УДК 532.59+539.3:534.1

ПОВЕДЕНИЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ПРИ РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ НАГРУЗКИ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Рассматривается поведение полубесконечного ледяного покрова на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины под действием нагрузки, движущейся с постоянной скоростью вдоль кромки покрова на некотором расстоянии от нее. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной постоянной толщины. В движущейся системе координат прогиб пластины полагается установившимся. С помощью метода Винера — Хопфа построено аналитическое решение задачи. Исследованы волновые силы, прогиб пластины и возвышение свободной поверхности жидкости при различных скоростях движения нагрузки.

Ключевые слова: поверхностные волны, изгибно-гравитационные волны, плавающая упругая пластина, дисперсионные соотношения, движущаяся нагрузка, преобразование Фурье, метод Винера — Хопфа.

DOI: 10.15372/PMTF20180209

Введение. Задача о поведении ледяного покрова под действием движущейся нагрузки изучается, с одной стороны, с целью исследования способов разрушения ледяного покрова с помощью судов на воздушной подушке, а с другой — с целью исследования возможности использования ледяного покрова в качестве переправ, плавающих платформ различного назначения. В последнем случае необходимо знать несущую способность ледяного покрова. В зимних условиях температура ледяного покрова резко меняется по толщине. Модуль Юнга льда существенно зависит от температуры и также меняется по толщине. В работе [1] показано, что для расчета прогиба льда можно использовать теорию пластин с постоянным по толщине модулем Юнга, для определения которого выведены специальные формулы. Напряжения в пластине не являются линейными по толщине и должны рассчитываться по формулам с изменяющимся по толщине модулем Юнга.

Генерация волн на свободной поверхности жидкости конечной глубины движущимся возмущением исследовалась в начале XX в. в работе [2]. В дальнейшем было опубликовано большое число работ по этой тематике. Исследование поведения бесконечного ледяного покрова, полностью покрывающего поверхность жидкости, при динамических воздействиях начато в работах [3, 4]. В настоящее время имеется большое число работ, в которых изучается поведение бесконечного ледяного покрова при различных видах нагрузки: постоянной и периодической по времени, неподвижной и движущейся, при нестационарном воздействии, а также при движении подводного тела. Обзоры полученных результатов приведены в [5–11]. Следует отметить экспериментальную работу [12], в которой исследован прогиб ледяного покрова при различных скоростях движения судна на воздушной подушке. Теоретические результаты представлены в работах [4, 13–15]. В [4, 13] изучен прогиб пластины в дальнем поле при различных скоростях движения нагрузки. В [14] эти исследования продолжены с учетом сжимающих напряжений в пластине, равномерного течения жидкости под пластиной, стратификации жидкости (двухслойная модель). В [15] построены трехмерные графики прогиба пластины вблизи области действия нагрузки, получено приближенное решение в дальнем поле перед нагрузкой и позади нее.

Известно, что существует критическая скорость, совпадающая с минимальной фазовой скоростью изгибно-гравитационных волн в пластине. Стационарного решения задачи о равномерном движении нагрузки с критической скоростью по поверхности упругой плавающей пластины не существует. Для определения ограниченного решения при критической скорости необходимо использовать нелинейные модели или учитывать структурное демпфирование пластины. Силы волнового сопротивления в случае движения нагрузки по упругой бесконечной плавающей пластине изучались в работах [16–18].

При ограниченности ледяного покрова необходимо учитывать взаимодействие изгибно-гравитационных и поверхностных волн. Задача о поведении ограниченного ледяного покрова, находящегося под действием движущейся нагрузки, изучена недостаточно. В работе [19] с использованием метода конечных элементов исследовалось напряженно-деформированное состояние полубесконечного ледяного покрова под действием движущейся нагрузки. В [20] изучалось поведение упругой плавающей пластины большого размера, моделирующей плавающий аэропорт при взлете и посадке самолета. В работе [21] в линейном приближении и нелинейной постановке исследовались генерируемые движущейся нагрузкой изгибно-гравитационные волны в полубесконечной пластине, закрепленной на вертикальной стенке. В [22] построено решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову в канале.

В настоящей работе исследуются волны в полубесконечном ледяном покрове и в жидкости, а также волновые силы в случае равномерного движения нагрузки при различных скоростях.

1. Постановка задачи. Ледяной покров моделируется упругой полубесконечной пластиной постоянной толщины h, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H. Модуль Юнга полагается постоянным по толщине пластины [1]. Рассматривается движение пластины и жидкости под действием давления, приложенного в локальной области, движущейся с постоянной скоростью. Задача решается в линейной постановке. Введем декартову систему координат $Oxyz$ с центром O на кромке пластины, осью Ox, перпендикулярной кромке, осью Oy, направленной вдоль кромки, и осью Oz, направленной вертикально вверх. Предполагается, что давление равномерно распределено по области S прямоугольной формы шириной $2a$ и длиной $2b$. Область давления движется со скоростью V в положительном направлении оси Oy: $S = \{(x, y)\colon |x - x_0| < a,\ |y - Vt| < b\}$, давление внешней нагрузки равно $q_0 = gM/(4ab)$, где M — масса движущегося тела; g — ускорение свободного падения. Как и в работе [15], данная нагрузка моделирует судно на воздушной подушке.

Перейдем в систему координат, движущуюся вместе с областью давления: $y' = y - Vt$. Далее штрихи будем опускать. Потенциал течения жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{1.1}$$

Прогиб пластины описывается уравнениями

$$D\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)^2 w+\rho_0 h\Big(\frac{\partial}{\partial t}-V\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 w=p-q(x,y), \qquad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \tag{1.2}$$

$$\frac{p}{\rho}=-\Big(\frac{\partial}{\partial t}-V\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)\varphi-gw, \qquad q(x,y)=q_0 \qquad (|x-x_0|<a,\ |y|<b). \tag{1.3}$$

Осадка пластины в воду не учитывается. Граничные условия на верхней границе жидкости сносятся на плоскость $z=0$. На свободной поверхности давление равно нулю. На верхней границе жидкости при $z=0$ выполняется кинематическое соотношение

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-V\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)w=\varphi_z \qquad (z=0), \tag{1.4}$$

на дне — условие непротекания

$$\varphi_z=0 \qquad (z=-H). \tag{1.5}$$

Здесь $w(x,y)$ — вертикальное смещение пластины или возвышение свободной поверхности; ρ_0, ρ — плотности льда и жидкости; p — гидродинамическое давление; D — цилиндрическая жесткость пластины; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; t — время. Край пластины свободен:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-\nu)\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)=0 \qquad (x=0, \quad z=0). \tag{1.6}$$

На бесконечности ставится условие излучения, волны являются уходящими от источника возмущений.

2. Решение задачи. Введем безразмерные переменные и параметры

$$(x',y',z')=\frac{(x,y,z)}{H}, \quad (x_0',a',b')=\frac{(x_0,a,b)}{H}, \quad \beta=\frac{D}{\rho g H^4},$$

$$F=\frac{V}{\sqrt{gH}}, \quad \sigma=\frac{\rho_0 h}{\rho H}, \quad q_0'=\frac{q_0}{\rho g H}.$$

Далее штрихи будем опускать. Потенциал течения жидкости, давление и прогиб пластины будем искать в виде

$$\varphi=VH\phi(x,y,z), \qquad p=\rho gHP(x,y,z), \qquad w=HW(x,y).$$

Тогда, исключая время t из (1.1)–(1.6), для функций $\phi(x,y,z)$, $W(x,y)$ получаем систему уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \qquad (-1<z<0),\\
\phi_z=0 \quad (z=-1), \qquad \phi_z=-W_y \quad (z=0),\\
\frac{\partial\phi}{\partial z}+F^2\,\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \qquad (z=0, \quad x<0),\\
\Big(\beta\Delta_2^2+1+\sigma F^2\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\frac{\partial\phi}{\partial z}+F^2\,\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{\partial q}{\partial y} \qquad (z=0, \quad x>0),\\
\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\nu\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\phi_z=0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\phi_z=0 \quad (x=0,\ z=0),
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где Δ_2 — оператор Лапласа по горизонтальным координатам.

Вводя преобразование Фурье по переменным x и y:

$$\Phi_-(\alpha, s, z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-isy}\, dy \int\limits_{-\infty}^{0} \phi(x, y, z)\, \mathrm{e}^{i\alpha x}\, dx,$$

$$\Phi_+(\alpha, s, z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-isy}\, dy \int\limits_{0}^{\infty} \phi(x, y, z)\, \mathrm{e}^{i\alpha x}\, dx, \qquad \Phi(\alpha, s, z) = \Phi_-(\alpha, s, z) + \Phi_+(\alpha, s, z),$$

из уравнения Лапласа и условия непротекания на дне получаем

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - (\alpha^2 + s^2)\Phi = 0 \qquad (-1 < z < 0),$$
$$\Phi_z = 0 \qquad (z = -1).$$

Тогда

$$\Phi(\alpha, s, z) = C(\alpha, s) Z(\alpha, s, z), \quad Z(\alpha, s, z) = \mathrm{ch}\,((z+1)\sqrt{\alpha^2 + s^2}\,)/\,\mathrm{ch}\,(\sqrt{\alpha^2 + s^2}\,), \tag{2.2}$$

где $C(\alpha, s)$ — неизвестная функция.

Применяя метод Винера — Хопфа [23] и вводя функции $D_\pm$, $G_\pm$ следующим образом:

$$D_-(\alpha, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-isy}\, dy \int\limits_{-\infty}^{0} (\phi_z + F^2 \phi_{yy})\, \mathrm{e}^{i\alpha x}\, dx,$$

$$D_+(\alpha, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-isy}\, dy \int\limits_{0}^{\infty} (\phi_z + F^2 \phi_{yy})\, \mathrm{e}^{i\alpha x}\, dx,$$

$$G_-(\alpha, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-isy}\, dy \int\limits_{-\infty}^{0} \Big[\Big(\beta \Delta_2^2 + 1 + \sigma F^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\phi_z + F^2 \phi_{yy}\Big]\, \mathrm{e}^{i\alpha x}\, dx,$$

$$G_+(\alpha, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-isy}\, dy \int\limits_{0}^{\infty} \Big[\Big(\beta \Delta_2^2 + 1 + \sigma F^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\phi_z + F^2 \phi_{yy}\Big]\, \mathrm{e}^{i\alpha x}\, dx,$$

из уравнений (2.1) получаем

$$D_-(\alpha, s) = 0, \qquad G_+(\alpha, s) = isQ(\alpha, s); \tag{2.3}$$

$$Q(\alpha, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} q(x, y)\, \mathrm{e}^{i(\alpha x - sy)}\, dx = \frac{4q_0\, \mathrm{e}^{i\alpha x_0} \sin(\alpha a) \sin(sb)}{\alpha s}$$

и из представления (2.2) находим

$$\begin{gathered} D(\alpha, s) = D_-(\alpha, s) + D_+(\alpha, s) = C(\alpha, s) K_1(\alpha, s), \\ G(\alpha, s) = G_-(\alpha, s) + G_+(\alpha, s) = C(\alpha, s) K_2(\alpha, s), \end{gathered} \tag{2.4}$$

где $K_1(\alpha, s)$, $K_2(\alpha, s)$ — дисперсионные функции для жидкости со свободной поверхностью и жидкости, находящейся под упругой пластиной, при равномерном движении источника возмущений:

$$\begin{gathered} K_1(\alpha, s) = \sqrt{\alpha^2 + s^2}\ \mathrm{th}\,(\sqrt{\alpha^2 + s^2}\,) - F^2 s^2, \\ K_2(\alpha, s) = [\beta(\alpha^2 + s^2)^2 + 1 - \sigma F^2 s^2]\sqrt{\alpha^2 + s^2}\ \mathrm{th}\,(\sqrt{\alpha^2 + s^2}\,) - F^2 s^2. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Известно, что дисперсионное соотношение для гравитационных волн

$$K_1(\gamma) \equiv \gamma \operatorname{th} \gamma - F^2 s^2 = 0$$

при фиксированном значении s имеет два действительных корня $\pm\gamma_0(s)$ и счетное множество мнимых корней $\pm\gamma_m(s)$, $m = 1, 2, \ldots$. Дисперсионное соотношение для изгибно-гравитационных волн под упругой пластиной

$$K_2(\mu) \equiv (\beta\mu^4 + 1 - \sigma F^2 s^2)\mu \operatorname{th} \mu - F^2 s^2 = 0$$

имеет два действительных корня $\pm\mu_0(s)$, четыре комплексных корня, которые обозначим $\pm\mu_{-1}(s)$, $\pm\mu_{-2}(s)$, $\mu_{-2} = -\bar{\mu}_{-1}$ (черта обозначает комплексное сопряжение), и счетное множество чисто мнимых корней $\pm\mu_m(s)$, $m = 1, 2, \ldots$. Тогда корни дисперсионных соотношений (2.5) соответственно равны $\pm\chi_m$, $\pm\alpha_m$:

$$\chi_m(s) = \sqrt{\gamma_m^2(s) - s^2}, \qquad \alpha_m(s) = \sqrt{\mu_m^2(s) - s^2}.$$

В последних выражениях значения комплексных корней выбираются в верхней полуплоскости, действительных корней — на положительной полуоси. Если $|s| < \gamma_0(s)$, то $\chi_0(s)$ — вещественный корень, в противном случае все корни чисто мнимые. Если $|s| < \mu_0(s)$, то $\alpha_0(s)$ — вещественный корень, в противном случае все корни комплексные.

При $x \to -\infty$ функция $\Phi_-(\alpha, s, z)$ представляет собой линейную комбинацию функций вида

$$\mathrm{e}^{-i(\chi_m x + sy)} \operatorname{ch}(\gamma_m(z+1))/\operatorname{ch}(\gamma_m).$$

Следовательно, она аналитична по α во всей нижней полуплоскости $\operatorname{Im}(\alpha) < \lambda_1$, за исключением возможных вещественных полюсов в точках $\pm\chi_0$ ($\lambda_1 = |\chi_1|$ при $|s| \leqslant \gamma_0$, $\lambda_1 = |\chi_0|$ при $|s| > \gamma_0$). При $x \to \infty$ функция $\Phi_+(\alpha, s, z)$ представляет собой линейную комбинацию функций вида

$$\mathrm{e}^{i(\alpha_m x - sy)} \operatorname{ch}(\mu_m(z+1))/\operatorname{ch}(\mu_m).$$

Следовательно, она аналитична по α во всей верхней полуплоскости $\operatorname{Im}(\alpha) > -\lambda_2$, за исключением возможных вещественных полюсов в точках $\pm\alpha_0$ ($\lambda_2 = \min |\operatorname{Im}(\alpha_m)|$, $m \neq 0$ при $|s| \leqslant \mu_0$, $\lambda_2 = |\operatorname{Im}(\alpha_0)|$ при $|s| > \mu_0$).

Исключая из соотношений (2.3), (2.4) $C(\alpha, s)$, выводим уравнение

$$G_-(\alpha, s) + isQ(\alpha, s) = D_+(\alpha, s)K(\alpha, s), \qquad K(\alpha, s) = K_2(\alpha, s)/K_1(\alpha, s). \tag{2.6}$$

В соответствии с методом Винера — Хопфа факторизуем функцию $K(\alpha, s)$:

$$K(\alpha, s) = K_-(\alpha, s)K_+(\alpha, s).$$

Функции K_- и K_+ аналитичны по α соответственно в нижней и верхней полуплоскостях и определяются формулами

$$K_\pm(\alpha, s) = \frac{(\alpha \pm \alpha_{-1})(\alpha \pm \alpha_{-2})}{\mu_{-1}\mu_{-2}} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha \pm \alpha_j)\gamma_j}{\mu_j(\alpha \pm \chi_j)}.$$

Разделив левую и правую части уравнения (2.6) на $K_-(\alpha, s)$, получаем

$$\frac{G_-(\alpha, s)}{K_-(\alpha, s)} + 2q_0 \sin(sb)\, \frac{\psi(\alpha)}{K_-(\alpha, s)} = D_+(\alpha, s)K_+(\alpha, s), \quad \psi(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^{i\alpha(x_0+a)} - \mathrm{e}^{i\alpha(x_0-a)}}{\alpha}.$$

С использованием представления [23]

$$\frac{\psi(\alpha)}{K_-(\alpha,s)} = L_-(\alpha,s) + L_+(\alpha,s), \qquad L_\pm(\alpha,s) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty\mp i\lambda}^{\infty\mp i\lambda} \frac{\psi(\zeta)}{K_-(\zeta,s)(\zeta-\alpha)}\,d\zeta,$$

где функции $L_\pm$ аналитичны по α соответственно в верхней и нижней полуплоскостях; $\lambda < \min(\lambda_1, \lambda_2)$, получаем уравнение

$$G_-(\alpha,s)/K_-(\alpha,s) + 2q_0\sin(sb)L_-(\alpha,s) = D_+(\alpha,s)K_+(\alpha,s) - 2q_0\sin(sb)L_+(\alpha,s),$$

в левой части которого содержится функция, аналитическая в нижней полуплоскости, а в правой части — функция, аналитическая в верхней полуплоскости. Следовательно, эти функции представляют аналитическую функцию во всей комплексной плоскости. Согласно теореме Лиувилля данная функция является полиномом, степень которого определяется поведением функции на бесконечности по α. Имеем

$$K_\pm(\alpha,s) = O(|\alpha|^2), \qquad L_\pm(\alpha,s) = O(|\alpha|^{-1}), \qquad |\alpha|\to\infty.$$

Вблизи кромки пластины градиент потенциала имеет интегрируемую особенность $O(r^{-\eta})$ ($\eta < 1$; r — расстояние до кромки пластины). Тогда [24] при $|\alpha|\to\infty$

$$G_-(\alpha,s) = O(|\alpha|^{\eta+3}), \qquad D_+(\alpha,s) = O(|\alpha|^{\eta-1}).$$

Следовательно, степень полинома равна единице и

$$D_+(\alpha,s)K_+(\alpha,s) - 2q_0\sin(sb)L_+(\alpha,s) = 2q_0\sin(sb)(a_1(s) + a_2(s)\alpha),$$

где $a_1(s)$, $a_2(s)$ — неизвестные функции, которые определяются из условий на кромке пластины.

В результате получаем

$$\Phi(\alpha,s,z) = 2q_0\sin(sb)\,\frac{(a_1 + a_2\alpha + L_+(\alpha,s))Z(\alpha,s,z)}{K_+(\alpha,s)K_1(\alpha,s)},$$

$$\Phi(x,s,z) = \frac{q_0\sin(sb)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha x}\,(a_1 + a_2\alpha + L_+(\alpha,s))Z(\alpha,s,z)}{K_+(\alpha,s)K_1(\alpha,s)}\,d\alpha,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,s,0) = \frac{q_0\sin(sb)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha x}\,(a_1 + a_2\alpha + L_+(\alpha,s))\sqrt{\alpha^2+s^2}\ \mathrm{th}\,(\sqrt{\alpha^2+s^2}\,)}{K_+(\alpha,s)K_1(\alpha,s)}\,d\alpha.$$

Умножая при $x > 0$ числитель и знаменатель последнего подынтегрального выражения на $K_-(\alpha,s)$, находим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,s,0) = \frac{q_0\sin(sb)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mathrm{e}^{i\alpha(x_0+a-x)} - \mathrm{e}^{i\alpha(x_0-a-x)})\sqrt{\alpha^2+s^2}\mathrm{th}(\sqrt{\alpha^2+s^2})}{\alpha K_2(\alpha,s)}\,d\alpha +$$

$$+\frac{q_0\sin(sb)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha x}(a_1 + a_2\alpha - L_-(\alpha,s))\sqrt{\alpha^2+s^2}\,\mathrm{th}\,(\sqrt{\alpha^2+s^2}\,)K_-(\alpha,s)}{K_2(\alpha,s)}\,d\alpha.$$

При вычислении интегралов важно правильно выбрать правило обхода полюсов на действительной оси, при этом используется условие излучения, аналогично тому как это сделано в [25]. В области нагрузки вводится нестационарное давление с малым параметром ε $q(x,y,t) = q_0 \,\mathrm{e}^{\varepsilon t}$, $\varepsilon > 0$. Тогда полюсы сдвигаются с действительной оси в верхнюю или нижнюю полуплоскость. Этот сдвиг и определяет правило обхода. Стационарное решение определяется как предел решения, полученного при $\varepsilon \to 0$. Установлено, что на положительной действительной полуоси полюсы обходятся снизу, а на отрицательной — сверху. Все интегралы по α вычисляем с помощью теории вычетов,

$$L_-(\alpha,s) = -\sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\psi(\alpha_m)}{K'_-(\alpha_m,s)(\alpha_m-\alpha)}, \qquad K'_-(\alpha_m,s) = \frac{K'_2(\alpha_m,s)}{K_+(\alpha_m,s)K_1(\alpha_m,s)}, \tag{2.7}$$

где штрих означает производную по первой переменной.

Краевые условия на кромке пластины запишем в виде

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu s^2\Big)\frac{\partial\Phi}{\partial z}(0,s,0) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (2-\nu)s^2\Big)\frac{\partial\Phi}{\partial z}(0,s,0) = 0.$$

Подставляя в эти условия выражение для потенциала и вычисляя интегралы с помощью теории вычетов, получаем систему уравнений для определения функций $a_1(s)$, $a_2(s)$

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(\alpha_j^2+\nu s^2)\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\,\mathrm{th}\,(\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\,)K_+(\alpha_j,s)(a_1-a_2\alpha_j-L_-(-\alpha_j,s))}{K'_2(\alpha_j,s)} + {}$$
$$+ \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(\alpha_j^2+\nu s^2)\psi(\alpha_j)\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\,\mathrm{th}\,(\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\,)}{K'_2(\alpha_j,s)} = 0,$$

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j(\alpha_j^2+(2-\nu)s^2)\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\,\mathrm{th}\,(\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\,)K_+(\alpha_j,s)(a_1-a_2\alpha_j-L_-(-\alpha_j,s))}{K'_2(\alpha_j,s)} - {}$$
$$- \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j(\alpha_j^2+(2-\nu)s^2)\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\,\mathrm{th}\,(\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\,)\psi(\alpha_j)}{K'_2(\alpha_j,s)} = 0.$$

Ряды по j можно вычислить точно. Выполним подстановку

$$\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\,\mathrm{th}\,\big(\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\,\big) = -\frac{K_1(\alpha_j,s)}{\beta(\alpha_j^2+s^2)^2-\sigma F^2 s^2} \tag{2.8}$$

и преобразуем полученные соотношения, выражая их через вычеты в корнях многочлена в знаменателе формулы (2.8)

$$\eta_k = \pm(\pm\sqrt{\delta/\beta} - s^2)^{1/2}, \qquad \delta = \sigma F^2 s^2.$$

Учитывая, что $K_+(-\eta_k,s) = K_-(\eta_k,s) = 1/K_+(\eta_k,s)$, так как $K(\eta_k,s) = 1$, получаем систему линейных алгебраических уравнений второго порядка

$$\sum_{j=1}^{2} A_{ij}a_j = B_i, \qquad i = 1,2, \tag{2.9}$$

где

$$A_{11} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k^2+\nu s^2}{\eta_k(\eta_k^2+s^2)}\Big(K_+(\eta_k,s) - \frac{1}{K_+(\eta_k,s)}\Big),$$

$$A_{12} = -\sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k^2 + \nu s^2}{\eta_k^2 + s^2} \Big(K_+(\eta_k, s) + \frac{1}{K_+(\eta_k, s)} \Big),$$

$$A_{21} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k^2 + (2-\nu) s^2}{\eta_k^2 + s^2} \Big(K_+(\eta_k, s) + \frac{1}{K_+(\eta_k, s)} \Big),$$

$$A_{22} = -\sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k(\eta_k^2 + (2-\nu) s^2)}{\eta_k^2 + s^2} \Big(K_+(\eta_k, s) - \frac{1}{K_+(\eta_k, s)} \Big),$$

$$B_1 = -\sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\psi(\alpha_m)}{K'_-(\alpha_m, s)} \sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k^2 + \nu s^2}{\eta_k(\eta_k^2 + s^2)} \Big(\frac{1}{K_+(\eta_k, s)(\eta_k - \alpha_m)} + \frac{K_+(\eta_k, s)}{\eta_k + \alpha_m} \Big),$$

$$B_2 = \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\psi(\alpha_m)}{K'_-(\alpha_m, s)} \sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k^2 + (2-\nu) s^2}{\eta_k^2 + s^2} \Big(\frac{1}{K_+(\eta_k, s)(\eta_k - \alpha_m)} - \frac{K_+(\eta_k, s)}{\eta_k + \alpha_m} \Big).$$

В этих выражениях ряды сходятся по экспоненциальному закону. При $s = (\delta/\beta)^{1/4}$ коэффициенты A_{11} и B_1 имеют корневую особенность, $\eta_1 = 0$. Поэтому первое уравнение в (2.9) умножим на η_1.

Анализ дисперсионных соотношений показывает, что при любых скоростях движения нагрузки существует значение s_0, такое что $\gamma_0(s_0) = s_0$, $\gamma_0(s) < |s|$ при $|s| < s_0$ и $\gamma_0(s) > |s|$ при $|s| > s_0$. При $V \geqslant \sqrt{gH}$ $s_0 = 0$. Если скорость движения нагрузки меньше минимальной фазовой скорости изгибно-гравитационных волн c_m, то $\mu_0(s) < |s|$ для любых значений s. Если $c_m < V < \sqrt{gH}$, то существуют два значения s_1 и s_2, такие что $\mu_0(s_n) = s_n$, $n = 1, 2$, $\mu_0(s) > |s|$ при $s_1 < |s| < s_2$. При $V > \sqrt{gH}$ $s_1 = 0$, т. е. $\mu_0(s) > |s|$ при $|s| < s_2$ и $\mu_0(s) < |s|$ при $|s| > s_2$.

Таким образом, при $s \to \infty$ правая часть системы (2.9) экспоненциально затухает, так как экспоненциально затухают функции $\psi(\alpha_m)$. Поэтому коэффициенты $a_1(s)$, $a_2(s)$, являющиеся решением системы, экспоненциально затухают при $s \to \infty$.

После решения системы (2.9) находим прогиб пластины и возвышение свободной поверхности. При $x > 0$

$$W(x, y) = -\frac{q_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{isy} \sin(sb)}{s} \Big(\Lambda(x, s) + \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j x}(a_1 - a_2\alpha_j - L_-(-\alpha_j, s)) K_+(\alpha_j, s) \mu_j \operatorname{th}(\mu_j)}{K'_2(\alpha_j, s)} \Big)\, ds, \qquad (2.10)$$

$$\Lambda(x, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha x}\, \psi(\alpha) \sqrt{\alpha^2 + s^2} \operatorname{th}(\sqrt{\alpha^2 + s^2}\,)}{K_2(\alpha, s)}\, d\alpha.$$

При $x < 0$

$$W(x, y) = -\frac{q_0 F^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{isy}\, s \sin(sb) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\chi_j x}\, \gamma_j (a_1 + a_2\chi_j + L_+(\chi_j, s))}{\chi_j K_+(\chi_j, s) K'_1(\gamma_j)}\, ds. \qquad (2.11)$$

В формуле (2.10) первый член представляет собой прогиб бесконечной упругой плавающей пластины при движении нагрузки, второй член учитывает влияние края и взаимодействие с поверхностными волнами. При вычислении функции $\Lambda(x, s)$ контур интегрирования замыкается в верхней или нижней полуплоскости в зависимости от значения x. При

$x_0-a<x<x_0+a$ одна экспонента аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, другая — в нижнюю, необходимо также учитывать полюс в нуле. При $x_0-a<x<x_0+a$ получаем

$$\Lambda(x,s)=\sum_{j=-2}^{\infty}\frac{(\mathrm{e}^{i\alpha_j(x_0+a-x)}+\mathrm{e}^{i\alpha_j(x+a-x_0)}-2)\mu_j\operatorname{th}\mu_j}{\alpha_j K_2'(\alpha_j,s)}=$$

$$=\sum_{j=-2}^{\infty}\frac{(\mathrm{e}^{i\alpha_j(x_0+a-x)}+\mathrm{e}^{i\alpha_j(x+a-x_0)})\mu_j\operatorname{th}\mu_j}{\alpha_j K_2'(\alpha_j,s)}+\frac{s\operatorname{th}s}{K_2(0,s)}.$$

При обращении преобразования Фурье подынтегральные функции экспоненциально затухают при $s\to\infty$.

Известно, что в задаче о движущейся области давления характер изменения прогиба пластины и возвышения жидкости перед нагрузкой и позади нее различается. Для того чтобы вычислить преобразование Фурье, представим функцию $f(y)$, заданную на всей действительной оси, в виде суммы четной и нечетной составляющих:

$$f(y)=f_0(y)+f_1(y),\qquad f_0(y)=f_0(-y),\qquad f_1(y)=-f_1(-y).$$

Преобразование Фурье этой функции имеет вид

$$F(s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-isy}f(y)\,dy=F_0(s)+iF_1(s),$$

$$F_0(s)=2\int\limits_0^{\infty}\cos(sy)f_0(y)\,dy,\qquad F_1(s)=-2\int\limits_0^{\infty}\sin(sy)f_1(y)\,dy,$$

где $F_0(s)$, $F_1(s)$ — четная и нечетная функции переменной s соответственно. Тогда обратное преобразование Фурье функции $F(s)$ является действительной функцией

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{isy}(F_0(s)+iF_1(s))\,ds=2\int\limits_0^{\infty}[\cos(sy)\operatorname{Re}F(s)-\sin(sy)\operatorname{Im}F(s)]\,ds.$$

Так как $\alpha_0=\sqrt{\mu_0^2(s)-s^2}$, то $\alpha_0(s)=0$ при $\mu_0(s)=s$ и выражение (2.7) для $L_-(-\alpha_0,s)$ содержит корневую интегрируемую особенность при $V>c_m$. Путем замены переменной интегрирования подынтегральную функцию можно сделать регулярной. Замена переменной проводится следующим образом. В случае $c_m<V<\sqrt{gH}$ область интегрирования делится на три участка:

1) $0<s<s_1$: $s=s_1\sin\zeta$, $0<\zeta<\pi/2$;

2) $s_1<s<s_2$: $s=s_0+d\sin\zeta$, $-\pi/2<\zeta<\pi/2$, $s_0=(s_1+s_2)/2$, $d=(s_2-s_1)/2$;

3) $s>s_2$: $s=s_2\operatorname{ch}\zeta$, $0<\zeta<\infty$.

Если $V>\sqrt{gH}$, то первый участок отсутствует.

Асимптотика в дальнем поле волнового движения жидкости, обусловленного равномерным движением источника на бесконечной свободной поверхности жидкости, изучалась в [2]. Для жидкости, покрытой бесконечной упругой плавающей пластиной, асимптотика дальнего поля при движении нагрузки исследовалась в [4, 13]. В рассматриваемом случае исследование волн в дальнем поле проводится аналогично методом стационарной фазы, при этом фазовая функция и дисперсионное соотношение остаются теми же, что и в случае однородной верхней границы, различаются только медленно меняющиеся подынтегральные функции. Поэтому качественно поведение волн в дальнем поле в основном такое же, как и для бесконечной среды.

Из формулы (2.11) следует, что основной вклад в асимптотику вертикальных смещений в дальнем поле вносит нулевая мода при $s > s_0$, остальные члены экспоненциально затухают. В полярной системе координат выражение для возвышения жидкости в дальнем поле можно представить в виде

$$W(r,\theta) = -\frac{q_0 F^2}{\pi} \int\limits_{|s|>s_0} \mathrm{e}^{ir\Omega(s,\theta)}\, f(s)\, ds, \qquad \Omega(s,\theta) = s\sin\theta - \cos\theta\sqrt{\gamma_0^2(s) - s^2}\,,$$

$$f(s) = s\sin(sb)\,\frac{a_1(s) + \chi_0 a_2(s) + L_+(\chi_0, s)}{K_+(\chi_0, s)K_1'(\chi_0, s)}, \qquad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Точки стационарной фазы определяются соотношениями

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\gamma_0(s)\gamma_0'(s) - s}{\sqrt{\gamma_0^2(s) - s^2}}, \qquad \Omega_{ss}''(s,\theta) = -\cos\theta\,\frac{\gamma_0\gamma_0''(\gamma_0^2 - s^2) - (s\gamma_0' - \gamma_0)^2}{(\gamma_0^2 - s^2)^{3/2}}. \tag{2.12}$$

Используя метод стационарной фазы, можно показать, что внутри некоторого угла, где выполнено соотношение (2.12), возвышение жидкости в дальнем поле имеет вид

$$W(r,\theta) = A(\theta)/\sqrt{r} + O(r^{-1}), \tag{2.13}$$

если $\Omega_{ss}''(s,\theta) \neq 0$. Если при некотором значении угла θ, удовлетворяющего условию (2.12), выполнены соотношения $\Omega_{ss}''(s,\theta) = 0$, $\Omega_{sss}'''(s,\theta) \neq 0$, то в направлении, соответствующем этому углу, убывание пропорционально $r^{-1/3}$. Формулы для прогиба пластины в дальнем поле аналогичны, за исключением того, что основной вклад в прогиб пластины вносит область интегрирования $s_1 < |s| < s_2$, функция $f(s)$ имеет другой вид, а фазовая функция определяется соотношением

$$\Omega(s,\theta) = s\sin\theta + \cos\theta\sqrt{\mu_0^2(s) - s^2}\,.$$

Если скорость движения нагрузки меньше критической скорости, соответствующей минимальной фазовой скорости волн в пластине, то $\mu_0(s) < |s|$ для любых значений s и прогиб пластины затухает экспоненциально в дальнем поле.

При движении тела по свободной поверхности или ледяному покрову на него действуют боковая сила и сила волнового сопротивления, которые находятся по формулам

$$R_x = -\iint\limits_S q w_x(x,y)\, dx\, dy, \qquad R_y = -\iint\limits_S q w_y(x,y)\, dx\, dy.$$

Безразмерные коэффициенты волновых сил A_x, A_y вычисляются по формулам [17]

$$\frac{R_x}{4q_0ab} = -A_x\,\frac{q_0}{2\rho g b}, \qquad \frac{R_y}{4q_0ab} = -A_y\,\frac{q_0}{2\rho g b}.$$

3. Результаты численных расчетов. Проведены тестовые расчеты и сравнение их результатов с экспериментальными данными работы [12] и теоретическими результатами для бесконечного ледяного покрова [15]. Полученные данные хорошо согласуются.

Выполнены численные расчеты для полубесконечного ледяного покрова при входных параметрах, используемых в работах [13, 15]: $E = 5$ ГПа, $h = 2{,}5$ м, $\rho = 1000$ кг/м^3, $\rho_0 = 922{,}5$ кг/м^3, $\nu = 1/3$, $q_0 = 1000$ Н/м^2, $a = 10$ м, $b = 20$ м, $x_0 = 50$ м, толщина слоя жидкости $H = 350$ м. Скорость движения нагрузки менялась. Значениям скорости

$V = 10$, 15, 20, 30, 50, 60 м/с соответствуют значения числа Фруда $F = 0{,}171$; 0,256; 0,341; 0,512; 0,853; 1,024. В данном случае критическая скорость c_m, соответствующая наименьшей фазовой скорости волн в пластине, приближенно равна 21,8 м/с. Скорости $V = 10$, 15, 20 м/с являются докритическими, в этих случаях прогиб пластины в дальнем поле затухает экспоненциально.

При $V = 30$ м/с $\Omega''_{ss}(s,\theta) \neq 0$, выражение для прогиба пластины в дальнем поле имеет вид (2.13), а коэффициент $A(\theta)$ достигает максимума в направлении, составляющем с направлением скорости угол, равный 156,7° (что согласуется с результатами [13]). Перед нагрузкой распространяются короткие, преимущественно изгибные волны, а позади нее — длинные, преимущественно гравитационные волны, каустики отсутствуют. При скоростях $V = 50$, 60 м/с вторая производная фазовой функции $\Omega''_{ss}(s,\theta)$ меняет знак, имеются каустики (поведение гребней волн исследовано в работе [13]). При $V = 60$ м/с за движущейся нагрузкой образуется зона тени, где волны не распространяются [13].

Возвышение свободной поверхности жидкости в дальнем поле, возникающее вследствие наличия движущегося возмущения, изменяется следующим образом. При скоростях $V = 15$, 20, 30 м/с угол θ, определяемый формулой (2.12), меняется в интервале от $\theta = 3\pi/2$ при $s = s_0$ до $\theta_* = 4{,}373$ при некотором значении s_* и затем увеличивается, при $s \to \infty$ $\theta \to 3\pi/2$. При этом $\Omega''_{ss}(s_*,\theta_*) = 0$. Таким образом, направление, соответствующее углу θ_*, является каустическим, вдоль этого направления убывание возвышения свободной поверхности минимальное и пропорционально $r^{-1/3}$. Это направление образует острый угол с линией движения, равный 19,47°. При $V = 50$ м/с возвышение жидкости в дальнем поле изменяется аналогично, но острый угол увеличивается до значения, равного 28,5°, что согласуется с результатами работы [2].

При $V = 60$ м/с $s_0 = 0$ и угол θ, определяемый соотношением (2.12), меняется в интервале от $\theta_0 = 3{,}359$ при $s = 0$ до $\theta = 3\pi/2$ при $s \to \infty$. Знак второй производной фазовой функции не меняется, но при $s = 0$ $\Omega'_s(0,\theta_0) = \Omega''_{ss}(0,\theta_0) = 0$, т. е. в направлении, соответствующем углу θ_0, асимптотика возвышения жидкости в дальнем поле представляется в виде разложения по степеням $r^{-1/3}$. Поскольку при $s = 0$ медленно меняющаяся функция $f(s)$ и ее первая производная равны нулю, первые два члена асимптотики обращаются в нуль и главный член имеет порядок $O(r^{-1})$. В остальных направлениях, удовлетворяющих (2.12), асимптотика возвышения жидкости в дальнем поле имеет вид (2.13), при этом коэффициент $A(\theta)$ достигает максимума при $\theta = 3\pi/2 - 0{,}016$.

Из проведенных расчетов следует, что при скорости движения нагрузки $V = 10$ м/с и в жидкости, и в пластине волны отсутствуют. Деформация свободной поверхности жидкости мала. При $V = 15$ м/с в жидкости появляются волны, распространяющиеся за движущейся нагрузкой, в пластине волны отсутствуют. При $V = 20$ м/с волны в жидкости возбуждают волны в пластине вблизи кромки, затухающие вдали от края. На рис. 1 представлены трехмерные картины волн в жидкости и пластине.

На рис. 2 показаны прогиб пластины и возвышение жидкости в сечениях $x = 50$ м (центр области приложения нагрузки), $x = 0$ (кромка) и $x = -50$ м при $V = 20$ м/с, а также прогиб бесконечной пластины на расстоянии $x = 50$ м от центра области приложения нагрузки. Видно, что край полубесконечной пластины деформируется более существенно, чем бесконечная пластина в этом сечении. В бесконечной пластине при $V = 20$ м/с волны отсутствуют (кривая *3*). В случае полубесконечной пластины движущийся прогиб края пластины вызывает появление волн в жидкости, которые генерируют волны в пластине вблизи края за движущейся нагрузкой, затухающие вдали от него. Следует отметить, что при скоростях $V = 15$, 20 м/с длина волн в жидкости не меняется, максимальные значения вертикальных смещений расположены на линии, составляющей с линией движения угол, равный 19,47°.

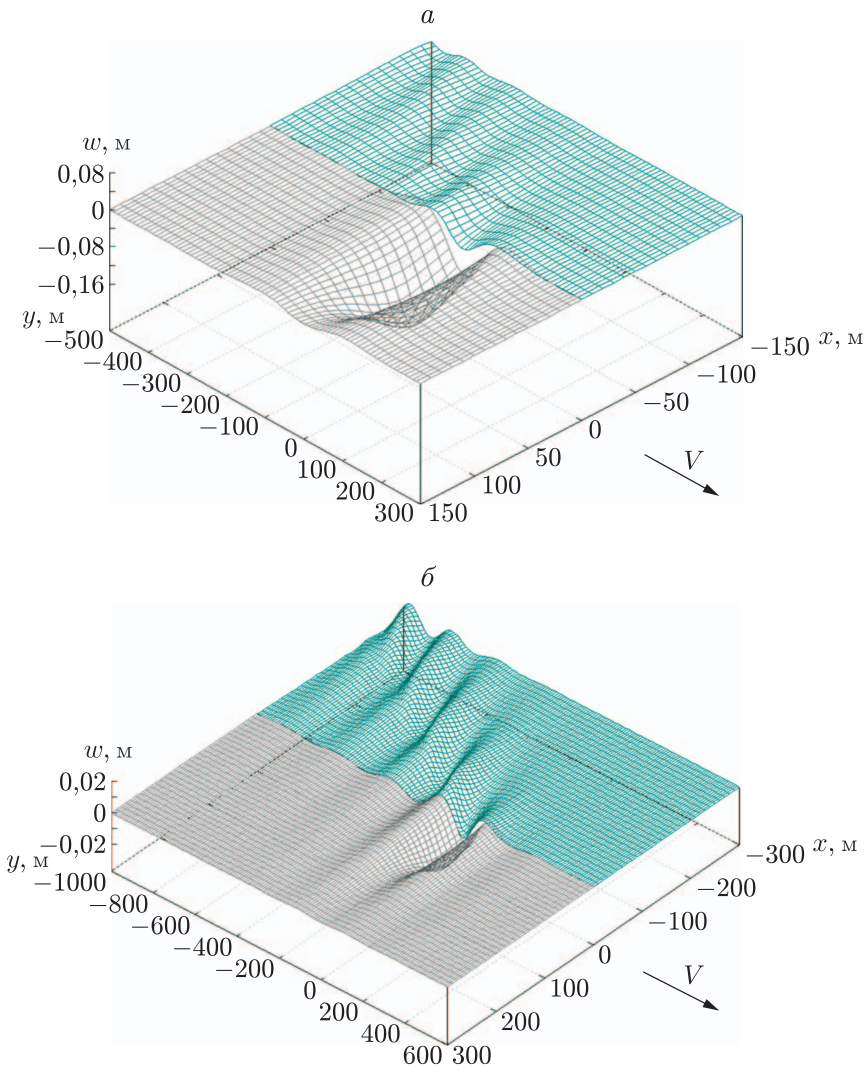


Рис. 1. Вертикальные смещения пластины и жидкости:
а — $V = 15$ м/с, *б* — $V = 20$ м/с

Для изгибно-гравитационных волн скорость $V = 30$ м/с является сверхкритической. В этом случае вследствие движения нагрузки появляются короткие изгибные волны перед областью, в которой приложена нагрузка, и длинные гравитационные волны за этой областью. На рис. 3 показаны прогиб пластины на кромке (кривая *1*), возвышение свободной поверхности вблизи края (кривая *2*) и в сечении $x = -50$ м (кривая *3*). Видно, что позади нагрузки в области длинных волн вблизи края вертикальные смещения пластины и жидкости совпадают, а в области перед нагрузкой, где волны короткие, различаются. При распространении волн в жидкости вдали от края происходит дисперсия волн, их длина меняется. Поскольку волны в пластине распространяются и перед нагрузкой, и позади нее, колебания края вовлекают в движение всю поверхность жидкости. Направление преимущественного распространения волн в жидкости образует с линией движения угол, равный 19,47°. На рис. 4 показаны прогиб пластины и возвышение свободной поверхности при $V = 30$, 50, 60 м/с. С увеличением скорости длина изгибных волн в пластине перед нагрузкой уменьшается, а длина гравитационных волн позади нее увеличивается, дисперсия волн в жидкости становится более существенной.

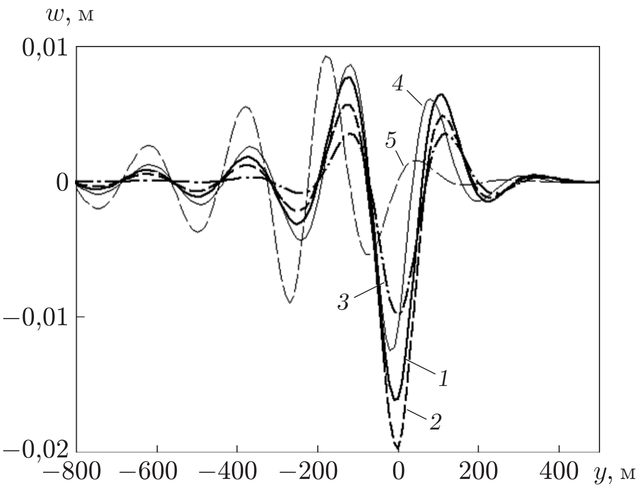


Рис. 2. Зависимость вертикальных смещений пластины (*1–3*) и жидкости (*4, 5*) от координаты y в различных сечениях ($V = 20$ м/с):
1, 3, 4 — $x = 0$ (*3* — бесконечная пластина), *2* — $x = 50$ м, *5* — $x = -50$ м

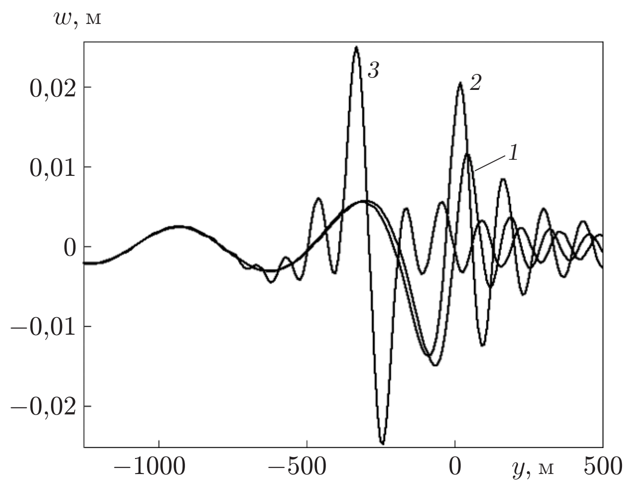
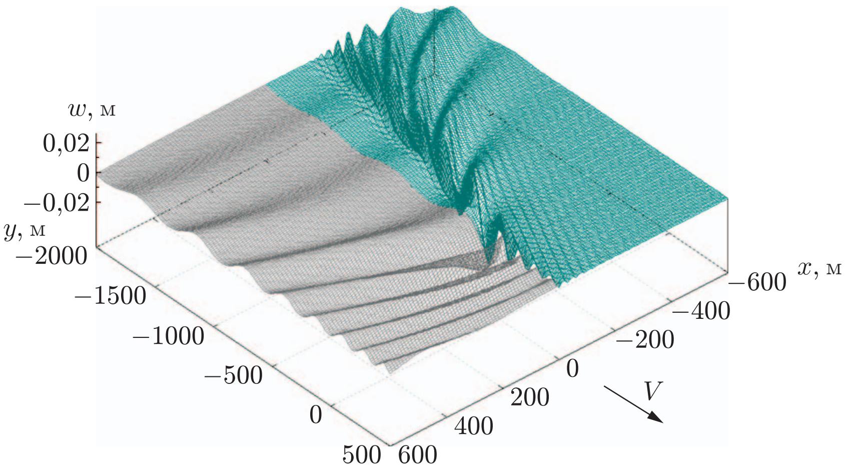
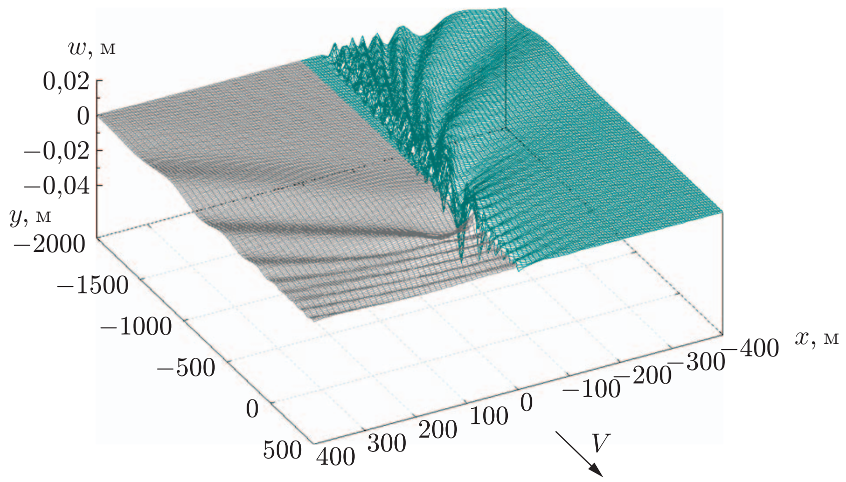


Рис. 3. Зависимость вертикальных смещений пластины (*1*) и жидкости (*2, 3*) от координаты y в различных сечениях ($V = 30$ м/с):
1, 2 — $x = 0$, *3* — $x = -50$ м

Зависимости безразмерных коэффициентов волновых сил A_y (кривая *1*) и A_x (кривая *2*), от скорости движения нагрузки V представлены на рис. 5. Там же приведена зависимость от скорости V коэффициента волнового сопротивления A_{y0} (кривая *3*) для бесконечной пластины. Наиболее существенное различие кривых *1, 3* наблюдается при докритических скоростях, при которых $A_{y0} = 0$, и в окрестности критического значения скорости. Коэффициент боковой силы A_x меняет знак и становится отрицательным. Это объясняется тем, что при больших скоростях движения нагрузки максимальный по абсолютной величине прогиб пластины смещается в область позади нагрузки, при этом характер зависимости прогиба пластины от поперечной координаты x меняется. На рис. 6, 7 показан прогиб пластины в сечениях $y = 0$ и $x = 50$ м, соответствующих центру области приложения нагрузки, при различных скоростях движения. При малых скоростях наибольший по абсолютной величине прогиб пластины наблюдается вблизи центра области *а*



б



в

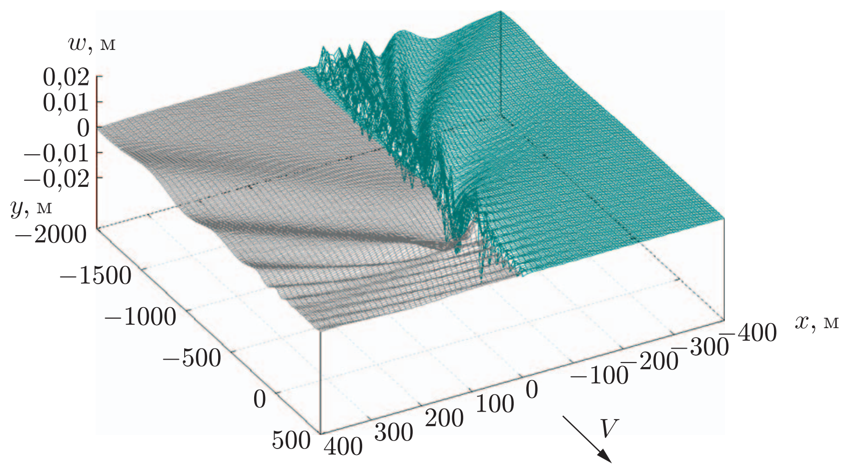


Рис. 4. Вертикальные смещения пластины и жидкости:
а — $V = 30$ м/с, *б* — $V = 50$ м/с, *в* — $V = 60$ м/с

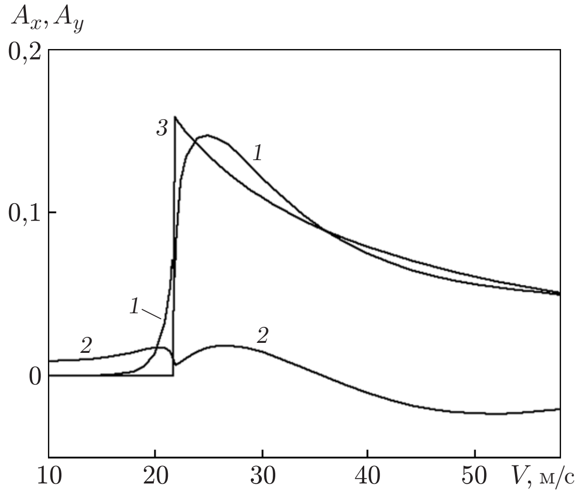


Рис. 5

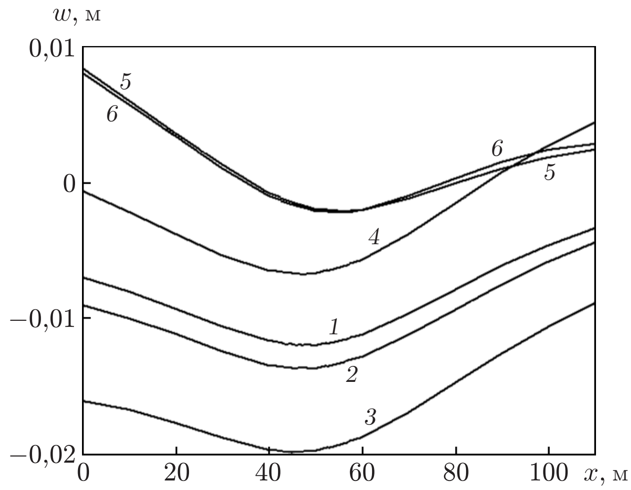


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость безразмерных коэффициентов волновых сил от скорости движения нагрузки V:
1 — A_y, *2* — A_x, *3* — A_{y0}

Рис. 6. Прогиб пластины в сечении $y = 0$ в области действия нагрузки при различных скоростях движения:
1 — $V = 10$ м/с, *2* — $V = 15$ м/с, *3* — $V = 20$ м/с, *4* — $V = 30$ м/с, *5* — $V = 50$ м/с, *6* — $V = 60$ м/с

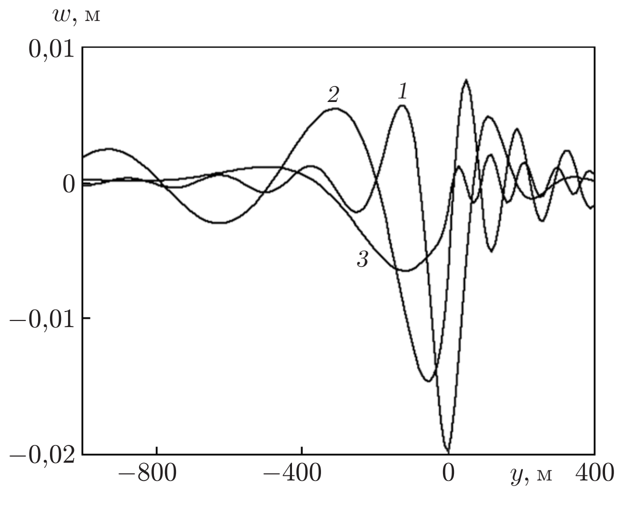


Рис. 7. Прогиб пластины в сечении $x = 50$ м при различных скоростях движения нагрузки:
1 — $V = 20$ м/с, *2* — $V = 30$ м/с, *3* — $V = 50$ м/с

приложения нагрузки, а при больших скоростях — позади этой области. При больших скоростях реакция пластины происходит с запаздыванием. Чем больше скорость движения нагрузки, тем больше расстояние от центра области приложения нагрузки до точки максимального по абсолютной величине прогиба пластины.

Заключение. Получено аналитическое стационарное решение задачи о генерации волн нагрузкой, равномерно движущейся по упругой плавающей полубесконечной пластине, находящейся на поверхности жидкости конечной глубины. Исследовано влияние скорости нагрузки на волновые силы и на характер генерируемых волн в жидкости и пластине.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kerr A. D., Palmer W. T.** The deformations and stresses in floating ice plates // Acta Mech. 1972. V. 15. P. 57–72.
2. **Havelock T. H.** The propagation of groups of waves in dispersive media, with application to waves on water produced by a travelling disturbance // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1908. V. 81. P. 398–430.
3. **Хейсин Д. Е.** Перемещение нагрузки по упругой пластинке, плавающей на поверхности идеальной жидкости // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1963. № 1. С. 178–180.
4. **Доценко С. Ф.** Установившиеся гравитационно-упругие трехмерные волны от движущихся возмущений // Цунами и внутренние волны. Севастополь: Мор. гидрофиз. ин-т АН УССР, 1976. С. 144–155.
5. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967.
6. **Черкесов Л. В.** Поверхностные и внутренние волны. Киев: Наук. думка, 1973.
7. **Squire V. A.** Moving loads on ice plates / V. A. Squire, R. J. Hosking, A. D. Kerr, et al. Dordrecht: Kluwer, 1996.
8. **Козин В. М.** Прикладные задачи динамики ледяного покрова / В. М. Козин, В. Д. Жесткая, А. В. Погорелова, С. Д. Чижиумов, М. Р. Джабраилов, В. С. Морозов, А. Н. Кустов. М.: Акад. естествознания, 2008.
9. **Bukatov A. E., Zharkov V. V.** Formation of the ice cover's flexural oscillations by action of surface and internal ship waves. 1. Surface waves // Intern. J. Offshore Polar Engng. 1997. V. 7, N 1. P. 1–12.
10. **Squire V. A.** Synergies between VLFS hydroelasticity and sea ice research // Intern. J. Offshore Polar Engng. 2008. V. 18, N 4. P. 241–253.
11. **Козин В. М.** Экспериментально-теоретические исследования зависимости параметров распространяющихся в плавающей пластине изгибно-гравитационных волн от условий их возбуждения / В. М. Козин, А. В. Погорелова, В. Л. Земляк, В. Ю. Верещагин, В. Е. Рогожникова, Д. Ю. Кипин, А. А. Матюшина. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016.
12. **Takizawa T.** Deflection of a floating sea ice sheet induced by moving load // Cold Regions Sci. Tech. 1985. V. 11. P. 171–180.
13. **Davys J. W., Hosking R. J., Sneyd A. D.** Waves due to steadily moving source on a floating ice plate // J. Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 269–287.
14. **Schulkes R. M. S. M., Hosking R. J., Sneyd A. D.** Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Pt 2 // J. Fluid Mech. 1987. V. 180. P. 297–318.
15. **Milinazzo F., Shinbrot M., Evans N. W.** A mathematical analysis of the steady response of floating ice to the uniform motion of a rectangle load // J. Fluid Mech. 1995. V. 287. P. 173–197.

16. **Yeung R. W., Kim J. W.** Effects of a translating load on a floating plate-structural drag and plate deformation // J. Fluids Structures. 2000. V. 14, N 7. P. 993–1011.
17. **Козин В. М., Погорелова А. В.** Волновое сопротивление амфибийных судов на воздушной подушке при движении по ледяному покрову // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 2. С. 49–55.
18. **Погорелова А. В.** Особенности волнового сопротивления СВПА при нестационарном движении по ледяному покрову // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 89–99.
19. **Жесткая В. Д., Козин В. М.** Исследования напряженно-деформированного состояния полубесконечного ледяного покрова под действием движущейся нагрузки // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 112–117.
20. **Kashiwagi M.** Transient responses of a VLFS during landing and take-off of an airplane // J. Marine Sci. Technol. 2004. V. 9, N 1. P. 14–23.
21. **Brocklehurst P.** Hydroelastic waves and their interaction with fixed structures: PhD thesis. Norwich: Univ. East Anglia, 2012.
22. **Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A.** The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Appl. Ocean Res. 2016. V. 59. P. 313–326.
23. **Нобл Б.** Метод Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
24. **Гельфанд И. М.** Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. М.: Физматгиз, 1958.
25. **Лайтхилл Дж.** Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.

Поступила в редакцию 10/IV 2017 г.,
в окончательном варианте — 27/IV 2017 г.