11. **Полежаев В. И., Федосеев А. И.** Метод конечных элементов в задачах гидромеханики, тепло- и массообмена.— М., 1980.— (Препр./АН СССР, Ин-т проблем механики; № 160).

12. **Thasker W. C.** A brief review of techniques for generating. Irregular computational grids // Intern. J. Numer. Meth. Engng.— 1980.— N 16.

13. **Уманский С. Э.** Алгоритм и программа триангуляции двумерной области произвольной формы // Пробл. прочности.— 1978.— № 6.

14. **Rivara M. C.** Algorithm for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques // Intern. J. Numer. Meth. Engng.— 1984.— V. 20, N 4.

15. **Frey W. H.** Selective refinement: a new strategy for automatic node placement in graded triangular meshes // Intern. J. Numer. Meth. Engng.— 1987.— V. 24, N 3.

16. **Dikowicz J. K.** Conservative rezoning (remapping) for general quadrilateral meshes // J. Comp. Phys.— 1984.— V. 54, N 3.

17. **Фонарев А. В.** Применение произвольных треугольных разностных сеток к решению задач импульсного деформирования упругопластических тел // Модели деформирования и разрушения композитных материалов.— Свердловск: УрО АН СССР, 1988.

18. **Уилкинс М. Л., Гуинан М. У.** Удар цилиндра по жесткой преграде // Механика (сб. пер.).— М.: Мир, 1973.— Вып. 3.

19. **Аптуков В. Н., Каширин В. Ф., Мурзакаев Р. Т. и др.** Применение метода муара в исследовании процесса откольного разрушения // ДАН СССР.— 1986.— Т. 290, № 2.

20. **Бессерер К. У.** Инженерный справочник по управляемым снарядам.— М.: Воениздат, 1962.

21. **Аптуков В. Н., Николаев П. К.** Распространение волн в термоупруго-вязкопластическом материале // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1984.— Вып. 51.

22. **Аптуков В. И., Лесниченко Ю. Ю.** Экспериментальное изучение сопротивления пластин из алюминиевых сплавов статическому внедрению жесткого индентора // Динамика и прочность механических систем: Межвуз. сб. науч. тр./Перм. политехн. ин-т.— 1984.

г. Пермь *Поступила 16/V 1989 г.*

УДК 539.376

М. А. Задоян, Н. Б. Сафарян

ОСЕВОЕ СЖАТИЕ НЕОДНОРОДНОГО КОНУСА

Рассматривается сжатие бесконечного конуса, к вершине которого приложена осевая сосредоточенная сила. Материал принимается несжимаемым неоднородным и подчиняется степенному закону упрочнения. Соответствующая однородная задача изучена в [1, 2].

Дифференциальные уравнения равновесия в случае осесимметричной деформации в сферических координатах в обычных обозначениях имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}(2\sigma_r-\sigma_\theta-\sigma_\varphi+\tau_{r\theta}\operatorname{ctg}\theta)=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r}[(\sigma_\theta-\sigma_\varphi)\operatorname{ctg}\theta+3\tau_{r\theta}]=0,$$

$$\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}(3\tau_{r\varphi}+2\tau_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta)=0.$$

Закон упрочнения материала

$$\sigma_0=k\omega(\theta)\,\varepsilon_0^m,\quad 0<m<1, \tag{2}$$

где k — постоянная величина; $\omega(\theta)$— заданная функция, определяемая из эксперимента;

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + 6\left(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta\varphi}^2 + \tau_{r\varphi}^2\right)},$$

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r)^2 + 6\left(\gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{\theta\varphi}^2 + \gamma_{r\varphi}^2\right)}$$

— соответственно интенсивности касательных напряжений и деформации сдвига.

Соотношения между компонентами деформаций, перемещений и напряжений в случае осесимметричной деформации задаются формулами

$$(3)\quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r},\ \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\ \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{v}{r}\operatorname{ctg}\theta,\ 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

$$2\gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{w}{r}\operatorname{ctg}\theta,\ 2\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r},$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} k^{-1/m} \omega^{-1/m}(\theta)\, \sigma_0^{1/m-1} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma)$$

(δ_{ij} — символ Кронекера, $\sigma = (1/3)(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_\varphi)$— среднее напряжение). Компоненты перемещения, удовлетворяющие условию несжимаемости, можно представить в виде

$$(4)\quad u(r, \theta) = Ar^{1-\lambda}[\psi'(\theta) + \psi(\theta)\operatorname{ctg}\theta],$$

$$v(r, \theta) = A(\lambda - 3)r^{1-\lambda}\psi(\theta),\ w(r, \theta) = 0,$$

где A, λ — неизвестные постоянные параметры; $\psi(\theta)$— произвольная неизвестная функция, подлежащая определению.

Исходя из соотношений (3), (4), для компонентов напряжений имеем

$$(5)\quad \sigma_r = \sigma_\theta - 2A^m kr^{-\lambda m}[(2\lambda - 3)\psi'(\theta) + \lambda\psi(\theta)\operatorname{ctg}\theta]\omega(\theta)\chi(\theta),$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta - 2A^m k(\lambda - 3)r^{-\lambda m}[\psi'(\theta) - \psi(\theta)\operatorname{ctg}\theta]\omega(\theta)\chi(\theta),$$

$$\tau_{r\theta} = A^m kr^{-\lambda m}[\psi''(\theta) + (\psi\operatorname{ctg}\theta)' + \lambda(3 - \lambda)\psi(\theta)]\omega(\theta)\chi(\theta),$$

$$\tau_{r\varphi} = 0,\ \tau_{\theta\varphi} = 0,$$

где

$$(6)\quad \chi(\theta) = \{[\psi''(\theta) + (\psi\operatorname{ctg}\theta)' + \lambda(3 - \lambda)\psi(\theta)]^2 +$$

$$+ 4(\lambda^2 - 3\lambda + 3)(\psi'^2(\theta) + \psi^2(\theta)\operatorname{ctg}^2\theta) + 4(\lambda^2 - 3)\psi(\theta)\psi'(\theta)\operatorname{ctg}\theta\}^{(m-1)/2}.$$

Подставляя выражения напряжений (5) в первое из уравнений равновесия (1), после интегрирования найдем

$$(7)\quad \sigma_\theta = \frac{A^m kr^{-\lambda m}}{\lambda m}\{2(\lambda m - 2)[(2\lambda - 3)\psi'(\theta) + \lambda\psi(\theta)\operatorname{ctg}\theta]\,\omega(\theta)\,\chi(\theta) +$$

$$+ [(\psi''(\theta) + (\psi\operatorname{ctg}\theta)' + \lambda(3 - \lambda)\psi(\theta))\,\omega(\theta)\,\chi(\theta)]' +$$

$$+ [\psi''(\theta) + (\psi\operatorname{ctg}\theta)' + \lambda(3 - \lambda)\psi(\theta)]\,\omega(\theta)\,\chi(\theta)\operatorname{ctg}\theta +$$

$$+ 2(\lambda - 3)[\psi'(\theta) - \psi(\theta)\operatorname{ctg}\theta]\,\omega(\theta)\,\chi(\theta) + c$$

(c — постоянная интегрирования).

Граничные условия рассматриваемой задачи таковы:

$$(8)\quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \text{ при } \theta = \alpha;\ \tau_{r\theta} = 0,\ v = 0 \text{ при } \theta = 0.$$

К ним прибавляется условие статического равновесия мысленно выделенного конусообразного тела, ограниченного произвольной сферической поверхностью радиуса r с центром в вершине:

$$9)\quad p + 2\pi \int_0^\alpha (\sigma_r \cos\theta - \tau_{r\theta}\sin\theta)\, r^2 \sin\theta\, d\theta = 0.$$

Из (9) следует, что $\lambda m = 2$, $c = 0$. Удовлетворяя второму уравнению равновесия (1), для определения неизвестной функции $\psi(\theta)$ приходим к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$(10)\qquad [(\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)\psi)\omega\chi]'' + [(\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)\psi)\omega\chi \operatorname{ctg} \theta]' + 2[\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3-\lambda)\psi]\omega\chi + 2(\lambda-3)[(\psi' - \psi \operatorname{ctg} \theta)\omega\chi]' + 4(\lambda-3)(\psi' - \psi \operatorname{ctg} \theta)\omega\chi \operatorname{ctg} \theta = 0.$$

Уравнение (10) решается численным методом. Поэтому удобно свести его к системе из четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$(11)\qquad \psi' = s - \psi \operatorname{ctg} \theta,\ s' = \tau - \lambda(3-\lambda)\psi,$$

$$\tau' = \frac{F-T}{\omega\chi + (m-1)\,\tau^2\chi^{(m-3)/(m-1)}},\ F' = -2\tau\omega\chi - 4(\lambda-3)(s - 2\psi \operatorname{ctg} \theta)\,\omega\chi \operatorname{ctg} \theta,$$

где $\chi = \{\tau^2 + 4(\lambda^2 - 3\lambda + 3)s^2 - 4(\lambda-3)^2(s - \psi \operatorname{ctg} \theta)\psi \operatorname{ctg} \theta\}^{(m-1)/2}$;

$$T = \omega'\tau\chi + \omega\tau\chi \operatorname{ctg} \theta + 2(\lambda-3)(s - 2\psi \operatorname{ctg} \theta)\omega\chi + ((m-1)/2)\chi^{(m-3)/(m-1)}\{8(\lambda^2 - 3\lambda + 3)s[\tau - \lambda(3-\lambda)\psi] - 4(\lambda-3)^2[(\tau - \lambda(3-\lambda)\psi - (s - \psi \operatorname{ctg} \theta) \operatorname{ctg} \theta + \psi/\sin^2\theta)\psi \operatorname{ctg} \theta + (s - \psi \operatorname{ctg} \theta)((s - \psi \operatorname{ctg} \theta) \operatorname{ctg} \theta - \psi/\sin^2\theta)]\}.$$

Граничные условия задачи (8) для системы (11) принимают вид

$$(12)\qquad \psi = 0,\ \tau = 0 \text{ при } \theta = 0;\ F = 0,\ \tau = 0 \text{ при } \theta = \alpha.$$

Окончательные формулы для напряжений и перемещений (4)—(7) можно записать как

$$\sigma_r = (A^m k/2r^2)\{F(\theta) - 4[(2\lambda-3)s(\theta) + (3-\lambda)\psi(\theta) \operatorname{ctg} \theta]\omega(\theta)\chi(\theta)\},$$

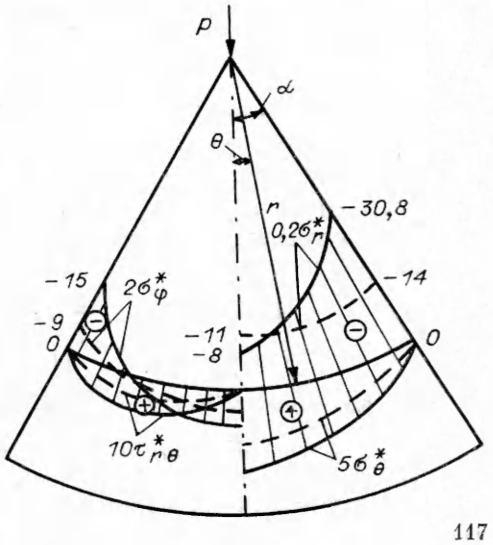
$$\sigma_\varphi = (A^m k/2r^2)[F(\theta) - 4(\lambda-3)(s(\theta) - 2\psi(\theta) \operatorname{ctg} \theta)\omega(\theta)\chi(\theta)],$$

$$\sigma_\theta = (A^m k/2r^2)F(\theta),\ \tau_{r\theta} = (A^m k/r^2)\tau(\theta)\omega(\theta)\chi(\theta),$$

$$\tau_{r\varphi} = 0,\ \tau_{\theta\varphi} = 0,\ u = Ar^{1-\lambda}s(\theta),\ v = A(\lambda-3)r^{1-\lambda}\psi(\theta),\ w = 0.$$

Здесь неизвестная постоянная A определится из условия статического равновесия (9).

На основании численного решения краевой задачи (11), (12) на ЭВМ ЕС-1022 методом пристрелки [3] построены графики относительных напряжений $\sigma_{ij}^* = \frac{2r^2}{A^m k}\sigma_{ij}$ при $\alpha = \pi/6$ и неоднородности $\omega(\theta) = \exp(\mu\theta)$ (см. рисунок, сплошные линии соответствуют случаю неоднородного материала, штриховые — однородного). Для численного примера принимается $\mu = 2{,}098$.



Пластически неоднородность механических свойств материалов в различных точках может быть вызвана следующими причинами: влиянием потоков элементарных частиц, воздействием температурных градиентов, неоднородным упрочнением материала, поверхностной обработкой и т. п.

Сравнение полученных данных с результатами для однородного материала показывает, что неоднородность существенно влияет на напряженно-деформированное состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кузнецов А. И.** Вдавливание жестких штампов в полупространство при степенном упрочнении и при нелинейной ползучести материала // ПММ.— 1962.— Т. 26, № 2.
2. **Задоян М. А.** Динамическое деформирование несжимаемых сред // ПММ.— 1986.— Т. 50, № 5.
3. **Современные** численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений/Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта.— М.: Мир, 1979.

г. Ереван *Поступила 9/XI 1988 г.,*
в окончательном варианте — 4/V 1989 г.

УДК 539.4

В. А. Буряченко, А. М. Липанов

ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ УПРУГОСТИ КОМПОЗИТОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Некоторые задачи структурной механики композитов не могут быть решены в рамках линейной теории (например, задачи устойчивости, распространения волн в предварительно деформированных неоднородных материалах). В настоящей работе предлагается метод расчета макроскопических модулей упругости второго и третьего порядков. Изучается микронеоднородная среда в приближении геометрически линейной теории. Решение задачи оценки моментов полей деформаций в компонентах получено с помощью нелинейного варианта метода эффективного поля [1—4]. Метод основан на решении задачи бинарного взаимодействия включений, находящихся в эффективном поле, в предположении однородности деформаций внутри каждого включения. Принималось допущение об однородности вторых моментов полей деформаций в компонентах.

1. Общие соотношения. В макрообъеме w с характеристической функцией W рассмотрим смесь упругих компонентов, механические свойства которых описываются геометрически линейной теорией (вторым вариантом малых начальных деформаций по классификации [5]), когда тензор деформаций ε_{ij} связан с компонентами вектора смещений u_i соотношением

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j}+u_{j,i})/2,$$

а уравнение состояния имеет вид

$$\sigma = L\varepsilon + \mathscr{L}\, \varepsilon \otimes \varepsilon. \tag{1.1}$$

В частности, для потенциала Мурнагана

$$\Phi = (1/2)\,\lambda A_1^2 + \mu A_2\,(a/3)\,A_1^3 + bA_1A_2 + (c/3)\,A_3 \tag{1.2}$$

($A_1 = \varepsilon_{ii}$, $A_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$, $A_3 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}$ — алгебраические инварианты тензоров деформаций) из (1.1), (1.2) и соотношения $\sigma_{ij} = (1/2)(\partial/\partial\varepsilon_{ij} + \partial/\partial\varepsilon_{ji})\Phi$ получим

$$L_{ijkl} = 3kN^1_{ijkl} + 2\mu N^2_{ijkl},\ N^1_{ijkl} = (1/3)\,\delta_{ij}\delta_{kl},$$

$$N^2_{ijkl} = I_{ijkl} - N^1_{ijkl},\ I_{ijmn} = (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})/2,$$

$$\mathscr{L}_{ijklmn} = 3a\delta_{ij}N^1_{mnkl} + b\,(\delta_{ij}I_{mnkl} + \delta_{mn}I_{ijkl} + \delta_{kl}I_{mnij}) + cJ_{ijmnkl},$$

$$J_{ijmnkl} = (I_{ipkl}I_{pjmn} + I_{ipmn}I_{pjkl})/2.$$