

ре представлена зависимость амплитуд максимального значения массового расхода для x - и z -компонент волны Толлмина — Шлихтинга (кривые 1 и 2 соответственно) в зависимости от угла $\psi = \arctg(\beta/\alpha)$ в случае резонансного режима возбуждения при частоте возмущения 500 Гц. Численные значения приведены в размерном виде на 1 м амплитуды вибрации поверхности. Из результатов, представленных на фигуре, следует, что в случае резонансного режима возбуждения волны Толлмина — Шлихтинга значение амплитуды вибрации $\sim 10^{-6}$ м дает амплитуду пульсаций в неустойчивой волне $\sim 1\%$.

Поступила 30 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигулев В. Н. Проблема определения критических чисел Рейнольдса перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. — В кн.: Механика неоднородных сред. Новосибирск: изд. ИТПМ СО АН СССР, 1981.
2. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982.
3. Тумин А. М., Федоров А. В. Возбуждение волн неустойчивости в пограничном слое на вибрирующей поверхности. — ПМТФ, 1983, № 3.
4. Nayfeh A. H. Stability of three-dimensional boundary layers. — AIAA J., 1980, vol. 18, N 4.
5. Сидоренко Н. В., Тумин А. М. Гидродинамическая устойчивость течений в пограничном слое сжимаемого газа. — В кн.: Механика неоднородных сред. Новосибирск: изд. ИТПМ СО АН СССР, 1981.
6. Ганонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980.
7. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Физматгиз, 1962.
8. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: ИЛ, 1962.
9. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — УМН, 1961, т. 16, вып. 3.

УДК 532.517.4

СТРУКТУРЫ И ИХ ЭВОЛЮЦИЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ СДВИГОВОМ СЛОЕ

Г. А. Кузьмин, О. А. Лихачев, А. З. Паташинский

(Новосибирск)

1. Введение. С математической точки зрения турбулентное движение жидкости представляется результатом возбуждения многих сильно взаимодействующих степеней свободы. При этом в движении этих степеней свободы нет ни полного хаоса (что позволило бы использовать простые статистические модели), ни полной когерентности. Исследования последнего времени (см., например, [1—3]) делают все более правдоподобной идею, что многие турбулентные течения представляют собой систему взаимодействующих и весьма устойчивых волновых пакетов — вихревых структур. Часто наблюдаемая пространственная разделенность структур свидетельствует, что их взаимодействие не уничтожает возможности рассматривать структуру как некоторую «единицу» турбулентности.

По-видимому, нет единого механизма образования структур в различных турбулентных течениях. Широко известные диссипативные структуры представляются совместным продуктом нелинейности и диссипации. Например, ячейки Бенара в конвективных течениях и вихри Тейлора в круговом течении Куэтта возникают и существуют в ограниченном диапазоне отношений нелинейности к диссипации. В свободных турбулентных течениях — струях, следах и в слоях смешения диссипация не играет видимой роли в образовании структур. Можно полагать, что за существование структур в этих, эффективно невязких течениях ответственны некоторые локальные

интегралы движения. Длительное существование структур естественно приводит к идее установления в них внутреннего статистического равновесия [4—6]. Как было показано в [7, 8], в идеальной жидкости могут образовываться и неограниченно долго существовать изолированные статистически равновесные структуры из двумерных точечных вихрей. Предположение о близости структур, образующих турбулентность, к статистически равновесным заметно упрощает описание и используется ниже при анализе течения в сдвиговом слое. Поэтому мы предварим этот анализ кратким изложением основных идей статистической механики системы двумерных точечных вихрей [7, 8].

Движение двумерной системы из n одинаковых точечных вихрей интенсивности Γ в безграничном пространстве описывается системой уравнений Гамильтона [9]. Роль гамильтониана играет внутренняя энергия системы — доля полной кинетической энергии, зависящая от положения вихрей [9],

$$(1.1) \quad E = -\frac{\Gamma^2}{2\pi} \sum_{i < j} \ln |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|,$$

где $\mathbf{r}_i$ — координата (двумерная) i -го вихря. Предполагается (и это предположение подтверждается численными расчетами), что с течением времени гамильтонова вихревая система релаксирует к состоянию статистического равновесия, которое описывается микроканоническим распределением Гиббса. Считается, что это распределение полностью определяется интегралами движения — координатами центра завихренности $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{r}_i/n$, моментом импульса, пропорциональным [9] величине

$$(1.2) \quad L^2 = \frac{1}{n} \sum_i |\mathbf{r}_i - \mathbf{R}|^2,$$

и внутренней энергией (1.1). Величина L определяет масштаб рассматриваемой вихревой структуры. Форма структуры определяется безразмерной одночастичной функцией распределения $\tilde{P}$, относительно которой в [8] выведено обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(1.3) \quad \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d \ln \tilde{P}}{d\eta} \right) = -4(1 + \lambda) + 8\pi \lambda \tilde{P},$$

где $\eta = r/L$. Решения этого уравнения определяются единственным параметром — безразмерной температурой микроканонического ансамбля ($1/\lambda$), либо однозначно с ней связанной безразмерной внутренней энергией $\tilde{E}$

$$(1.4) \quad E = n^2 \Gamma^2 \left(\tilde{E} - \frac{1}{4\pi} \ln L \right).$$

Естественно применить эту теорию для описания структур в турбулентных слоях смешения и в сдвиговых слоях, где они близки к двумерным вихрям [10—12]. Картина эволюции сдвигового слоя особенно наглядно представлена результатами численного моделирования в [6], где начальное распределение завихренности в сдвиговом слое моделировалось системой точечных вихрей. На каждой временной стадии сдвиговой слой представляет собой цепочку структур, внутри которых точечные вихри организованы в подструктуры. Наблюдается каскадное слияние структур, которое, как и в экспериментах [10—12], происходит в основном парами. В [6] рассмотрена простейшая модель эволюции сдвигового слоя — линейная цепочка попарно-сливающихся равновесных структур. Пренебрегая полностью влиянием остальной системы на пару сливающихся вихрей и постулируя сохранение энергии и момента импульса, авторы получают основные характеристики эволюции.

В данной работе рассмотрена общая картина эволюции сдвигового слоя, наблюдаемая в экспериментах и при численном моделировании. Изучены две модели, простейшая из которых аналогична модели [6]. Рассмотрена более правдоподобная модель слияния, и, в частности, учитывается влияние соседей на образующуюся структуру, а также несохранение момента импульса. Цель данной работы — получить соотношения между основными параметрами сдвигового слоя.

2. Постановка задачи и простая модель. Под когерентными структурами обычно понимают завихренность, организованную в когерентные сгустки. Поле скорости находится по известной завихренности с точностью до потенциальной составляющей, которая определяется граничными условиями. Поэтому эволюцию турбулентных течений удобно изучать в терминах распределения завихренности. В двумерной задаче завихренность подобна плотности заряда, а точечные вихри движутся подобно двумерным заряженным частицам в сильном магнитном поле, согласно уравнениям дрейфовой теории.

Пусть в начальный момент времени завихренность в неограниченной невязкой жидкости равномерно распределена в полосе ширины δ вблизи оси абсцисс. Хорошо известно, что такое распределение завихренности неустойчиво по отношению к возмущениям с длиной волны $D \gtrsim \delta$. Время развития неустойчивости пропорционально D , и развитие возмущений носит иерархический характер. Вначале вследствие развития наиболее опасной неустойчивости быстро образуется линейная цепочка вихревых структур типа «кошачий глаз». Дальнейшая эволюция сдвигового слоя происходит путем слияния этих структур.

Для анализа процесса используем конечномерную аппроксимацию завихренности. Выделим в бесконечном сдвиговом слое отрезок длины $2A$, а остальную часть заменим фиксированной вихревой пеленой той же интенсивности. Заданная вихревая пелена создает внешнее поле для выделенного отрезка слоя и препятствует его скручиванию в спираль. Завихренность в выделенном отрезке слоя заменим большим, но конечным числом M точечных вихрей интенсивности Γ . Вопрос о возможности моделирования непрерывной системы системой дискретных точечных вихрей рассмотрен в [13], где показано, что для изучаемой задачи такое моделирование возможно. В конечных формулах производится предельный переход $M \rightarrow \infty$, $A \rightarrow \infty$, $M\Gamma/A = \text{const}$. Движение системы M точечных вихрей в заданном внешнем поле описывается системой уравнений Гамильтона с гамильтонианом [9]

$$(2.1) \quad H = -\frac{\Gamma^2}{2\pi} \sum_{i < j} \ln |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| + \Gamma \sum_i \psi(\mathbf{r}_i),$$

где ψ — функция тока внешнего поля. В нашем случае

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\Delta z}{4\pi} \left\{ (A+x) \ln \left[\left(1 + \frac{x}{A}\right)^2 + \frac{y^2}{A^2} \right] + (A-x) \ln \left[\left(1 - \frac{x}{A}\right)^2 + \frac{y^2}{A^2} \right] \right\},$$

Δu — скачок скорости на вихревой пелене. Величина H в силу уравнений движения не изменяется во времени и называется в дальнейшем энергией.

Взаимодействие удаленных вихрей вносит самый большой вклад в величину полной энергии H в формуле (2.1). Легко понять, однако, что эффективный радиус взаимодействия конечен. Основным механизмом эволюции сдвигового слоя является неустойчивость Гельмгольца. Масштаб $D(t)$, на котором за время t успевает развиться неустойчивость, есть $D(t) \sim t$. Такого же порядка и когерентные смещения вихрей $\Delta r(t) \sim t$. Для больших расстояний логарифм в (2.1) можно представить в виде ряда по смещениям. Не зависящий от времени $\ln |\mathbf{r}_{ij}(0)|$ приводит к неаддитивной по длине слоя константе в H . Параметры поля вихревой пелены определены условием сохранения формы слоя в виде линии. Как следствие главная часть линейного по смещениям члена взаимно уничтожается с вкладом вихревой пелены. Остальная часть H пропорциональна длине сдвигового слоя. Радиус взаимодействия, даваемый этой частью, порядка $D(t)$ и играет роль зависящего от времени характерного масштаба эволюционирующего сдвигового слоя.

Масштаб D можно считать равным характерному расстоянию между структурами. Сдвиговой слой может иметь другие характерные масштабы, например радиус структур ρ . Если, однако, предположить, что динамика слоя полностью контролируется неустойчивостью Гельмгольца, то все эти масштабы в пределе $t \rightarrow \infty$ должны быть пропорциональны D . Это означает, что сдвиговой слой асимптотически автомоделен. Возникновение свойств автомодельности наглядно демонстрируется в рассматриваемых ниже моделях.

В определении общей картины эволюции структур важную роль играет величина безразмерного параметра перемежаемости $\Delta = D/(2\rho)$. Если параметр Δ велик, то, как отмечалось в [14, 6, 15] и др., взаимодействие между структурами в сильно нелинейных системах слабое. Форма структуры определяется ее внутренней нелинейностью и слабо зависит

от взаимодействия с окружением. В сдвиговом слое, как показывают эксперименты [11] и расчеты [6], диаметр структур в несколько раз меньше среднего расстояния между ними. Это позволяет надеяться, что основные характеристики слоя могут быть определены с помощью разложения по параметру Δ^{-1} . В нулевом приближении по Δ^{-1} взаимодействие считается существенным лишь при сближениях структур и выражается в их слияниях. В промежутках между слияниями взаимодействие структур сводится к взаимному переносу центров тяжести. Считается, что в координатах центра тяжести гамильтонова подсистема — вихревая структура — является замкнутой, а ее состояние быстро эволюционирует к статистическому равновесию. Статистически равновесные структуры определяются двумя параметрами — внутренней энергией и моментом импульса. Поэтому существенную информацию о динамике сдвигового слоя можно получить из законов сохранения.

Изучим следствия законов сохранения в простой модели сдвигового слоя. Предполагается, что после развития наиболее опасной неустойчивости Гельмгольца в однородном сдвиговом слое образовалась линейная цепочка структур. Рассматривается модель, в которой структуры сливаются парами, образуя после m -го каскада слияний линейную цепочку из $2N_m$ структур (фиг. 1). Радиус структур ρ_m предполагается малым по сравнению с расстоянием между ними $D_m = 2^m D_0$. В этом случае энергию (2.1) можно записать в виде

$$H = 2N_m E_m - \frac{n_m^2 \Gamma^2}{4\pi} \sum_{i \neq j} \ln D_{ij} + n_m \Gamma \sum_i \psi(R_i).$$

Здесь E_m — внутренняя энергия структур (1.1); $R_i = D_m(i + 1/2)$; $i = -N_m, -N_m + 1, \dots, N_m - 1$; $D_{ij} = |R_i - R_j|$; n_m — число точечных вихрей в каждой структуре. Удобно представить H как сумму энергий взаимодействия пар структур с номерами $2k, 2k + 1$ и $2k', 2k' + 1$, где k, k' пробегает значения $-N_m/2, -N_m/2 + 1, \dots, N_m/2 - 1$:

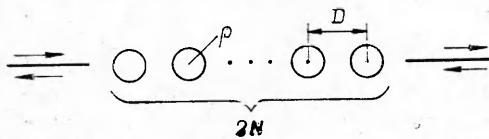
$$(2.2) \quad H = \sum_k \left\{ 2E_{\tau k} - \frac{n_m^2 \Gamma^2}{2\pi} \ln D_{\tau k} - \frac{n_m^2 \Gamma^2}{4\pi} \sum_{k'} \ln \{ 4(k' - k)^2 [4(k' - k)^2 - 1] D_m^4 \} + n_m \Gamma \{ \psi[(2k + 1/2) D_m] + \psi[(2k + 3/2) D_m] \} \right\}.$$

Полная энергия после попарных слияний запишется в виде

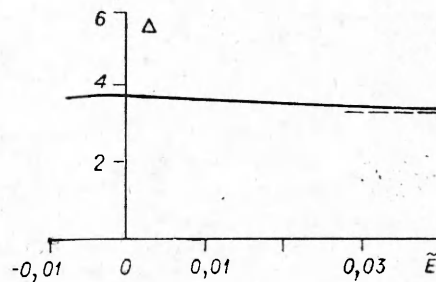
$$(2.3) \quad H = \sum_k \left\{ 2E_{m+1} - \frac{4n_m^2 \Gamma^2}{4\pi} \sum_{k'} \ln(2|k' - k| D_m) + 2n_m \Gamma \psi[(2k + 1) D_m] \right\}.$$

Правые части (2.2), (2.3) содержат большой неаддитивный вклад, связанный с дальнедействием кулоновского потенциала. Этот вклад, как отмечалось выше, не зависит от времени и одинаков в (2.2), (2.3). Поэтому, приравняв правые части (2.2), (2.3), для E_{m+1} получаем сходящееся в пределе $A \rightarrow \infty$ выражение

$$(2.4) \quad E_{m+1} = 2E_{\tau k} - \frac{n_m^2 \Gamma^2}{2\pi} \times \\ \times \ln \left[D_{\tau k} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4p^2} \right) \right] = 2E_m - \\ - \frac{n_m^2 \Gamma^2}{2\pi} \ln \frac{2D_m}{\pi}.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

С учетом (1.4) отсюда следует рекуррентная формула для безразмерной энергии

$$(2.5) \quad \frac{D_{m+1}}{2L_{m+1}} \frac{\exp(4\pi\tilde{E}_{m+1})}{\pi} = \left[\frac{D_m}{2L_m} \frac{\exp(4\pi\tilde{E}_m)}{\pi} \right]^{1/2}.$$

Отсюда видно, что в пределе $m \rightarrow \infty$ величина параметра $D/(2L)$ определяется лишь величиной безразмерной энергии

$$(2.6) \quad D_\infty/(2L_\infty) = \pi \exp(-4\pi\tilde{E}_\infty).$$

Величина L — среднеквадратичный радиус структуры (см. (1.2)). Если значения $\tilde{E}$ не слишком велики, L определяет размер структуры. При больших $\tilde{E}$ распределение завихренности становится все более пикообразным [8]. Концентрированное ядро завихренности оказывается окруженным обширной разреженной «атмосферой» из точечных вихрей. Величина L определяет при больших $\tilde{E}$ радиус этой атмосферы. Естественно поэтому принять за размер равновесной структуры не величину L , а средний радиус

$$\rho = \int r P(r) d^2r,$$

где $P(r)$ — равновесная одночастичная функция распределения. Соответственно параметр

$$(2.7) \quad D/(2\rho) = \Delta(\tilde{E}) = \frac{\pi}{\eta} \exp(-4\pi\tilde{E}),$$

где $\eta = \rho/L$ определяет перемежаемость сдвигового слоя. Зависимость $\Delta(\tilde{E})$ можно получить численно, решая уравнение (1.3). Соответствующий график приведен на фиг. 2. Штриховой линией обозначено асимптотическое значение $\Delta(\infty)$, равное $2\sqrt{e} \approx 3,3$. Минимально возможное $\tilde{E}$ отвечает столообразному распределению завихренности [8] и равно $(2 \ln 2 - 1)/(16\pi) \approx -0,008$. График иллюстрирует весьма слабую зависимость Δ от $\tilde{E}$. Относительное отличие максимального значения Δ от минимального составляет всего 0,14. Таким образом, предельное значение параметра перемежаемости с относительной точностью 0,14 определяется из одного лишь закона сохранения энергии.

Чтобы завершить вычисление параметров модели, надо получить рекуррентную формулу для внутреннего момента импульса. Гамильтониан (2.1) не инвариантен относительно вращений, и полный момент импульса цепочки не сохраняется. Поэтому невозможно получить требуемую формулу с помощью рассуждений, подобных использованным при выводе (2.4). Мы учтем несохранение импульса, сделав простое предположение, которое основано на наблюдаемой картине слияния структур в сдвиговых слоях.

Траектории структур в сдвиговых слоях качественно похожи на траектории точечных вихрей в линейной цепочке после потери неустойчивости [16]. Развитие наиболее опасной неустойчивости приводит к попарному относительному вращению точечных вихрей по траекториям

$$\operatorname{ch} \frac{\pi Y}{D} - \cos \frac{\pi X}{D} = 2,$$

где X, Y — относительные координаты пары вихрей. Вихри сближаются до минимального расстояния, равного $0,56D$, а затем вновь удаляются. В сдвиговых слоях структуры быстро сливаются, сблизившись до некоторого минимального расстояния a . Предположим, что $a = \alpha D$, где $1 < \alpha \leq 0,56$, и пренебрежем изменением момента импульса пары в процессе самого слияния. Приравняем момент импульса получившейся структуры моменту импульса пары непосредственно перед слиянием. Используя (1.2), имеем

$$(2.8) \quad L_{m+1}^2 = L_m^2 + \frac{1}{4} \alpha^2 D^2;$$

$$(2.9) \quad \frac{D_m}{2L_m} = \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \left[1 + \frac{1}{2^{2m}} \left(\frac{12L_0^2}{\alpha^2 D_0^2} - 1 \right) \right]^{1/2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{\alpha}.$$

Из (2.6) получаем предельное значение безразмерной энергии структуры

$$(2.10) \quad \tilde{E}_\infty = -\frac{1}{8\pi} \ln [3/(\alpha^2 \pi^2)].$$

Рассмотрим два случая. При $\alpha = 0,56$ $\tilde{E} = 0,0012$, а при $\alpha = 1$ $\tilde{E} = 0,047$. Отсюда видно, что величина численного параметра сильно влияет на значение $\tilde{E}$, определяющее форму равновесных структур. Однако важный параметр $D/(2L)$ зависит от α не столь сильно, а параметр Δ зависит от α еще слабее (см. фиг. 2).

Рекуррентная формула для L^2 (2.8) при $\alpha = 1$ совпадает с исследованной в [6]. Значение безразмерной энергии (2.10) в этом случае в несколько раз отличается от полученного в [6]. Отличие связано с тем, что в [6] не учитывалось влияние соседей на сливающуюся пару.

3. Модель сдвигового слоя — цепочка кластеров. Численные расчеты [6] показывают, что вихревые структуры не находятся в полном статистическом равновесии. Более адекватным является представление о вихревой структуре как о связанном состоянии нескольких равновесных подструктур. Легко понять возможную причину появления таких связанных состояний. Время развития неустойчивости на двойном масштабе лишь в 2 раза больше, чем время развития наиболее опасной неустойчивости. Поэтому в цепочке из пар вихрей может возбудиться неустойчивость следующего порядка прежде, чем произойдет релаксация внутри пар, и образуются связанные кластеры из трех, четырех и более подструктур. Изолированная система из трех вихрей совершает весьма сложное [17, 18], а из четырех — стохастическое движение [19]. Естественно ожидать, что с увеличением в кластере числа подструктур, вероятность их сближения и слияния увеличивается. Поэтому в эволюционирующем слое число структур флуктуирует вблизи некоторого оптимального значения.

Рассмотрим модель сдвигового слоя — линейную цепочку из одинаково ориентированных кластеров, каждый из которых состоит из нескольких статистически равновесных подструктур. Рекуррентные формулы и предельные соотношения для такой модели могут быть выведены вполне аналогично тому, как это было сделано выше для простейшей модели. В процессе эволюции сдвигового слоя число подструктур в кластере меняется от некоторого минимального до некоторого максимального. Моменты времени, для которых выводятся формулы, можно всегда выбрать таким образом, чтобы их число было минимально. Рассмотрим для конкретности случай, когда это число равно двум, т. е. реализуется следующий цикл слияний. Вихревые пары сближаются, и образуются кластеры из четырех равновесных подструктур. Затем внутри четверок происходят парные слияния и образуются пары следующего поколения. Пусть расстояние между вихрями пары после m каскадов парных слияний равно d_m , расстояние между кластерами D_m , угол наклона вихревых пар к плоскости $y = 0$ равен χ_m . Радиус подструктур считается малым по сравнению со всеми прочими размерами. Простые, но несколько громоздкие вычисления, аналогичные проделанным выше при выводе (2.5), (2.6), дают в пределе $m \rightarrow \infty$ соотношение между параметрами структур

$$(3.1) \quad \frac{d}{2\rho} = \frac{2\Delta(\tilde{E})}{\pi} \frac{\pi d}{D} \left[\sin^2 \left(\frac{\pi d}{D} \cos \chi \right) + \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\pi d}{D} \sin \chi \right) \right]^{1/2}.$$

Для изученных простых моделей сдвигового слоя после достаточно большого количества слияний дальнейшая эволюция сдвигового слоя оказалась автомодельной. Форма структур и величина безразмерных параметров сдвигового слоя, образовавшегося после свертывания вихревой

пелены, могут значительно отличаться от автомодельных. Скорость стремления безразмерных параметров к их автомодельным значениям не одинакова для различных параметров. Согласно (2.9), в простейшей из рассмотренных моделей параметр $D/(2L)$ принимает свое автомодельное значение, равное $\sqrt{3}/\alpha$ за 1—2 слияния, и в дальнейшем L увеличивается при каждом слиянии в 2 раза. Релаксация параметра $D/(2\rho)$ происходит несколько медленнее. Этот факт следует учитывать при анализе данных экспериментов, так как структуры в наблюдаемых и рассчитываемых слоях смещения обычно успевают произвести лишь несколько слияний. Например, в расчетах [6] наблюдалось около четырех каскадов слияний.

Подчеркнем еще раз, что интервал изменения функции Δ в формулах (2.7), (3.1) узок. Этот факт можно использовать и при построении более сложных моделей сдвигового слоя и слоя смещения. Выбор конкретной модели должен диктоваться дополнительной информацией о форме структур. Можно надеяться, что такая информация будет получена в будущих экспериментах.

Поступила 13 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Townsend A. A. The structure of turbulent shear flow. Cambridge et al.: Cambridge University Press, 1976.
2. Structure and mechanisms of turbulence. I, II. Berlin et al.: Springer-Verlag, 1978. (Lecture Notes in Physics, vol. 75, 76).
3. The role of coherent structures in modelling turbulence and mixing. Berlin: Springer-Verlag, 1981. (Lecture Notes in Physics, vol. 136).
4. Roberts K. V., Christiansen J. P. Topics in computational fluid mechanics.— Computer Physics Communications, 1972, vol. 3, supplement.
5. Saffman P. G., Baker G. R. Vortex interactions.— Annu. Rev. Fluid Mech., 1979, vol. 11, N 4.
6. Aref H., Siggia E. D. Vortex dynamics of the two — dimensional turbulent shear layer.— J. Fluid Mech., 1980, vol. 100, N 4.
7. Kida S. Statistics of the system of line vortices.— J. Phys. Soc. Japan, 1975, vol. 39, N 5.
8. Lundgren T. S., Pointin Y. B. Statistical mechanics of two dimensional vortices.— J. Statist. Phys., 1977, vol. 17, N 5.
9. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
10. Winant C. D., Browand F. K. Vortex pairing: the mechanism of turbulent mixing — layer growth at moderate Reynolds number.— J. Fluid Mech., 1974, vol. 63, N 2.
11. Brown G. L., Roshko A. On density effects and large structure in turbulent mixing layers.— J. Fluid Mech., 1974, vol. 64, N 4.
12. Roshko A. Structure of turbulent shear flows: a new look.— AIAA J., 1976, vol. 14, N 10.
13. Кузьмин Г. А. Статистическая механика завихренности в двумерной когерентной структуре.— В кн.: Структурная турбулентность/Под ред. М. А. Гольдштика. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1982.
14. Заславский Г. М., Филоненко И. И. Кинетика нелинейных волн в среде с дисперсией.— ЖЭТФ, 1969, т. 57, № 4.
15. Гольдштик М. А., Штерн В. И. К теории структурной турбулентности.— ДАН СССР, 1981, т. 237, № 6.
16. Ламб Н. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947.
17. Новиков Е. А. Динамика и статистика системы вихрей.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, вып. 5.
18. Aref H. Motion of three vortices.— Phys. Fluids, 1979, vol. 22, N 3.
19. Новиков Е. А., Седов Ю. В. Стохастические свойства четырех вихрей.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, вып. 3.