Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 5

УДК 532.529

О ПОВЕДЕНИИ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В ВЯЗКОЙ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

В. Л. Сенницкий

**Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск**

Ранее теоретически и экспериментально установлено [1, 2] существование явления преимущественно однонаправленного движения газового пузыря в вибрирующей жидкости. Это явление состоит в следующем. Имеется замкнутый сосуд, заполненный жидкостью, содержащей газовый пузырь. Сила тяжести отсутствует. Сосуд совершает заданные периодические поступательные колебания и заданно деформируется. Вследствие этого газовый пузырь перемещается в заданном направлении (в положительном или отрицательном направлении оси, вдоль которой колеблется сосуд, в зависимости от того, как колеблется и деформируется сосуд).

Наличие этого явления, представляющего самостоятельный интерес, указывает, в частности, на то, что в присутствии силы тяжести вследствие колебаний и деформаций сосуда поведение газового пузыря может быть необычным.

Существует также родственный эффект [3], для которого обстоятельствами, имеющими решающее значение, являются присутствие силы тяжести и условие, что жидкость с газовым пузырем помещена в открытый сосуд или жидкость с газовым пузырем только частично заполняет замкнутый сосуд; при вертикальных колебаниях сосуда пузырь не всплывает и не тонет, если находится на определенной глубине, всплывает медленнее, если находится на меньшей глубине, тонет, если находится на большей глубине.

В данной работе рассматривается задача о движении газового пузыря в вязкой несжимаемой колеблющейся жидкости в присутствии силы тяжести. Как и в [1], жидкость с пузырем заполняет замкнутый колеблющийся и деформирующийся сосуд. В отличие от [1], получено решение для немалых колебаний и деформаций сосуда, но предполагается, что мало число Рейнольдса. Показано, в частности, что вследствие колебаний и деформаций сосуда газовый пузырь может всплывать быстрее, всплывать медленнее, не всплывать и не тонуть, тонуть. Важным обстоятельством является то, что реализация всех этих типов движения пузыря не ограничена условием нахождения пузыря на какой-либо определенной глубине.

1. В вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной извне поверхностью замкнутого сосуда, образованного деформируемыми твердыми стенками и жестко соединенными друг с другом абсолютно твердыми стенками, находится газовый пузырь. Сосуд совершает относительно инерциальной системы прямоугольных координат X, Y, Z заданные периодические с периодом T поступательные колебания вдоль оси Z. При этом сосуд заданным образом деформируется (сжимается и разжимается). Имеется постоянное поле силы тяжести (ускорение свободного падения $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, $g \geqslant 0$). Положение пузыря относительно системы координат X, Y, Z характеризуется радиусом-вектором

$$\mathbf{S} = \frac{1}{Q} \iiint\limits_{\Omega_{XYZ}} \mathbf{R}\, dX\, dY\, dZ,$$

где $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$; Ω_{XYZ} — область, занимаемая газом; Q — объем газа ($\mathbf{S}$ представляет собой радиус-вектор центра инерции пузыря). Течение жидкости рассматривается относительно системы прямоугольных координат $X_1 = X - S_X$, $X_2 = Y - S_Y$, $X_3 = Z - S_Z$ (S_X, S_Y, S_Z — соответственно X-, Y-, Z-компоненты вектора $\mathbf{S}$). Наименьшее расстояние от пузыря до стенок сосуда велико по сравнению с наибольшим размером пузыря, ввиду чего стенки сосуда считаются удаленными от пузыря на бесконечность. Скорость $\mathbf{V}$ течения жидкости удовлетворяет условию

$$\mathbf{V} \sim \tilde{U}\mathbf{k} - \frac{d\mathbf{S}}{dt} \quad \text{при} \quad X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \to \infty,$$

где t — время; $\tilde{U} = \mathrm{Real}\sum\limits_{m=1}^{\infty} U_m \mathrm{e}^{2m\pi i t/T}$ (U_m — постоянные); $\mathbf{k} = (0,0,1)$ ($\tilde{U}\mathbf{k}$ — скорость колебательного движения сосуда относительно системы координат X, Y, Z). В соответствии с этим давление P в жидкости удовлетворяет условию

$$P \sim -\rho\Big(\frac{d\tilde{U}}{dt} + g\Big)X_3 + \tilde{P} \quad \text{при} \quad X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \to \infty,$$

где ρ — плотность жидкости; $\tilde{P}$ — функция от t. Зависимость $\tilde{P}$ от t определяется тем, как деформируется сосуд. Предполагается, что

$$\tilde{P} = P_0 + \mathrm{Real}\sum_{m=1}^{\infty} P_m \mathrm{e}^{2m\pi i t/T}$$

(P_0 ($P_0 \geqslant 0$), P_m — постоянные). Течение жидкости является не зависящим от начальных условий. В отсутствие силы тяжести, колебаний и деформаций сосуда (при $g = 0$, $U_m = P_m = 0$ ($m = 1, 2, \ldots$)) пузырь представляет собой шар $\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \leqslant A_0$ (A_0 — постоянная), $\mathbf{V} = 0$, $P = P_0$. Давление $P_\text{г}$ в газе и объем газа связаны уравнением адиабаты

$$P_\text{г} Q^\gamma = P_{\text{г}0} Q_0^\gamma,$$

где γ — показатель адиабаты; $P_{\text{г}0} = P_0 + 2\sigma/A_0$ (σ — коэффициент поверхностного натяжения); $Q_0 = (4\pi/3)A_0^3$. Требуется найти, как пузырь движется относительно системы координат X, Y, Z, т. е. найти, как $\mathbf{S}$ зависит от t.

Пусть $\tau = t/T$; $x_1 = X_1/A_0$; $x_2 = X_2/A_0$; $x_3 = X_3/A_0$; $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$; $r = |\mathbf{r}|$; Γ — поверхность, ограничивающая область $\Omega_{x_1x_2x_3}$, занимаемую газом (свободная граница области, занимаемой жидкостью); H — средняя кривизна Γ; $\eta = A_0 H - 1$; $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к Γ; Ξ — скорость Γ в направлении $\mathbf{n}$; $\xi = T\Xi/A_0$; $\mathbf{v} = (v_i) = T\mathbf{V}/A_0$; $p = T^2(P - P_0)/(\rho A_0^2)$; $\mathbf{w} = (1/A_0)d\mathbf{S}/d\tau$; ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости; $\mathrm{Re} = A_0^2/(\nu T)$ — число Рейнольдса; $\mathbf{P}$ — тензор напряжений в жидкости; $\mathbf{I} = (I_{ij})$ — единичный тензор; $\mathbf{p} = (p_{ij}) = T^2(\mathbf{P} + P_0\mathbf{I})/(\rho A_0^2)$ ($p_{ij} = -pI_{ij} + (1/\mathrm{Re})(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$); $\hat{P}$ — наибольшее значение $|\tilde{P} - P_0|$; $\tilde{p} = (\tilde{P} - P_0)/\hat{P} = \mathrm{Real}\sum\limits_{m=1}^{\infty} p_m \mathrm{e}^{2m\pi i\tau}$; $\hat{U}$ — наибольшее значение $|\tilde{U}|$; $\tilde{u} = \tilde{U}/\hat{U} = \mathrm{Real}\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_m \mathrm{e}^{2m\pi i\tau}$; $\boldsymbol{\alpha} = (0,0,\alpha) = -T^2\mathbf{g}/A_0$; $\varepsilon = \hat{U}T/A_0$; $K = \hat{P}T/(\rho\nu)$; $\lambda = \sigma T^2/(\rho A_0^3)$; $\mu = P_{\text{г}0}T^2/(\rho A_0^2)$; $p_\text{г} = T^2(P_\text{г} - P_{\text{г}0})/(\rho A_0^2) = \mu(Q_0^\gamma/Q^\gamma - 1)$.

Уравнение поверхности Γ, уравнения Навье — Стокса и неразрывности и условия, которые должны выполняться на Γ и при $r \to \infty$, имеют следующий вид:

$$\chi = 0 \qquad (1.1)$$

$$(\chi < 0 \text{ в } \Omega_{x_1x_2x_3}, \qquad \chi > 0 \text{ вне } \Omega_{x_1x_2x_3});$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla p - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v} + \frac{d\mathbf{w}}{d\tau} + \boldsymbol{\alpha} = 0; \tag{1.2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0; \tag{1.3}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} - \xi = 0, \qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{p} + (p_{\text{г}} - 2\lambda\eta)\mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \Gamma; \tag{1.4}$$

$$\mathbf{v} \sim \varepsilon\tilde{u}\mathbf{k} - \mathbf{w}, \quad p \sim -\left(\varepsilon\frac{d\tilde{u}}{d\tau} + \alpha\right)x_3 + \frac{K}{\mathrm{Re}}\tilde{p} \quad \text{при } r\to\infty. \tag{1.5}$$

Должно выполняться также соотношение

$$\iiint\limits_{\Omega_{x_1x_2x_3}} \mathbf{r}\, dx_1dx_2dx_3 = 0 \tag{1.6}$$

(центр инерции пузыря совпадает с началом координат x_1, x_2, x_3).

2. Задача (1.1)–(1.6) при $\boldsymbol{\alpha} = 0$ $(\mathbf{g} = 0)$ поставлена и приближенно решена в [1]; там рассмотрены разложения χ, $\mathbf{v}$, p, $\mathbf{w}$ при $æ = (K/\mathrm{Re}) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ и постоянных x_1, x_2, x_3, τ, Re, λ, μ. Ниже реализуется иной подход к изучению задачи (1.1)–(1.6): рассматриваются разложения χ, $\mathbf{v}$, p, $\mathbf{w}$ при $\mathrm{Re}\to 0$ и постоянных x_1, x_2, x_3, τ, α, ε, K, λ, μ.

Предположим, что при $\mathrm{Re}\to 0$

$$\chi \sim \chi_{(0)} + \mathrm{Re}\,\chi_{(1)}, \quad \mathbf{v}\sim\mathbf{v}_{(0)} + \mathrm{Re}\,\mathbf{v}_{(1)}, \quad p \sim \frac{1}{\mathrm{Re}}p_{(0)} + p_{(1)}, \quad \mathbf{w}\sim\mathbf{w}_{(0)} + \mathrm{Re}\,\mathbf{w}_{(1)}. \tag{2.1}$$

Согласно (1.1)–(1.6), (2.1), в L-м $(L = 0,\,1)$ приближении имеем

$$\chi_{(0)} + L\mathrm{Re}\chi_{(1)} = 0 \tag{2.2}$$

— уравнение поверхности $\Gamma_{(L)}$, ограничивающей область $\Omega_{(L)}$, занимаемую газом;

$$\nabla p_{(L)} - \Delta\mathbf{v}_{(L)} = -L\left[\frac{\partial\mathbf{v}_{(0)}}{\partial\tau} + (\mathbf{v}_{(0)}\cdot\nabla)\mathbf{v}_{(0)} + \frac{d\mathbf{w}_{(0)}}{d\tau} + \boldsymbol{\alpha}\right]; \tag{2.3}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}_{(L)} = 0; \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}\lim_{\mathrm{Re}\to 0}\left[\mathrm{Re}^{-L}(\mathbf{n}_{(L)}\cdot\mathbf{v} - \xi_{(L)})\Big|_{\Gamma_{(L)}}\right] = 0,\\ \lim_{\mathrm{Re}\to 0}\left\{\mathrm{Re}^{1-L}[\mathbf{n}_{(L)}\cdot\mathbf{p} + (p_{\text{г}(L)} - 2\lambda\eta_{(L)})\,\mathbf{n}_{(L)}]\Big|_{\Gamma_{(L)}}\right\} = 0;\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{v}_{(L)} \sim (1-L)(\varepsilon\tilde{u}\mathbf{k} - \mathbf{w}_{(0)}) - L\mathbf{w}_{(1)},\\ p_{(L)} \sim (1-L)\,K\tilde{p} - L\left(\varepsilon\frac{d\tilde{u}}{d\tau} + \alpha\right)x_3 \quad \text{при } r\to\infty;\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\iiint\limits_{\Omega_{(L)}} \mathbf{r}\, dx_1dx_2dx_3 = 0, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{n}_{(L)}$, $\eta_{(L)}$, $\xi_{(L)}$, $p_{\text{г}(L)}$ — соответственно $\mathbf{n}$, η, ξ, $p_{\text{г}}$ при $\Gamma = \Gamma_{(L)}$.

Пусть $L = 0$. В нулевом приближении вследствие деформаций сосуда происходит отличное от нуля изменение объема пузыря, но из-за колебаний сосуда и действия силы тяжести не может происходить перемещение пузыря с отличной от нуля скоростью относительно находящейся на бесконечности жидкости; пузырь представляет собой шар $r \leqslant 1 + a_{(0)}$, центр которого движется со скоростью $\tilde{U}\mathbf{k}$ относительно системы координат X, Y, Z, течение жидкости симметрично относительно начала координат x_1, x_2, x_3.

Соотношение (2.7) выполняется. Задача (2.2)–(2.7) имеет решение

$$\chi_{(0)} = r - 1 - a_{(0)}; \tag{2.8}$$

$$\mathbf{v}_{(0)} = (1 + a_{(0)})^2 \frac{da_{(0)}}{d\tau} \frac{\mathbf{r}}{r^3}; \tag{2.9}$$

$$p_{(0)} = K\tilde{p}; \tag{2.10}$$

$$\mathbf{w}_{(0)} = w_{(0)}\mathbf{k}. \tag{2.11}$$

Здесь $w_{(0)} = \varepsilon\tilde{u}$;

$$a_{(0)} = -1 + C \exp\Big(-\frac{1}{4} K \int\limits_{\tau_*}^{\tau} \tilde{p}\, d\tau\Big) \tag{2.12}$$

(τ_* — постоянная, $C = 1 + a_{(0)}\big|_{\tau=\tau_*}$ ($C > 0$)). Постоянная C при рассмотрении нулевого приближения не определяется.

Пусть $L = 1$. Предположим, что в первом приближении пузырь представляет собой шар $r \leqslant 1+a_{(0)}+\mathrm{Re}\, a_{(1)}$. Тогда соотношение (2.7) выполняется, условия (2.5), (2.6) сводятся к условиям

$$v_{(1)r} - 2(1 + a_{(0)})^2 \frac{da_{(0)}}{d\tau} \frac{a_{(1)}}{r^3} - \frac{da_{(1)}}{d\tau} = 0,$$

$$-p_{(1)} + 2\frac{\partial v_{(1)r}}{\partial r} + a_{(1)} \frac{\partial}{\partial r}\Big(-p_{(0)} + 2\frac{\partial v_{(0)r}}{\partial r}\Big) + \mu[(1 + a_{(0)})^{-3\gamma} - 1] + 2\lambda \frac{a_{(0)}}{1 + a_{(0)}} = 0, \tag{2.13}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v_{(1)r}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{(1)\theta}}{\partial r} - \frac{v_{(1)\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial v_{(1)\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_{(1)r}}{\partial \varphi} - \frac{v_{(1)\varphi}}{r} = 0 \quad \text{при } r = 1 + a_{(0)},$$

где θ — угол между векторами $(0,0,1)$ и (x_1,x_2,x_3) $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$; φ — угол между векторами $(1,0,0)$ и $(x_1,x_2,0)$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ (r, θ, φ — сферические координаты); $v_{(1)r}$, $v_{(1)\theta}$, $v_{(1)\varphi}$ — соответственно r-, θ-, φ-компоненты вектора $\mathbf{v}_{(1)}$. Задача (2.3), (2.4), (2.6), (2.13) имеет решение

$$v_{(1)r} = \frac{d[(1 + a_{(0)})^2 a_{(1)}]/d\tau}{r^2} + w_{(1)}\Big(\frac{1 + a_{(0)}}{r} - 1\Big)\cos\theta,$$

$$v_{(1)\theta} = w_{(1)}\Big(1 - \frac{1 + a_{(0)}}{2r}\Big)\sin\theta, \qquad v_{(1)\varphi} = 0, \tag{2.14}$$

$$p_{(1)} = w_{(1)}(1 + a_{(0)})\frac{\cos\theta}{r^2} - \Big(\varepsilon\frac{d\tilde{u}}{d\tau} + \alpha\Big) r\cos\theta + r\frac{\partial v_{(0)r}}{\partial r} - \frac{1}{2} v_{(0)r}^2;$$

$$\mathbf{w}_{(1)} = w_{(1)}\mathbf{k}. \tag{2.15}$$

Здесь

$$w_{(1)} = \frac{1}{3}\Big(\varepsilon\frac{d\tilde{u}}{d\tau} + \alpha\Big)(1 + a_{(0)})^2;$$

$$a_{(1)} = (1 + a_{(0)})\Big\{\Big[\frac{a_{(1)}}{1 + a_{(0)}} + \frac{1}{4}(1 + a_{(0)})\frac{da_{(0)}}{d\tau}\Big]\Big|_{\tau=\tau_{**}} - \frac{1}{4}(1 + a_{(0)})\frac{da_{(0)}}{d\tau} + \int\limits_{\tau_{**}}^{\tau} f\, d\tau\Big\}$$

$$\Big(\tau_{**} \text{ — постоянная}, \ f = \frac{1}{4}\Big\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{da_{(0)}}{d\tau}\Big)^2 + \mu[(1 + a_{(0)})^{-3\gamma} - 1] + 2\lambda\frac{a_{(0)}}{1 + a_{(0)}}\Big\}\Big).$$

Таким образом, $\chi_{(1)} = -a_{(1)}$ и решение (2.14), (2.15) задачи (2.3), (2.4), (2.6), (2.13) являются решением задачи (2.2)–(2.7).

Согласно (2.12), величина f — периодическая с периодом 1 функция от τ. Величина $a_{(1)}$ должна быть ограниченной функцией от τ. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\int\limits_{\tau}^{\tau+1} f\,d\tau = 0. \tag{2.16}$$

В соответствии с (2.12), (2.16) имеем

$$c_1 C^{3\gamma+2} + c_2 C^{3\gamma} + c_3 C^{3\gamma-1} = c_4, \tag{2.17}$$

где

$$c_1 = \int\limits_{\tau}^{\tau+1} \left(\frac{dh}{d\tau}\right)^2 d\tau; \quad c_2 = \mu - 2\lambda; \quad c_3 = 2\lambda \int\limits_{\tau}^{\tau+1} h^{-1} d\tau; \quad c_4 = \mu \int\limits_{\tau}^{\tau+1} h^{-3\gamma}\,d\tau$$

$$\left(h = \exp\left(-\frac{1}{4} K \int\limits_{\tau_*}^{\tau} \tilde{p}\,d\tau\right)\right).$$

Левая часть (2.17) равна нулю при $C = 0$, а при $C > 0$ положительна и монотонно неограниченно возрастает с увеличением C; правая часть (2.17) положительна и не изменяется при изменении C. Из этого следует, что существует и единственно положительное значение C, которое удовлетворяет равенству (2.17). Таким образом, постоянная C находится при рассмотрении первого приближения.

3. Используя (2.11), (2.15), получим

$$\mathbf{S} = A_0 \int\limits_0^{\tau} \left(w_{(0)} + \operatorname{Re} w_{(1)}\right) d\tau\ \mathbf{k} + \mathbf{s}_0, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{s}_0$ — постоянная. Соотношением (3.1) приближенно определяется зависимость $\mathbf{S}$ от t.

Из (3.1), в частности, следует, что пузырь движется вдоль оси Z, и его движение состоит из колебаний и перемещения с постоянной скоростью

$$\overline{\mathbf{W}} = \overline{W}\mathbf{k}, \tag{3.2}$$

где

$$\overline{W} = \frac{A_0 \mathrm{Re}}{3T} \int\limits_{\tau}^{\tau+1} \left(\varepsilon \frac{d\tilde{u}}{d\tau} + \alpha\right)(1 + a_{(0)})^2\,d\tau.$$

В соответствии с (3.2), если $\mathbf{g} \neq 0$, то пузырь всплывает при

$$\overline{W} > 0,$$

тонет при

$$\overline{W} < 0,$$

не всплывает и не тонет при

$$\overline{W} = 0,$$

всплывает быстрее, чем в отсутствие колебаний и деформаций сосуда, при

$$\int\limits_{\tau}^{\tau+1}\Big(\varepsilon\,\frac{d\tilde{u}}{d\tau}+\alpha\Big)(1+a_{(0)})^2\,d\tau>\alpha.$$

всплывает медленнее, чем в отсутствие колебаний и деформаций сосуда, при

$$0<\int\limits_{\tau}^{\tau+1}\Big(\varepsilon\,\frac{d\tilde{u}}{d\tau}+\alpha\Big)(1+a_{(0)})^2\,d\tau<\alpha.$$

4. Проведем сопоставление найденного выше выражения (3.2) для скорости перемещения пузыря с выражением для скорости перемещения пузыря, полученным в [1].

Положим $\mathbf{g}=0$. Пусть

$$\langle\mathbf{w}\rangle=\int\limits_{\tau}^{\tau+1}\mathbf{w}\,d\tau. \tag{4.1}$$

Согласно (3.1), (3.2), (4.1), имеем

$$\langle\mathbf{w}\rangle\sim\mathrm{Re}\langle\mathbf{w}\rangle_{\mathrm{Re}}\ \text{ при }\ \mathrm{Re}\to0\ \ (\text{и постоянных }\ K,\ \varepsilon,\ \lambda,\ \mu), \tag{4.2}$$

где

$$\langle\mathbf{w}\rangle_{\mathrm{Re}}=\frac{1}{3}\,\varepsilon\int\limits_{\tau}^{\tau+1}\frac{d\tilde{u}}{d\tau}\,(1+a_{(0)})^2\,d\tau\,\mathbf{k}=\frac{T}{A_0\mathrm{Re}}\,\overline{\mathbf{W}}. \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует, что

$$\langle\mathbf{w}\rangle_{\mathrm{Re}}\sim K\langle\mathbf{w}\rangle_{K,\mathrm{Re}}\ \text{ при }\ K\to0\ \ (\text{и постоянных }\ \mathrm{Re},\ \varepsilon,\ \lambda,\ \mu), \tag{4.4}$$

где

$$\langle\mathbf{w}\rangle_{K,\mathrm{Re}}=\frac{1}{12}\,\varepsilon\,\mathrm{Real}\sum_{m=1}^{\infty}p_m^*u_m\mathbf{k} \tag{4.5}$$

(p_m^* — постоянные, комплексно-сопряженные с p_m). Из (4.5) очевидно, что

$$\langle\mathbf{w}\rangle_{K,\mathrm{Re}}\sim\varepsilon\langle\mathbf{w}\rangle_{\varepsilon,K,\mathrm{Re}}\ \text{ при }\ \varepsilon\to0\ \ (\text{и постоянных }\ \mathrm{Re},\ K,\ \lambda,\ \mu), \tag{4.6}$$

где

$$\langle\mathbf{w}\rangle_{\varepsilon,K,\mathrm{Re}}=\frac{1}{12}\,\mathrm{Real}\sum_{m=1}^{\infty}p_m^*u_m\mathbf{k}.$$

В соответствии с (4.2), (4.4), (4.6) выполняется соотношение $\langle\mathbf{w}\rangle\sim\mathrm{Re}K\varepsilon\langle\mathbf{w}\rangle_{\varepsilon,K,\mathrm{Re}}$ при $\varepsilon\to0$ (и постоянных Re, K, λ, μ), $K\to0$ (и постоянных Re, ε, λ, μ), $\mathrm{Re}\to0$ (и постоянных K, ε, λ, μ). В [1] получено выражение $(A_0/T)\,\varepsilon æ\bar{w}\mathbf{k}$ для скорости перемещения пузыря. Согласно изложенному в [1], величина $\varepsilon æ\bar{w}\mathbf{k}$ представляет собой главный член $\varepsilon æ\langle\mathbf{w}\rangle_{æ,\varepsilon}$ разложения $\langle\mathbf{w}\rangle$ при $æ=(K/\mathrm{Re})\to0$ (и постоянных Re, ε, λ, μ), $\varepsilon\to0$ (и постоянных Re, $æ$, λ, μ). Нетрудно убедиться в том, что главный член разложения $\varepsilon æ\langle\mathbf{w}\rangle_{æ,\varepsilon}$ при $\mathrm{Re}\to0$ (и постоянных K, ε, λ, μ) совпадает с $\mathrm{Re}\,K\varepsilon\langle\mathbf{w}\rangle_{\varepsilon,K,\mathrm{Re}}$. Это дает основание считать, что подвергнутые сопоставлению выражения для скорости перемещения пузыря находятся в соответствии друг с другом.

5. Проведенное исследование позволяет, в частности, сделать следующий вывод. Если колебания и деформации сосуда таковы, что пузырь не всплывает и не тонет, то вследствие осуществления дополнительных колебаний сосуда (вдоль надлежаще ориентированной оси) пузырь может перемещаться в любом заданном направлении. Таким образом, под явлением преимущественно однонаправленного движения газового пузыря в вибрирующей жидкости может пониматься более объемлющее явление, состоящее в том, что вследствие колебаний и деформаций сосуда пузырь перемещается в любом заданном направлении как в отсутствие, так и в присутствии силы тяжести.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сенницкий В. Л.** О движении газового пузыря в вязкой вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1988. № 6. С. 107–113.
2. **Сенницкий В. Л.** Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.
3. **Bleich H. H.** Effect of vibrations on the motion of small gas bubbles in a liquid // Jet Propultion. 1956. V. 26, N 11. P. 958–964, 978.

Поступила в редакцию 1/III 1996 г.