_{irjs} &= \frac{\lambda^2 ir(ir + js)}{4[(i-j)^2 + \lambda^2(r+s)^2]^2}, & B_{irjs} &= -\frac{\lambda^2 ir(ir - js)}{4[(i-j)^2 + \lambda^2(r-s)^2]^2}, & \lambda &= \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Подставляя (13) и (12) в первое уравнение (4) и выполняя процедуру метода Бубнова — Галеркина с использованием свойств функции Дирака [1], для определения неизвестных $w_{kl} = w_{kl}(t)$ получим следующую систему нелинейных интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\rho b^4}{Eh^2\pi^2} \ddot{w}_{kl} + \frac{4b^3}{\pi^2 a h^3 E} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left(\sum_{p=1}^I M_p \sin \frac{k\pi x_p}{a} \sin \frac{n\pi x_p}{a} \sin \frac{l\pi y_p}{b} \sin \frac{m\pi y_p}{b} \right) \ddot{w}_{nm} + \\ + \frac{\pi^2}{12(1 - \mu^2)} \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right]^2 (1 - R^*)(w_{kl} - w_{0kl}) = \\ = \frac{16\alpha_{kl} h q}{kl\pi^4 E} \left(\frac{b}{h} \right)^4 - \frac{1}{h^2} \sum_{n,i,j=1}^N \sum_{m,r,s=1}^M a_{klnmirjs} w_{nm} (1 - R^*)(w_{ir}w_{js} - w_{0ir}w_{0js}), \end{aligned} \quad (14)$$

$$w_{kl}(0) = w_{0kl}, \quad \dot{w}_{kl}(0) = \dot{w}_{0kl}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad l = 1, 2, \dots, M.$$

Здесь $\alpha_{kl} = 1$, если k и l нечетные, $\alpha_{kl} = 0$, если k или l четное; коэффициент $a_{klnmirjs}$ определяется из [14, 15].

Вводя в (14) безразмерные величины x_p/a , y_p/b , M_p/M_0 , w_{kl}/h , w_{0kl}/h , $(q/E)(b/h)^4$, ωt , $R(t)/\omega$ и сохраняя при этом прежние обозначения, получим

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{klnm} \ddot{w}_{nm} + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right]^2 (1 - R^*) (w_{kl} - w_{0kl}) =$$

$$= \frac{48\alpha_{kl}(1 - \mu^2)}{kl\pi^6} q - \frac{3(1 - \mu^2)}{\pi^2} \sum_{n,i,j=1}^N \sum_{m,r,s=1}^M a_{klnmirjs} w_{nm} (1 - R^*) (w_{ir} w_{js} - w_{0ir} w_{0js}), \quad (15)$$

$$w_{kl}(0) = w_{0kl}, \quad \dot{w}_{kl}(0) = \dot{w}_{0kl}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad l = 1, 2, \dots, M,$$

где $\omega = \sqrt{(4D/\rho h)(\pi/b)^4}$ — частота основного тона колебаний; $M_0 = ab\rho h$ — масса пластины;

$B_{klnm} = 4 \sum_{p=1}^I M_p \sin k\pi x_p \sin n\pi x_p \sin l\pi y_p \sin m\pi y_p$ при $k \neq n$, $l \neq m$, в иных случаях

$$B_{klkl} = 1 + 4 \sum_{p=1}^I M_p \sin^2 k\pi x_p \sin^2 l\pi y_p.$$

Интегрирование системы (15) проводилось с помощью численного метода, основанного на использовании квадратурных формул, алгоритм которого приведен в п. 3. При расчетах в качестве ядер релаксации использовались слабосингулярные ядра Колтунова — Ржаницына (6). Расчеты проводились на алгоритмическом языке Delphi.

Ниже приведены результаты вычислений при различных значениях физических и геометрических параметров вязкоупругой пластины (рис. 2–7). За исключением случаев, оговоренных особо, в качестве исходных принимались следующие значения параметров: $w_0 = 10^{-3}$, $A = 0,05$, $\beta = 0,01$, $\alpha = 0,25$, $q = 0$, $\lambda = 1$.

Исследована сходимость метода Бубнова — Галеркина (рис. 2). При вычислении прогиба удерживались семь первых гармоник ($N = 7$, $M = 1$). Расчеты показали, что дальнейшее увеличение количества членов не оказывает существенного влияния на амплитуду колебаний вязкоупругой пластины.

На рис. 3 представлена зависимость прогиба в центре упругой (кривая 1) и вязкоупругих пластин (кривые 2, 3) от времени. Видно, что учет вязкоупругих свойств материала пластины приводит к затуханию колебательного процесса. В начальный период решения упругой и вязкоупругой задач мало различаются, однако с течением времени вязкоупругие свойства начинают оказывать существенное влияние. Как показывают исследования, увеличение реологического параметра A и уменьшение параметра α приводят к уменьшению амплитуды и соответственно частоты колебаний.

Дальнейшие расчеты показали, что изменение третьего реологического параметра вязкости β ($0 < \beta < 1$) не оказывает существенного влияния на процесс колебаний вязкоупругой пластины, что также подтверждает неприемлемость применения экспоненциальных ядер релаксации при расчетах динамических задач вязкоупругих систем.

На рис. 4 приведены результаты расчета деформирования квадратной пластины с сосредоточенной в центре массой $M_1 = 0,1$ при отсутствии поперечной нагрузки ($q = 0$). Видно, что в начальные моменты времени результаты, полученные с использованием этих ядер, почти совпадают, однако с течением времени их различие увеличивается, и при $t = 10$ оно составляет более 30 %. В то же время значения амплитуды, полученные в вязкоупругой задаче с использованием экспоненциального ядра релаксации, несущественно отличаются от полученных в упругой постановке не только в начальные моменты, но и на достаточно большом промежутке времени.

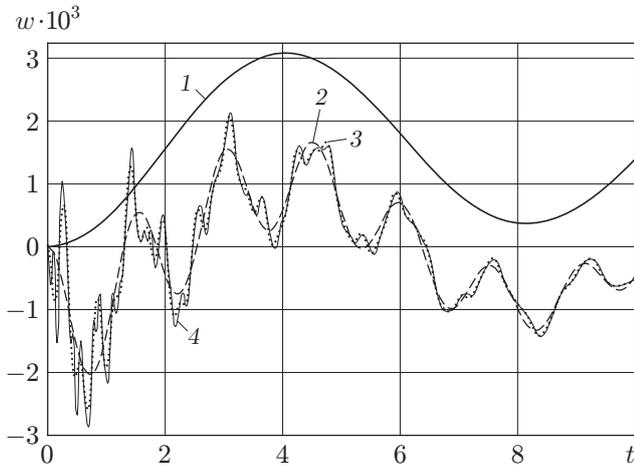


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость прогиба от времени:
1 — $N = 1$; 2 — $N = 3$; 3 — $N = 7$; 4 — $N = 11$

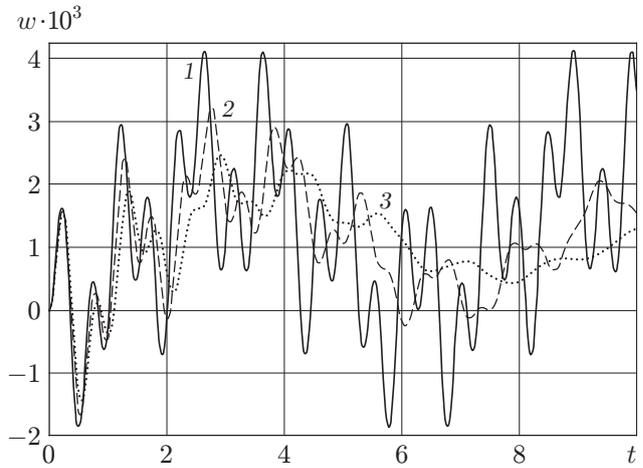


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость прогиба от времени:
1 — $A = 0$; 2 — $A = 0,05$; 3 — $A = 0,1$

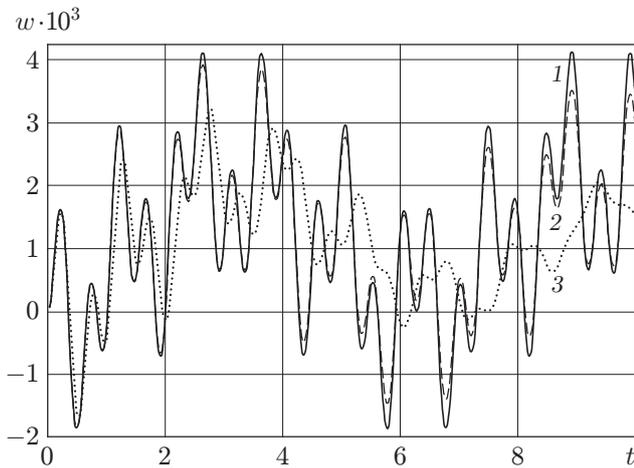


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость прогиба от времени при $M_1 = 0,1$:
1 — упругий материал пластины; 2, 3 — вязкоупругий материал (2 — экспоненциальное ядро релаксации; 3 — слабосингулярное ядро Колтунова — Ржаницына)

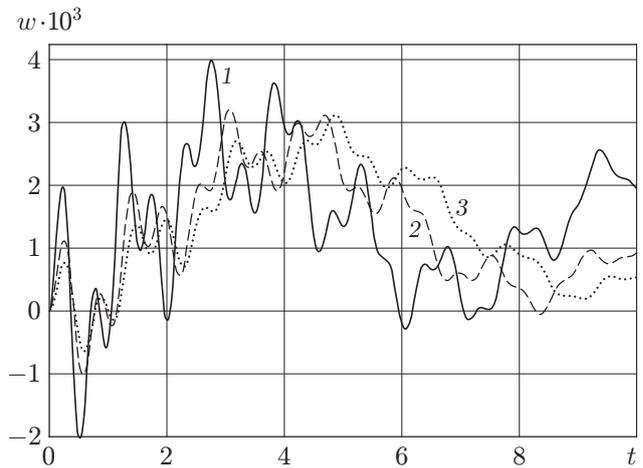


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость прогиба от времени:
1 — $M_1 = 0$; 2 — $M_1 = 0,1$; 3 — $M_1 = 0,2$

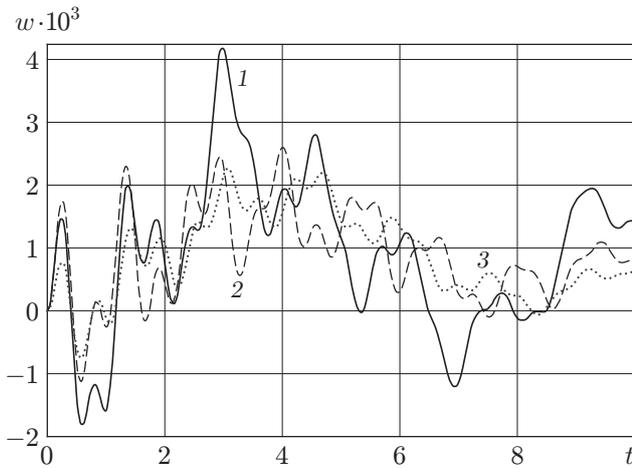


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость прогиба от времени при $M_1 = 0,1, y_1 = 1/2$:

1 — $x_1 = 1/2$; 2 — $x_1 = 1/3$; 3 — $x_1 = 1/6$

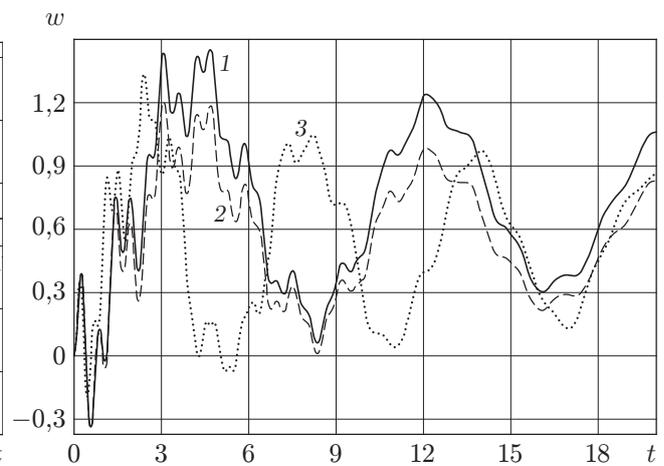


Рис. 7

Рис. 7. Зависимость прогиба от времени при $w_0 = 0,5, q = 1, M_1 = 0,1, x_1 = y_1 = 1/2$:

1 — линейная теория; 2 — теория Бергера; 3 — гипотеза Кирхгофа — Лява

Влияние сосредоточенной массы в центре пластины на колебательный процесс показано на рис. 5. Видно, что увеличение сосредоточенной массы приводит к уменьшению амплитуды и частоты колебаний. Следует отметить, что в частном случае, когда в центре пластины отсутствует сосредоточенная масса ($M_1 = 0$), получаются результаты, совпадающие с приведенными в работе [17].

Исследовано также влияние положения сосредоточенной массы на колебательный процесс (рис. 6). Установлено, что по мере удаления сосредоточенной массы от центра пластины частота колебаний увеличивается.

На рис. 7 приведены результаты расчетов с использованием различных теорий для квадратной пластины с сосредоточенной в центре массой $M_1 = 0,1$. Как показывают исследования в случае отсутствия начальных неправильностей и внешних нагрузок, результаты расчетов, полученные с использованием этих теорий, совпадают. Однако при наличии внешних нагрузок и увеличении значений начальных неправильностей зависимости $w(t)$, полученные по теориям Кирхгофа — Лява и Бергера, различаются уже в начальные моменты времени. Тем не менее результаты, полученные с использованием линейной теории, даже при этих условиях в течение достаточно длительного времени совпадают с полученными по теории Бергера (в расчетах по теории Бергера использовалось уравнение (5)).

Заключение. Анализ результатов исследования нелинейных динамических задач о колебаниях вязкоупругих пластин с сосредоточенными массами позволяет сделать следующие выводы.

Численные результаты, полученные с использованием экспоненциального ядра, обычно применяемого в качестве ядра релаксации, почти совпадают с результатами, полученными в упругой постановке. Поэтому возникает необходимость выбрать в качестве ядер релаксации ядра Колтунова — Ржаницына, содержащие достаточное количество реологических параметров для получения численных результатов, описывающих реальные процессы, происходящие в вязкоупругих конструкциях, и хорошо согласующихся с экспериментальными данными [10].

Увеличение сосредоточенной массы приводит к более интенсивному уменьшению амплитуды и частоты колебаний.

Как в упругом, так и в вязкоупругом случаях по мере удаления сосредоточенной массы от центра пластины частота колебаний увеличивается.

В зависимости от значений геометрических и физических параметров пластин в расчетах необходимо выбрать соответствующую теорию (линейную, Бергера или Кирхгофа — Лява). В случае колебаний квадратной пластины при отсутствии внешних нагрузок и начальных неправильностей результаты, полученные с использованием указанных теорий, совпадают. Однако при учете начальных неправильностей пластины и наличии внешних нагрузок различие результатов, полученных по этим теориям, возникает уже в начальные моменты времени. В данной постановке задачи наиболее приемлемой теорией является классическая теория Кирхгофа — Лява.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Amba-Rao C. L.** On the vibration of a rectangular plate carrying a concentrated mass // *J. Appl. Mech.* 1964. V. 31, N 3. P. 550–551.
2. **Chen R.** Vibration of cylindrical panels carrying a concentrated mass // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1979. V. 37, N 3. P. 874–875.
3. **Андреев Л. В.** Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами / Л. В. Андреев, А. Л. Дышко, И. Д. Павленко. М.: Машиностроение, 1988.
4. **Dowell E., Doherty S. M.** Experimental study of asymptotic modal analysis applied to a rectangular plate with concentrated masses // *J. Sound Vibration.* 1994. V. 170. P. 671–681.
5. **Cha P. D.** Free vibration of a rectangular plate carrying a concentrated mass // *J. Sound Vibration.* 1997. V. 207. P. 593–596.
6. **Wu J. S., Luo S. S.** Use of the analytical-and-combined method in the free vibration analysis of a rectangular plate with any number of point masses and translational springs // *J. Sound Vibration.* 1997. V. 200. P. 179–194.
7. **Бондарев П. А.** Колебания пластинки с сосредоточенными массами, лежащей на нелинейном упругом основании // *Укр. мат. журн.* 1974. № 1. С. 61–66.
8. **Ильюшин А. А.** Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победра. М.: Наука, 1970.
9. **Kocaturk T., Sezer S., Demir C.** Determination of the steady state response of viscoelastically point-supported rectangular specially orthotropic plates with added concentrated masses // *J. Sound Vibration.* 2004. V. 278. P. 789–806.
10. **Колтунов М. А.** Ползучесть и релаксация. М.: Высш. шк., 1976.
11. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
12. **Berger H. M.** A new approach to the analysis of large deflection of plates // *J. Appl. Mech.* 1955. V. 22, N 4. P. 465–472.
13. **Бадалов Ф. Б., Эшматов Х., Юсупов М.** О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // *Прикл. математика и механика.* 1987. Т. 51, № 5. С. 867–871.
14. **Eshmatov B. Kh.** Nonlinear vibrations of viscoelastic orthotropic plates from composite materials // *Proc. of the 3rd MIT conf. on comput. fluid and solid mech., Boston (USA), June 14–17, 2005.* Cambridge: Cambridge Univ., 2005. P. 93.
15. **Эшматов Б. Х.** Динамическая устойчивость вязкоупругости пластин при возрастающих сжимающих нагрузках // *ПМТФ.* 2006. V. 47, № 2. С. 165–175.

16. **Eshmatov B. Kh.** Nonlinear vibration analysis of viscoelastic plates based on a refined Timoshenko theory // Intern. Appl. Mech. 2006. V. 42, N 5. P. 596–605.
17. **Бадалов Ф. Б., Эшматов Х.** К исследованию нелинейных колебаний вязкоупругих пластин с начальными неправильностями // Прикл. механика. 1990. Т. 28, № 8. С. 99–105.

*Поступила в редакцию 23/I 2006 г.,
в окончательном варианте — 22/XI 2006 г.*
