

временно с задающего генератора на осциллограф поступали метки времени.

На фиг. 5, *a* представлена кинограмма процесса соударения, снятая в кадровом режиме. Интервалы между кадрами 40 мкс, время экспозиции $3 \cdot 10^{-8}$ с. На фиг. 5, *b* приведена фотография процесса, снятая в режиме фоторазвертки при работе лазера в «пичковом» режиме. Из этих фотографий можно определить скорости подлета и отскока стержня от преграды, а также время контакта. Типичный график зависимости скорости для двух торцов медного цилиндрического стержня при соударении со стальной преградой показан на фиг. 5, *c* (1 — задний торец стержня, 2 — передний торец стержня).

Данные сопоставления численных расчетов с экспериментом приведены на фиг. 6. Сплошной линией представлена зависимость времени контакта медного стержня со стальной преградой от начальной скорости удара. Расчет удара стержня по твердой преграде проводился при следующих параметрах: длина и диаметр стержня составляли соответственно 2 и 0,55 см, плотность материала $\rho_0 = 8,9$ г/см³, модуль объемного сжатия $k = 139$ ГПа, модуль сдвига $\mu = 46$ ГПа. Принималось, что динамический предел текучести меди $y_0 = 0,3$ ГПа. В отличие от задачи удара стержня из стали [2] участок ступенчатого поведения t_* сдвинут здесь в начальную область кривой при скоростях удара до 20 м/с. Это объясняется тем, что при увеличении скорости удара амплитуда напряжений в пластической волне повышается у меди быстрее, чем у стали. Результаты экспериментов по определению времени контакта при соударении медных стержней с закаленной стальной преградой приведены на фиг. 6 (точки).

Удовлетворительное совпадение расчета и эксперимента свидетельствует о том, что математическая модель упругопластического поведения среды правильно описывает явление отскока стержня от преграды.

Поступила 27 1 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Гулидов А. И., Фомин В. М. Анализ распространения упругопластических волн в коротких стержнях. — В кн.: Материалы симп. «Нелинейные волны деформаций». Ч. II. Таллин, 1978.
2. Гулидов А. И., Фомин В. М. Численное моделирование отскока осесимметрических стержней от твердой преграды. — ПМТФ, 1980, № 3.
3. Уилкинс М. Расчет упругопластических течений. — В сб.: Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967.
4. Бойко В. М., Папырин А. Н. Быстродействующие методы лазерной диагностики гетерогенных потоков. — В сб.: Современные экспериментальные методы исследования процессов тепло- и массообмена. Ч. 2. Минск, ИТМО АН БССР, 1981, с. 3—20.

УДК 539.374 : 534.1

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОДНОМЕРНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ГРУНТАХ

Н. Мамадалиев, А. И. Юсупов

(Москва, Карши)

В работе рассматривается распределение плоской и сферической волн в упругопластической среде, исходя из деформационной теории [1]. Напряженно-деформированное состояние среды определяется перемещением $u(r, t)$, деформациями $\epsilon_{rr} = \partial u / \partial r$, $\epsilon_{\varphi\varphi} = \epsilon_{\theta\theta} = u/r$ ($\epsilon_{\varphi\varphi} = \epsilon_{\theta\theta} = 0$ в плоском случае) и напряжениями σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$. Показано, что в зависимости от видов определяющих функций $\sigma(\epsilon)$, $\sigma_i(\epsilon_i)$ теории [1] в среде (грунте) может возникнуть либо ударная волна, либо непрерывные волны нагрузки — разгрузки. Вышеуказанные волны в грунтах исследованы в случае $\sigma = (\alpha_1 + \alpha_2|\epsilon|)\epsilon$, $\sigma_i = (\beta_1 - \beta_2\epsilon_i)\epsilon_i$, где α_i , β_i ($i = 1, 2$) — постоянные положительные коэффициенты. Решения задач построены обратным способом [2, 3] при заданной форме поверхности волны в виде полинома второй степени относительно времени t (для ударной волны) или координаты r (для волны разгрузки). При

этом принято, что процесс разгрузки среды является необратимым и линейным как по гидростатическому давлению σ , так и по интенсивности напряжений σ_i . На основе получаемых аналитических формул проводятся расчеты параметров среды, в том числе профиля нагрузки, на ЭВМ, и результаты представлены в виде графиков компонент напряжений и массовой скорости. Далее в работе изучается случай $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon, \varepsilon_i)$ с учетом возможных волновых эффектов и взаимного влияния первого и второго инвариантов тензора напряжений или деформации. Данное исследование служит продолжением [4] на случай учета прочностных характеристик среды при изучении динамики переходных процессов.

Отметим, что задачи о распространении плоской и сферической волн ранее рассматривались многими исследователями, в частности в работах [5—14]. Однако используемые ими модели грунта и горной породы существенно отличались от [4]. Например, в [5, 14] использована деформационная теория [15], в [6—8] — определяющие уравнения пластического течения [16], в [9, 10] — теории пластичности грунта [17] и т. д.

В отличие от [5—14] в данной работе при решении вышеуказанных задач движение и состояние среды при динамических нагрузках описываются уравнениями деформационной теории пластичности грунта [1], показано существование плоской волны разгрузки при трехосном напряженном состоянии среды и приводятся подробные сопоставления параметров упругопластической среды и обобщенного «пластического газа». Исследуются характерные особенности распространения сферической волны в упругопластической среде и поведение ее параметров при интенсивных воздействиях взрывного характера.

1. Пусть по нормали к некоторой плоскости действует мгновенно возникающая и затем произвольно убывающая нагрузка $\sigma_0(t)$. Тогда уравнение движения среды, зависимости между напряжениями и деформацией [1] с учетом теоремы о разгрузке А. А. Ильюшина [15] имеют вид

$$(1.1) \quad \rho_0 \partial^2 u / \partial t^2 = \partial \sigma_{rr} / \partial r;$$

при нагружении

$$(1.2) \quad \sigma_{rr} = (\lambda + 2G)\varepsilon, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = \lambda\varepsilon, \quad \lambda = \sigma/\varepsilon - (2/9)\sigma_i/\varepsilon_i, \\ G = (1/3)\sigma_i/\varepsilon_i,$$

$$\sigma = (\alpha_1 + \alpha_2|\varepsilon|)\varepsilon, \quad \sigma_i = (\beta_1 - \beta_2\varepsilon_i)\varepsilon_i;$$

при разгрузке

$$(1.3) \quad \sigma_{rr} - \sigma_{rr}^* = (\lambda_0 + 2G_0)(\varepsilon - \varepsilon^*),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\varphi\varphi}^* = \lambda_0(\varepsilon - \varepsilon^*), \quad \lambda_0 = E_1 - \frac{2}{9}E_2, \quad G_0 = \frac{1}{3}E_2,$$

где $\varepsilon, \varepsilon_i, \sigma, \sigma_i$ — первые и вторые инварианты тензоров деформаций и напряжений; E_1, E_2 — тангенсы углов наклона ветвей разгрузки (соответственно диаграммы $\sigma(\varepsilon)$ и $\sigma_i(\varepsilon_i)$ с осями ε и ε_i); $\varepsilon^*, \sigma_{rr}^*, \sigma_{\varphi\varphi}^*$ — деформация и компоненты напряжения в начале разгрузки. Подставляя (1.2) в (1.1) с учетом $\varepsilon_i = -(2/3)\varepsilon$ ($\varepsilon < 0$), имеем

$$(1.4) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[(\alpha_1 + \frac{4}{9}\beta_1) - 2(\alpha_2 - \frac{8}{27}\beta_2)\varepsilon \right] \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.$$

Из (1.4) видно, что при $(\alpha_2 - (8/27)\beta_2) > 0$ в грунте распространяется ударная волна $r = R^*(t)$ (фиг. 1, а, кривая I), скорость которой $a_1 = \{[\alpha_1 + (4/9)\beta_1 - 2(\alpha_2 - (8/27)\beta_2)\varepsilon]/\rho_0\}^{1/2}$ превышает скорость продольной упругой волны, иначе, при $(\alpha_2 - (8/27)\beta_2) < 0$ — центрированные волны нагружения, которые сверху отсекаются волной разгрузки $t = f^*(r)$ (фиг. 1, б, кривая I), являющейся границей области нагружения и разгрузки среды.

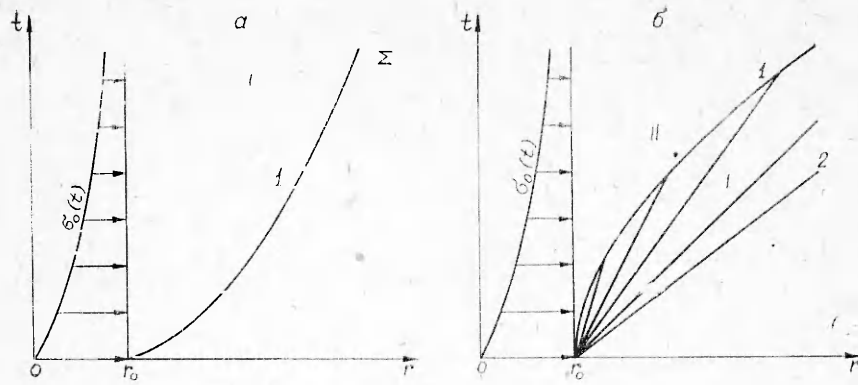
Случай $\alpha_2 - (8/27)\beta_2 = 0$ позволяет получить «вырожденную» упругую задачу, решение которой строится элементарно.

Рассмотрим случай, когда $(\alpha_2 - (8/27)\beta_2) > 0$. При этом предполагается, что за фронтом ударной волны происходит разгрузка среды. Условия на фронте волны и границе плоскости нагружения имеют вид

$$(1.5) \quad \sigma_{rr} = -\rho_0 \dot{R}^*(t) \dot{u}^*, \quad \dot{u}^* = -\dot{R}^*(t) \varepsilon_{rr},$$

$$\dot{R}^*(t) = dR^*(t)/dt, \quad \dot{u}^* = du^*/dt \text{ при } r = R^*(t);$$

$$(1.6) \quad \sigma_{rr} = -\sigma_0(t) \text{ при } r = r_0, \quad t \geq 0.$$



Ф и г. 1

Так как решение задачи строится обратным способом, то считается заданной скорость распространения фронта $\dot{R}^*(t)$ (формы ударной волны) и в ходе решения задачи при помощи (1.6) определяется профиль нагрузки $\sigma_0(t)$.

Пусть задана $\dot{R}$, тогда (1.5) при $r = R^*(t)$ имеет вид

$$(1.7) \quad \varepsilon^*(t) = - \frac{\rho_0 \dot{R}^{*2}(t) - \left(\alpha_1 + \frac{4}{9} \beta_1\right)}{\left(\alpha_2 - \frac{8}{27} \beta_2\right)}, \quad \frac{\partial u^*}{\partial t} = - \dot{R}^*(t) \varepsilon^*(t).$$

Теперь, подставляя (1.3) в (1.4), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - a_0^2 \frac{\partial \varepsilon^*(r)}{\partial r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma_{rr}^*(r)}{\partial r},$$

где $\rho_0 a_0^2 = \lambda_0 + 2G_0$, которое допускает решение

$$(1.8) \quad u(r, t) = f_1(r - a_0 t) + f_2(r + a_0 t) - \frac{1}{\rho_0 a_0^2} \int_{r_0}^r [\sigma_{rr}^*(r) - \rho_0 a_0^2 \varepsilon^*(r)] dr.$$

Отметим, что если уравнение $r = R^*(t)$ и $\dot{R}^*(t)$ представить относительно r , то деформация ε^* и массовая скорость $\partial u^*/\partial t$ в (1.7) будут функциями координаты r . При использовании (1.7) неизвестные функции f_1 и f_2 имеют вид

$$(1.9) \quad f'_i(z_i) = \frac{(-1)^i}{2a_0} \left\{ \frac{\dot{R}^*(F_i(z_i)) \left[\rho_0 \dot{R}^{*2}(F_i(z_i)) - \left(\alpha_1 + \frac{4}{9} \beta_1\right) \right]}{\left(\alpha_2 - \frac{8}{27} \beta_2\right)} + \right. \\ \left. + (-1)^i \frac{\sigma_{rr}^*[R^*(F_i(z_i))]}{\rho_0 a_0^2} \right\},$$

где $F_i(z_i)$ ($i = 1, 2$) — корень уравнения $R^*(t) + a_0 t = z_i$ относительно t , штрих сверху означает производную по аргументу.

Из (1.1) с учетом (1.6), (1.8) и (1.9) для определения профиля нагрузки получим формулу

$$(1.10) \quad \sigma_0(t) = - \sigma_{rr}^*[R^*(t)] + \rho_0 \int_{r_0}^{R^*(t)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dr.$$

На основе (1.8), (1.10) проводились расчеты для конкретного вида $R^*(t)$.

При $[\alpha_2 - (8/27)\beta_2] < 0$ возмущенная зона в плоскости (r, t) разбивается на области нагружения I и разгрузки II среды (см. фиг. 1, б), а их разграничивает поверхность волны разгрузки $t = f^*(r)$. В области активных деформаций в грунте за фронтом упругой волны $r = at$, где $a = \sqrt{(\alpha_1 + (4/9)\beta_1)/\rho_0}$ (кривая 2), распространяются центрированные волны Римана, которые замыкаются областью постоянных параметров вблизи границы плоскости нагружения. В данном случае задача решается для ступенчатой нагрузки. Так как диаграммы $\sigma(\epsilon)$, $\sigma_i(\epsilon_i)$ не имеют упругих участков, то на фронте $r = at$ смещение и деформация среды не претерпевают разрыва, а имеют нулевые значения.

Для построения решения этой задачи, введя автомодельную переменную $\xi = r/t$, из (1.4) получим

$$(1.11) \quad \rho_0 \xi \frac{du_i}{d\xi} + \left[\left(\alpha_1 + \frac{4}{9} \beta_1 \right) - 2 \left(\alpha_2 - \frac{8}{27} \beta_2 \right) \epsilon \right] \frac{d\epsilon}{d\xi} = 0, \\ du_i/d\xi + \xi d\epsilon/d\xi = 0 \quad (u_t = \partial u/\partial t).$$

Далее, приравнявая определитель однородной системы (1.11) к нулю, имеем

$$(1.12) \quad \xi = \sqrt{\frac{(\alpha_1 + (4/9)\beta_1) - 2(\alpha_2 - (8/27)\beta_2)\epsilon}{\rho_0}}.$$

Тогда особые решения системы (1.11) с учетом (1.12) примут вид

$$(1.13) \quad \epsilon = -\frac{\rho_0(\xi^2 - \xi_0^2)}{2(\alpha_2 - \frac{8}{27}\beta_2)}, \quad u_t = \frac{\rho_0(\xi^3 - \xi_0^3)}{3(\alpha_2 - \frac{8}{27}\beta_2)},$$

где $\rho_0 \xi_0^2 = (\alpha_1 + (4/9)\beta_1)$. Условие $\sigma_{rr} = -\sigma_0 = \text{const}$ при $\xi = \xi_K$ позволяет определить границу распространения центрированных волн в грунте, ее уравнение запишется в виде

$$\xi_K^2 = \xi_0^2 \sqrt{1 + \frac{\sigma_0(\alpha_2 - \frac{8}{27}\beta_2)}{(\rho_0 \xi_0^2/2)^2}}.$$

Задача в области разгрузки II (фиг. 1, б) сводится к нахождению функции f_1 и f_2 формулы (1.8) и формы волны разгрузки $t = f^*(r)$ при выполнении (1.6) и условия

$$(1.14) \quad \partial u/\partial r = \epsilon^*(r), \quad \partial u/\partial t = \partial u^*/\partial t \quad \text{при } t = f^*(r),$$

где $\epsilon^*(r)$, $\partial u^*/\partial t$ — известные функции, определяемые формулами (1.13).

Отметим, что (1.6) можно заменить условием для деформации, а именно при $r = r_0$, $t \geq 0$:

$$(1.15) \quad \partial u/\partial r = \epsilon_0(t).$$

Тогда, подставляя (1.8) в (1.14) и (1.15) после некоторых преобразований, получим систему уравнений относительно f_2 и $f^*(r)$ в виде

$$(1.16) \quad f_2'[r + a_0 f^*(r)] - f_2'[(2r_0 - r) + a_0 f^*(r)] + \\ + \frac{\sigma_{rr}^*(r_0) - \sigma_{rr}^*(r)}{\rho_0 a_0^2} - \epsilon^*(r_0) + \epsilon_0 \left[\frac{(r_0 - r) + a_0 f^*(r)}{a_0} \right] = 0, \\ a_0 \left\{ f_2'[r + a_0 f^*(r)] + f_2'[(2r_0 - r) + a_0 f^*(r)] - \frac{\sigma_{rr}^*(r_0)}{\rho_0 a_0^2} + \epsilon^*(r_0) - \right. \\ \left. - \epsilon_0 \left[\frac{(r_0 - r) + a_0 f^*(r)}{a_0} \right] \right\} = \frac{\partial u^*}{\partial t}.$$

Из (1.16), исключая f'_2 , имеем

$$(1.17) \quad \frac{\sigma_{rr}^*(r_0)}{\rho_0 a_0^2} - \varepsilon^*(r_0) + \varepsilon_0 \left(\frac{z - r_0}{a_0} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\sigma_{rr}^*(F_i(z))}{\rho_0 a_0^2} + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^i}{a_0} \frac{\partial u^*}{\partial t}(F_i(z)) \right] = 0,$$

где $F_i(z)$ ($i = 1, 2$) — соответственно корни уравнений $(2r_0 - r) + a_0 f^*(r) = z$ и $r + a_0 f^*(r) = z$ относительно r . Учитывая, что скорость волны разгрузки и ее форма зависят от деформации нагружения $\varepsilon^*(r)$, т. е. $r/f^*(r) = a_p(\varepsilon^*)$, на основании (1.17) заметим, что если из эксперимента известно распределение остаточных деформаций $\bar{\varepsilon}(r)$, то с учетом $\bar{\varepsilon}(r) = \varepsilon^*(r) - \sigma^*(\varepsilon^*)/E_1$ вычисляется $\varepsilon^*(r)$, а затем находится форма волны разгрузки, следовательно, при помощи (1.17) можно определить распределение деформации и впоследствии напряжения на плоскости нагружения.

Допустим, что задана форма волны разгрузки $t = f^*(r)$ и в ходе решения задачи в области II плоскости (r, t) требуется определить $\sigma_0(t)$. Тогда (1.14) служат граничными условиями для нахождения приведенных в (1.8) неизвестных функций f_1 и f_2 . Обозначая через $F_i(\xi_i)$ корни уравнений $r + a_0 f^*(r) = \xi_i$ ($i = 1, 2$) относительно r , из (1.14) находим

$$f'_i(\xi_i) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma_{rr}^*[F_i(\xi_i)]}{\rho_0 a_0^2} + \frac{1}{a_0} \frac{\partial u^*}{\partial t}[F_i(\xi_i)] \right\}.$$

Тогда для определения $\varepsilon_0(t)$ имеем

$$\varepsilon_0(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\sigma_{rr}^*[F_i(r_0 + (-1)^i a_0 t)]}{\rho_0 a_0^2} + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^i}{a_0} \frac{\partial u^*}{\partial t}[F_i(r_0 + (-1)^i a_0 t)] \right\} - \frac{\sigma_{rr}^*(r_0)}{\rho_0 a_0^2} + \varepsilon^*(r_0).$$

По деформации $\varepsilon_0(t)$ с учетом (1.3) можно найти напряжение $\sigma_{rr}(r_0, t)$, а затем профиль нагрузки $\sigma_0(t) = -\sigma_{rr}(r_0, t)$.

2. В случае сферической волны при $(\alpha_2 - (8/27)\beta_2) > 0$ решение уравнения движения среды

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \ddot{a}_0^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) + \frac{Q(r)}{\rho_0 a_0^2} \right], \quad \text{где}$$

$$(2.1) \quad Q(r) = \frac{\partial}{\partial r} [\sigma_{rr}^*(r) - \rho_0 a_0^2 \varepsilon^*(r)] + \frac{2}{r} [\sigma_{rr}^*(r) - \sigma_{\varphi\varphi}^*(r) - 2G_0 \varepsilon^*(r)],$$

при выполнении (1.7), когда $R^*(t)$ задана произвольно убывающей функцией времени, имеет вид

$$(2.2) \quad u(r, t) = \frac{1}{r} \left\{ \int_{r_0}^{r-a_0 t} d\xi_2 \int_{r_0}^{\xi_2} \Phi(\xi_1) d\xi_1 - \int_{r_0}^{r+a_0 t} d\xi_2 \int_{r_0}^{\xi_2} \Phi(\xi_1) d\xi_1 + \right. \\ \left. + \int_{r_0}^{r+a_0 t} \frac{R^*(F_2(\xi_2))}{(\lambda_0 + 2G_0)} d\xi_2 \int_{r_0}^{\xi_2} Q(\xi_1) d\xi_1 - \right. \\ \left. - \int_{r_0}^{r+a_0 t} \frac{R^*(F_2(\xi_2)) \left[\rho_0 \dot{R}^{*2}(F_2(\xi_2)) - \left(\alpha_1 + \frac{4}{9} \beta_1 \right) \right]}{\left(\alpha_2 - \frac{8}{27} \beta_2 \right)} d\xi_2 \right\} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{r^2} \left\{ \int_{r_0}^{r-a_0 t} d\xi_3 \int_{r_0}^{\xi_3} d\xi_2 \int_{r_0}^{\xi_2} \Phi(\xi_1) d\xi_1 - \right. \\
& \left. - \frac{a_0 r_0^2 \left(1 + \frac{\dot{R}^*(0)}{a_0} \right) \left[\rho_0 \dot{R}^{*2}(0) - \left(\alpha_1 + \frac{4}{9} \beta_1 \right) \right]}{\left(\alpha_2 - \frac{8}{27} \beta_2 \right)} t - \right. \\
& - \int_{r_0}^{r+a_0 t} d\xi_3 \int_{r_0}^{\xi_3} d\xi_2 \int_{r_0}^{R^*(F_2(\xi_2)) - a_0 F_2(\xi_2)} \Phi(\xi_1) d\xi_1 - \\
& - \int_{r_0}^{r+a_0 t} d\xi_3 \int_{r_0}^{\xi_3} \frac{R^*(F_2(\xi_2)) \left[\rho_0 \dot{R}^{*2}(F_2(\xi_2)) - \left(\alpha_1 + \frac{4}{9} \beta_1 \right) \right]}{\left(\alpha_2 - \frac{8}{27} \beta_2 \right)} d\xi_2 + \\
& + \left. \int_{r_0}^{r+a_0 t} d\xi_3 \int_{r_0}^{\xi_3} \frac{R^*(F_2(\xi_2))}{(\lambda_0 + 2G_0)} d\xi_2 \int_{r_0}^{R^*(F_2(\xi_2))} Q(\xi_1) d\xi_1 \right\} - \\
& - \frac{r}{3(\lambda_0 + 2G_0)} \int_{r_0}^r Q(r) d\xi + \frac{1}{3(\lambda_0 + 2G_0) r^2} \int_{r_0}^r \xi^3 Q(\xi) d\xi,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi(z_1) = & \frac{1}{2[a_0 - \dot{R}^*(F_1(z_1))](\alpha_2 - \frac{8}{27} \beta_2)} \left\{ \left[\dot{R}^*(F_1(z_1)) \left(1 + \right. \right. \right. \\
& + 2 \frac{\dot{R}^*(F_1(z_1))}{a_0} \left. \left. \left. \right) - a_0 + R^*(F_1(z_1)) \frac{\ddot{R}(F_1(z_1))}{a_0} \right] \left[\rho_0 \dot{R}^{*2}(F_1(z_1)) - \right. \right. \\
& - \left. \left. \left(\alpha_1 + \frac{4}{9} \beta_1 \right) \right] + 2\rho_0 R^*(F_1(z_1)) \dot{R}^*(F_1(z_1)) \ddot{R}^*(F_1(z_1)) \times \right. \\
& \times \left. \left(1 + \frac{\dot{R}^*(F_1(z_1))}{a_0} \right) \right\} + \frac{1}{2(\lambda_0 + 2G_0)} \int_{r_0}^{R^*(F_1(z_1))} Q(\xi) d\xi - \\
& - \frac{R^*(F_1(z_1)) \dot{R}^*(F_1(z_1)) Q(R^*(F_1(z_1)))}{2[a_0 - \dot{R}^*(F_1(z_1))](\lambda_0 + 2G_0)},
\end{aligned}$$

функции $F_i(z_i)$ ($i = 1, 2$) являются корнями уравнений $R^*(t) + a_0 t = z_i$ относительно t .

Дифференцируя (2.2) по t и r , определим массовую скорость $\dot{u}(r, t)$ и деформацию $\varepsilon(r, t)$, а затем на основе (1.3) — компоненты напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$. Однако при нахождении $Q(r)$, как в случае плоской волны, необходимо выразить деформацию ε^* на фронте ударной волны в зависимости от r . Для этого надо решить уравнение $r = R^*(t)$ относительно t и полученное подставить в (1.7). Тогда получим $\varepsilon^*(r)$ и с учетом (1.2), (2.1) найдем $\sigma_{rr}^*(r)$, $\sigma_{\varphi\varphi}^*(r)$ и $Q(r)$.

В случае $(\alpha_2 - (8/27)\beta_2) < 0$ поведение сферической задачи в области нагружения I (фиг. 1, б) отличается от плоской тем, что задача является неавтономной, центрированные волны в грунте получаются криволинейными и параметры среды вдоль их поверхности — переменными. Следовательно, для получения простых решений задачи аналитические способы становятся непригодными. В связи с этим для построения решения сфе-

рической задачи в зоне нагрузки, как в [2, 14], используется метод характеристик. В дальнейшем изучение напряженно-деформированного пластического состояния среды за фронтом волны разгрузки (фиг. 1, б) в области II осуществляется таким же образом, как это было сделано в п. 1. В силу громоздкости формул аналитические решения не приводятся.

3. Экспериментальные исследования [18—22] механических свойств грунтов в условиях трехосного сжатия при повышенном уровне напряжений указывают на правомерность в большинстве случаев уравнения по формоизменению $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon, \epsilon_i)$, тогда как зависимость между σ и ϵ является автономной. При разгрузке перекрестные влияния инвариантов σ , σ_i , ϵ , ϵ_i малы и поэтому $\sigma = \sigma(\epsilon, \epsilon^*, \sigma^*)$, $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i, \epsilon_i^*, \sigma_i^*)$, где параметры со звездочками соответствуют началу разгрузки. Изучение природы волн в грунтах при соответствующих аппроксимациях $\sigma_i = (\epsilon, \epsilon_i)$, в частности при $\sigma_i = 3\sigma(\gamma_1 \epsilon_i - \gamma_2 \epsilon_i^2)$, показывает, что в зоне активного нагружения грунта возникает ударная волна.

В этом случае при решении задач в обратной постановке для определения деформации $\epsilon^*(t)$ на фронте ударной волны получаем трансцендентное уравнение, в частности полином третьей степени, который решается численно при помощи стандартной процедуры. Получение решения задач в области разгрузки такое же, как в пп. 1, 2, поэтому они здесь не приводятся.

4. Проведены расчеты для случаев, когда формы поверхности ударной волны и волны разгрузки заданы в виде полиномов второй степени

$$(4.1) \quad R^*(t) = r_0 + R_1 t - (R_2/2)t^2, \quad \dot{R}^*(t) > 0;$$

$$(4.2) \quad f^*(r) = B_0(r - r_0) - (B_1/2)(r - r_0)^2, \quad \dot{f}^*(r) > 0$$

и исходные параметры среды имеют вид

$$(4.3) \quad \rho_0 = 0,02 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4, \quad \sigma_0(0) = 105 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^2, \quad r_0 = 0,1 \text{ м},$$

$$R_1 = 420 \text{ м/с}, \quad R_2 = 2 \cdot 10^2 R_1, \quad B_0 = 0,2927 \cdot 10^{-2} \text{ с/м}, \quad B_1 = 2 \cdot 10^{-1} B_0;$$

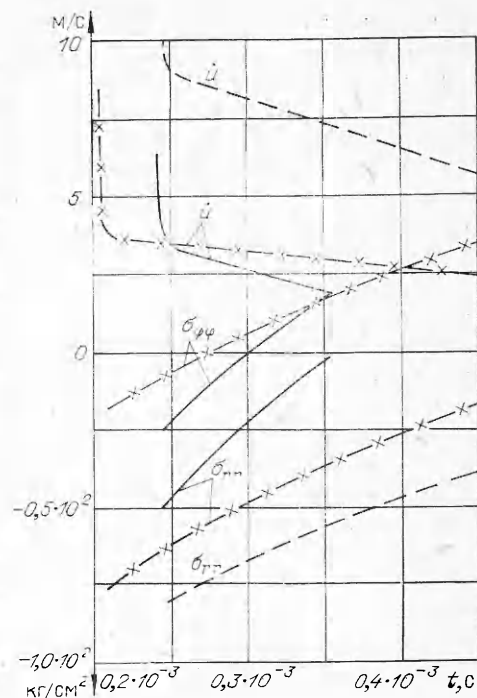
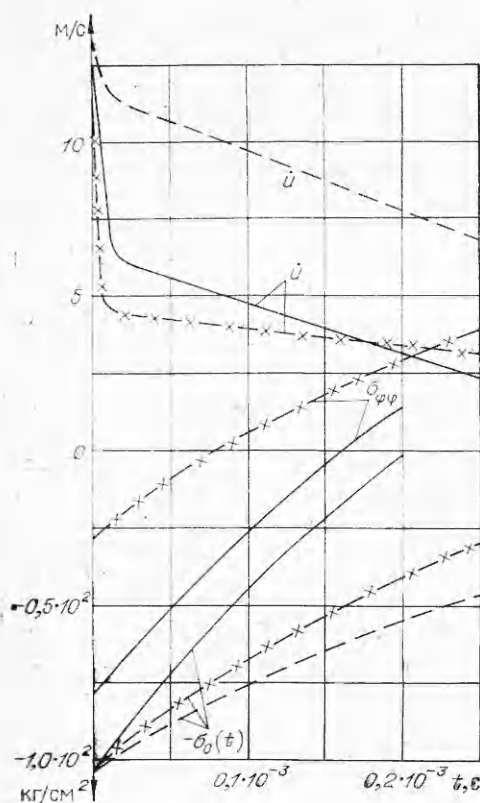
$$(4.4) \quad \alpha_1 = 12,127 \cdot 10^6 \text{ кг/м}^2, \quad \alpha_2 = 58,73 \cdot 10^7 \text{ кг/м}^2,$$

$$\beta_1 = 35,83 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^2, \quad \beta_2 = 11,64 \cdot 10^8 \text{ кг/м}^2, \quad E_1 = 14 \cdot 10^7 \text{ кг/м}^2,$$

$$E_2 = 2 \cdot 10^7 \text{ кг/м}^2.$$

Результаты расчетов на ЭВМ представлены на фиг. 2—5 в виде графиков напряжений, массовой скорости и нагрузки в зависимости от времени в сечениях $r = 0,1; 0,2$ и на фронте ударной волны $r = R^*(t)$. На фиг. 2—4 сплошные линии относятся к случаю распространения в упругопластическом грунте плоской ударной волны для (4.3), (4.4), штриховые линии с крестиками — к случаю $\beta_2 = -11,64 \cdot 10^8 \text{ кг/м}^2$, что соответствует «ударной» диаграмме $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$, штриховые линии — обобщенному пластическому газу [4].

В случае возникновения в грунте плоской волны разгрузки, т. е. при $\alpha_2 = 28,75 \cdot 10^7 \text{ кг/м}^2$, изменение профиля нагрузки $\sigma_0(t)$ изображено на фиг. 5. Из фиг. 2 видно, что в обратной постановке задачи профиль искомой нагрузки $\sigma_0(t)$ на каверне $r = 0,1$ в случае обобщенного пластического газа, по сравнению с теорией упругопластических деформаций, в зависимости от t изменяется медленно. Это связано с тем, что при рассмотрении задачи в рамках модели обобщенного пластического газа среда со всех сторон обжата одним и тем же давлением, тогда как в случае использования динамической теории пластичности $\sigma_{rr} > \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\theta\theta}$, следовательно, процесс затухания $\sigma_0(t)$ в последнем случае происходит сравнительно быстро. Кривая $\sigma_0(t)$ при $d\sigma_i/d\epsilon_i > 0$, $d^2\sigma_i/d\epsilon_i^2 > 0$ проходит между кривыми $\sigma_0(t)$, рассчитанными для $d^2\sigma_i/d\epsilon_i^2 < 0$ и в рамках идеальной среды, и расположена близко к кривой $\sigma_0(t)$ обобщенного пластическо-

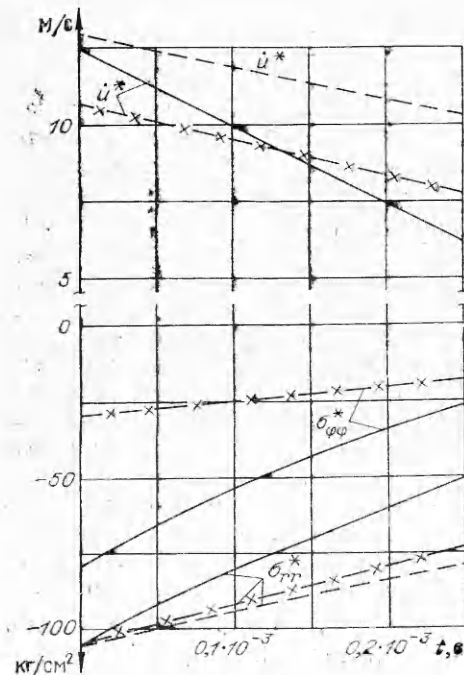


Ф и г. 3

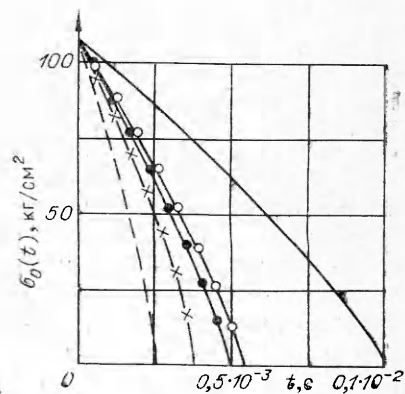
Ф и г. 2

го газа. Кривые напряжения $\sigma_{\phi\phi}$, являясь монотонно убывающими функциями времени, при $t \geq 0,086 \cdot 10^{-3}$ с ($d^2\sigma_i/d\varepsilon_i^2 < 0$) и $t \geq 0,164 \cdot 10^{-3}$ ($d^2\sigma_i/d\varepsilon_i^2 > 0$) становятся растягивающими.

Поведение массовой скорости u во всех вышерассмотренных случаях в зависимости от t получается почти взаимоподобным и имеет затухающий характер. При этом степень уменьшения u в окрестности фронта ударной волны в области разгрузки среды при упругопластических деформациях является более интенсивной, нежели в пластическом газе. Однако по величине u имеет максимальное значение для случая пластического газа.



Ф и г. 4



Ф и г. 5

Качественная картина изменения параметров σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, u при $r = 0,2$ (фиг. 3) аналогична случаю $r = 0,1$ с учетом количественных их значений и времени прихода волны в данную точку.

В отличие от области разгрузки среды на фронте ударной волны $r = R^*(t)$ напряжения σ_{rr}^* , $\sigma_{\varphi\varphi}^*$ и массовая скорость u^* в зависимости от t изменяются приблизительно линейным образом. Это следствие того, что в расчетах скорость волны $R^*(t)$ задана в виде линейно убывающей функции времени.

Исследование показало, что для получения одной и той же нагрузки на каверне в упругопластической и идеальной средах необходимо, чтобы характер изменения (убывания) $R^*(t)$ в упругопластической среде был слабым и длительным, следовательно, поле напряжения имело более длительную силу разрушения и растянутую волновую картину по сравнению с идеальной средой. В случае использования «ударных диаграмм» среды, несмотря на то что профили $\sigma_0(t)$ для упругопластической и идеальной среды существенных отличий не имеют, их скорости как в области разгрузки, так и вдоль фронта ударной волны существенно отличаются.

На фиг. 5 представлен найденный из решения задачи профиль нагрузки $\sigma_0(t)$ при возникновении в грунте плоской волны разгрузки, задаваемой формулой (4.2). При этом сплошная, штриховая и штрихпунктирная линии соответствуют случаям, когда коэффициенты (4.2) имеют связи $B_2 = 2 \cdot 10^{-1} B_0$, $B_1 = 8 \cdot 10^{-1} B_0$ и $B_1 = 4 \cdot 10^{-1} B_0$. Кроме того, штриховые линии с крестиками и кружочками построены для случаев, когда $E_1 = 7 \cdot 10^7$ кг/м² и $E_2 = 16 \cdot 10^7$ кг/м² ($B_1 = 4 \cdot 10^{-1} B_0$). Из приведенных кривых видно, что кривизна профиля нагрузки прямо пропорциональна кривизне волны разгрузки (4.2), т. е. кривая для $\sigma_0(t)$ получается более крутой при усиленной связи между B_1 и B_0 . При уменьшении модуля Юнга E_1 соответственно уменьшаются нагрузка и время ее действия на каверне, тогда как в случае распространения ударной волны [4] получалось наоборот. Такая же картина обнаруживается при варьировании модуля Юнга E_2 . Однако эффект влияния E_2 на $\sigma_0(t)$ слабее, чем E_1 .

Отметим, что аналогичные исследования по изучению структуры и классификации одномерных (плоской и сферической) волн в грунтах можно провести для произвольной аппроксимации определяющих функций $\sigma(\epsilon)$, $\sigma_i(\epsilon_i)$ и $\sigma_i(\epsilon, \epsilon_i)$ деформационной теории пластичности.

Авторы выражают благодарность Х. А. Рахматулину за обсуждения результатов работы.

Поступила 3 VI 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Алексеев Н. А. Вопросы динамики грунтов. М.: изд. Моск. ун-та, 1964.
2. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961.
3. Механический эффект подземного взрыва/Под ред. М. А. Садовского. М., 1971.
4. Атабаев К., Мамадалиев Н. Распространение одномерной пластической волны в среде с линейной и ломаной разгрузкой.— ПМТФ, 1981, № 3.
5. Лунц Я. Л. Распространение сферических упругопластических волн.— ПММ, 1949, т. 13, № 1.
6. Зволлинский Н. В. Об излучении упругой волны при сферическом взрыве в грунте.— ПММ, 1960, т. 24, № 1.
7. Григорян С. С., Пачевский Я. А. О действии сильного подземного взрыва в плотной горной породе.— ДАН СССР, 1973, т. 212, № 2.
8. Якупов Р. Г. Сферическая взрывная волна в грунтах.— ФГВ, 1976, т. 12, № 5.
9. Цветков В. М., Сизов Н. А., Сырников Н. М. О механизме дробления твердой среды взрывом.— ДАН СССР, 1976, т. 231, № 5.
10. Сырников Н. М. Определяющие соотношения для сыпучей среды и расчеты взрывного движения. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. М.: Физ.-тех. ин-т, 1973.
11. Коротков П. Ф., Просвирнина Б. М. Численное исследование взрыва в упругопластической среде и некоторые вопросы моделирования.— ДАН СССР, 1976, т. 228, № 1.

12. Сагомонян А. Я., Гарбер П. М. Взрыв сферического слоя заряда в пластически сжимаемой среде. — Вестн. МГУ. Сер. математика и механика, 1974, № 3.
13. Srinivasan M. G. Reflection and transmission of elastic-plastic spherical waves at a spherical interface. — Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1975, vol. 42, N 4.
14. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978.
15. Ильюшин А. А. Пластичность. Ч. I. М. — Л.: ГИТТЛ, 1948.
16. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 1.
17. Николаевский В. Н. Механические свойства грунтов и теория пластичности. — ВИНТИ. Итоги науки и техники, 1972, т. 6.
18. Широков В. Н. К задаче о круглом жестком штампе на нелинейно-деформируемом полупространстве. — Основания, фундаменты и механика грунтов, 1971, № 5.
19. Христофоров В. С., Задворнев Г. А. Напряженно-деформированное состояние грунта с нелинейными характеристиками при осесимметричной плоской деформации. — Основания, фундаменты и механика грунтов, 1978, № 6.
20. Христофоров В. С., Караганов В. Н. Исследование несвязанных грунтов в стабилометре с оптической системой измерений деформаций. — Основания, фундаменты и механика грунтов, 1979, № 3.
21. Korhonen Kalle-Heikki. On soil deformations. — J. Struct. Mech., Rakenteiden mekaniikka, Suomi, 1972, vol. 5, N 3.
22. Ломизе Г. М., Крыжановский А. Л., Петрянин В. Ф. Исследование закономерностей развития напряженно-деформированного состояния песчаного основания при плоской деформации. — Основания, фундаменты и механика грунтов, 1972, № 1.

УДК 539.376 + 539.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНЕШНИХ ТЕМПЕРАТУРНО-СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ ДЛЯ РАВНОПРОЧНЫХ В ПРОЦЕССЕ ПОЛЗУЧЕСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

А. Ф. Никитенко

(Новосибирск)

С расчетом и проектированием равнопрочных элементов конструкций, работающих в условиях ползучести, можно ознакомиться, например, в [1—4], где при заданных внешних нагрузках и температуре определяется геометрия тела (элемента конструкции), такая, чтобы оно было равнопрочным. Во всех отмеченных выше расчетах не учитывается процесс повреждаемости материала и используются при этом уравнения только установившейся ползучести. Тело считается равномерно прогретым. В некоторых случаях можно реализовать в процессе ползучести равнопрочность тела с заранее заданной геометрией путем надлежащего подбора поля внешних нагрузок и температуры. Этому вопросу посвящена данная работа. При этом тело считается неравномерно прогретым. Используется система уравнений, описывающая все три стадии ползучести материала с одновременным учетом процесса накопления в нем повреждений. Методика определения внешних нагрузок и температуры дана для случая осесимметричной плоской деформации. Температурное поле при этом считается плоским и осесимметричным.

Неравномерно прогретое и нагруженное внешними усилиями тело (элемент конструкции) будем называть оптимальным по долговечности (или равнопрочным в процессе ползучести), если во всех точках его процесс повреждаемости идет идентичным образом и, следовательно, одновременно за некоторое наперед заданное время t_{**} параметр повреждаемости ω достигает своего критического значения, равного единице. В [5] показано, что для реализации равнопрочности тела необходимо и достаточно выполнения в каждой его точке на любой момент времени $0 < t \leq t_{**}$ равенства $B_2 S_2^{(g+1)/2} = C(t)$, которое целесообразно именовать условием оптимальности. В частности, при стационарных внешних нагрузках и температуре C не зависит от времени, т. е. является константой, которая равна $C = [(\alpha + 1)(m + 1)t_{**}]^{-1}$ [5]; g, α, m — характеристики материала; S_2 — второй инвариант девиатора тензора напряжений; $S_2 = (1/2)s_{ij}s_{ij}$; s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений. Считаем, что экспериментально установленная зависимость коэффициента B_2 от температуры имеет вид [2] $B_2 = B_0 \exp(c\Theta)$, где B_0, c — константы