

УДК 533.6.011.3: 524.358.3

РАДИАЦИОННЫЙ ТЕПЛООБМЕН ПРИ ОБТЕКАНИИ ПЛОСКОСТИ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА ОТ СФЕРИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА

Н. Н. Пилюгин

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, 119192 Москва
E-mail: pilyugin@yandex.ru

Получено асимптотическое решение уравнений радиационной газодинамики, описывающих стационарное взаимодействие двух гиперзвуковых потоков газа, истекающих из двух идентичных сферических источников. В предположении, что газ в ударном слое находится в локальном термодинамическом равновесии и в нем происходит объемное высвечивание (потеря энергии на излучение), получено распределение газодинамических функций и температуры в аналитическом виде. Исследованы зависимости формы ударной волны и лучистого потока на контактной плоскости от параметров задачи.

Ключевые слова: гиперзвуковой поток, сферически-симметричный источник, уравнения радиационной газодинамики, асимптотическое решение, распределение лучистого потока на плоскости.

Введение. Исследование воздействия плазменных струй на плоские элементы летательных аппаратов и земную поверхность имеет как научное, так и практическое значение [1, 2]. Известно, что течение в сверхзвуковой струе, истекающей из осесимметричного сопла в вакуум, может моделироваться течением на некотором расстоянии от сферического источника [1]. Если характеристики двух сверхзвуковых сферических источников одинаковы, то задача о столкновении двух потоков сводится к задаче о взаимодействии сверхзвукового сферически-симметричного потока с плоской преградой [2]. В соответствии с этой моделью области течения двух встречных потоков газа разделены контактной поверхностью, представляющей собой плоскость, а область взаимодействия заключена между двумя ударными волнами. Численное решение уравнений Эйлера, описывающих возникающее течение, проводилось в работах [1, 3, 4], в которых излучение газа в ударном слое не учитывалось. Поэтому возникла необходимость получения приближенных аналитических решений данной задачи, имеющих различные приложения в науке и технике. В [2, 5, 6] получено асимптотическое решение задачи без учета излучения. Сравнение аналитического и численного решений показало, что они хорошо согласуются [2, 6]. Это позволяет применять асимптотический метод при решении задачи с учетом радиационных процессов в ударном слое. Интерес к аналитическим решениям, несмотря на наличие упрощений, обусловлен возможностью оценить влияние различных факторов на размер области сжа-

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (государственный контракт № 02.740.11.0615).

© Пилюгин Н. Н., 2012

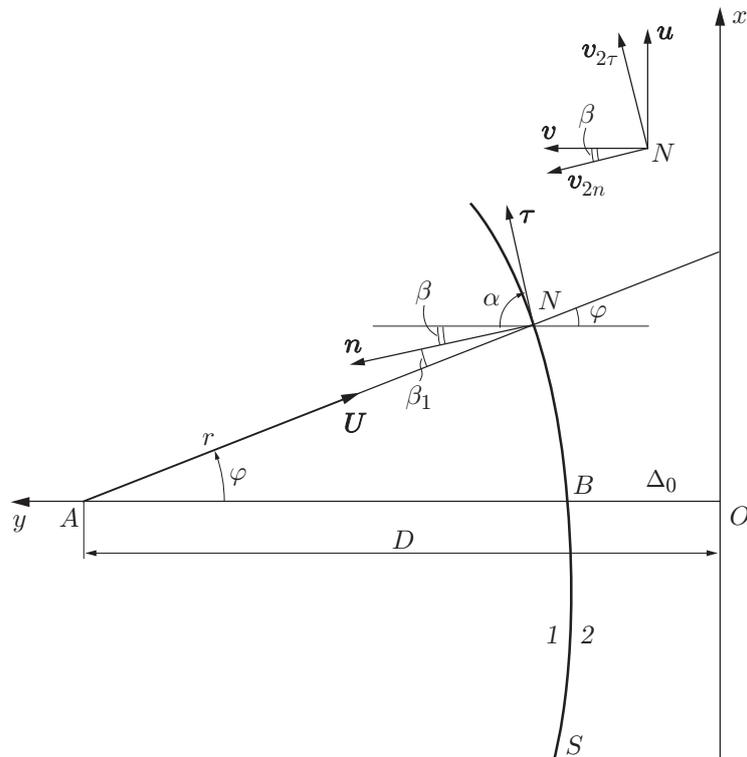


Рис. 1. Схема течения:

- 1 — область течения от одного из источников с центром, расположенным в точке A ;
 2 — область течения за ударной волной

того слоя и на параметры течения, а также определить распределение лучистого потока на поверхности.

1. Постановка задачи. Исследуем столкновение двух гиперзвуковых потоков газа от одинаковых сферических источников, расстояние между центрами которых равно $2D$. В силу симметрии контактная поверхность представляет собой плоскость, расположенную на расстоянии D от центра каждого источника. На рис. 1 представлена схема течения в случае столкновения двух одинаковых сверхзвуковых потоков. Введем цилиндрическую систему координат (x, y) , связанную с контактной плоскостью. Расстояние x будем отсчитывать от оси симметрии вдоль плоскости, расстояние y — по нормали к ней (положительные значения y соответствуют направлению к центру источника A). Введем также сферическую систему координат (r, φ) с центром в точке A . Угол между касательной к криволинейной ударной волне (УВ) S и осью Oy обозначим α . Векторы \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ указывают направление нормали и касательной в произвольной точке N на УВ. Компоненты вектора скорости \mathbf{U} перед скачком равны $v_{1\tau}$, v_{1n} , а за скачком — $v_{2\tau}$, v_{2n} , в системе координат (x, y) компонентами скорости являются u , v . Поскольку при переходе газа через скачок уплотнения температура и давление в ударном слое значительно увеличиваются [3, 4, 6], будем рассматривать влияние переноса излучения в сжатом ударном слое (область 2 на рис. 1), а в области 1 между источником и УВ влиянием излучения будем пренебрегать.

2. Решение газодинамических уравнений в области течения от источника до ударной волны. Рассмотрим сферически-симметричное гиперзвуковое невязкое адиабатическое течение от источника с эффективным радиусом R_* , на поверхности которого заданы газодинамические параметры: число Маха M_* , плотность ρ_* , радиальная скорость U_* , давление p_* и энтальпия газа h_* . Тогда при произвольном расстоянии r от

центра источника решение газодинамических уравнений можно представить в неявном виде [2, 6]. В случае, когда для источника выполняются неравенства $(\gamma - 1) M_*^2 \gg 1$, $(\gamma - 1) M^2 \gg 1$, решение [2, 6] можно представить в явном виде

$$\begin{aligned} M &= M_* R^{\gamma-1}, & U &= U_*, \\ \frac{\rho}{\rho_*} &= \frac{1}{R^2}, & \frac{p}{\rho_* U_*^2} &= \frac{1}{\gamma M_*^2} \frac{1}{R^{2\gamma}}, & \frac{2h}{U_*^2} &= \frac{2}{(\gamma - 1) M_*^2} \frac{1}{R^{2(\gamma-1)}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ , U , p , h — плотность, радиальная скорость, давление и энтальпия газа на произвольном расстоянии r от центра источника ($R = r/R_*$); γ — показатель адиабаты газа; M — локальное число Маха. Для определения параметров на УВ со стороны набегающего потока (область 1 на рис. 1) в выражениях (1) следует положить $r = R_S(x)$, где $R_S(x)$ — функция, определяющая форму УВ.

3. Соотношения Рэнкина — Гюгонио на ударной волне. Для решения уравнений газодинамики в ударном слое (область 2 на рис. 1), расположенном между УВ и контактной плоскостью, необходимо сформулировать граничные условия. В [7] показано, что при $T < 3 \cdot 10^5$ К для определения температуры за скачком при наличии потерь на излучение с высокой точностью можно использовать обычные соотношения Рэнкина — Гюгонио. Применяя известные соотношения для компонент скорости перед скачком уплотнения и за ним и разрешая их относительно искомых функций u , v , p_2 , h_2 , на скачке получаем [2]

$$u = U(x)[(\rho_1/\rho_2) \cos \alpha \sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha \cos(\alpha + \varphi)]; \quad (2)$$

$$v = -U(x)[(\rho_1/\rho_2) \sin \alpha \sin(\alpha + \varphi) + \cos \alpha \cos(\alpha + \varphi)]; \quad (3)$$

$$p_2 = p_1 + \rho_1 U^2(x)(1 - \rho_1/\rho_2) \sin^2(\alpha + \varphi); \quad (4)$$

$$h_2 = h_1 + (1/2)U^2(x)(1 - \rho_1^2/\rho_2^2) \sin^2(\alpha + \varphi). \quad (5)$$

Здесь величины $\rho_1(x)$, $p_1(x)$, $U(x)$, $h_1(x)$ определяются из выражений (1) при $r = R_S(x)$.

Чтобы упростить задачу с целью исследования влияния излучения, будем считать, что уравнение состояния газа имеет вид

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (6)$$

и справедливо уравнение Клапейрона

$$p = \rho R_A T / \mu, \quad (7)$$

где T , μ — температура и молекулярная масса газа; R_A — универсальная газовая постоянная; γ — эффективное отношение теплоемкостей, постоянное в выбранном интервале температур [7].

Из соотношений (5), (6) нетрудно получить отношение плотностей на скачке

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1) M_S^2 \sin^2(\alpha + \varphi)}, \quad (8)$$

где $M_S = M_*(r_S/R_*)^{\gamma-1} = M_* R_S^{\gamma-1}$ — число Маха газового потока непосредственно перед скачком. Имеют место также следующие геометрические соотношения:

$$\frac{dx_S}{dy} = \operatorname{tg} \alpha(x), \quad r \sin \varphi = x, \quad r \cos \varphi = D - y. \quad (9)$$

На контактной плоскости используем условие непротекания потока

$$v|_{y=0} = 0. \quad (10)$$

4. Система газодинамических уравнений в ударном слое. Рассмотрим случай $M_* \gg 1$, $M \gg 1$, $p_1 \ll \rho U^2$, $h_1 \ll U^2/2$. С учетом граничных условий (2)–(5), следуя [1, 2, 6], для ударного слоя (область 2 на рис. 1) введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{D}, & \bar{y} &= \frac{y}{D}, & \bar{u} &= \frac{u}{U_*}, & \bar{v} &= \frac{v}{U_*}, & \bar{p} &= \frac{p}{\rho_* U_*^2 (R_*/D)^2}, \\ \bar{h} &= \frac{2h}{U_*^2}, & \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_* (R_*/D)^2}, & \bar{\psi} &= \frac{\psi}{\rho_* U_* R_*^2}, & \bar{T} &= \frac{2TC_p}{U_*^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь C_p — эффективная теплоемкость; ψ — функция тока, определяемая равенством

$$d\psi = \rho u x dy - \rho v x dx.$$

Система уравнений, описывающая течение невязкого нетеплопроводного химически равновесного излучающего газа в ударном слое вблизи осесимметричного тела приведена в [8]. В уравнении энергии этой системы содержится дивергенция потока Q лучистой энергии в ударном слое, который рассматривается как локально-одномерный плоский слой газа, переносящий излучение. Собственное излучение плоскости не учитывается. В предположении, что газ в ударном слое находится в локальном термодинамическом равновесии, выражение для Q в случае объемно-излучающего газа имеет вид [8]

$$Q = 4k_p(p, T)\sigma T^4, \quad (12)$$

где k_p — коэффициент поглощения Планка; σ — постоянная Стефана — Больцмана.

Коэффициент поглощения Планка можно аппроксимировать следующим образом:

$$k_p = ApT^n = k_{p0} \left(\frac{T}{T_0}\right)^n \frac{p}{p_0}. \quad (13)$$

Например, для воздуха в диапазоне температур $3000 \text{ K} \leq T \leq 12000 \text{ K}$ и давлений $10^3 \text{ Па} \leq p \leq 10^7 \text{ Па}$ в результате обработки данных таблиц в [9] получены следующие значения констант в (13): $k_{p0} = 4,37 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-1}$, $n = 8,7$, $T_0 = 10^4 \text{ K}$, $p_0 = 10^5 \text{ Па}$. Для того чтобы найти приближенное решение задачи, систему газодинамических уравнений целесообразно записать в переменных Мизеса [2, 10], т. е. перейти от координат x , y к новым независимым переменным x , ψ . В этих переменных с учетом (6), (7), (11)–(13) система уравнений газодинамики в ударном слое принимает вид (черта над безразмерными переменными опускается)

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \psi} &= \frac{1}{\rho u x}, & \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{v}{u}, & \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= -x \frac{\partial p}{\partial \psi}, \\ u \frac{\partial}{\partial x} (h + u^2 + v^2) &= -b_R h^{n+5}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$h = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad T = h, \quad b_R = \frac{8A\sigma R_A}{\mu U_*^3} D \left(\frac{U_*^2}{2C_p} \right)^{n+5}.$$

С учетом (3) при $\psi = \psi_S(x)$ граничные условия на скачке (4), (5) записываются в виде

$$\begin{aligned} u_2(x) &= [(\rho_1/\rho_2) \cos \alpha \sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha \cos(\alpha + \varphi)], \\ v_2(x) &= -[(\rho_1/\rho_2) \sin \alpha \sin(\alpha + \varphi) + \cos \alpha \cos(\alpha + \varphi)]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$p_2(x) = R_S^{-2} \sin^2(\alpha + \varphi) (1 - \rho_1/\rho_2), \quad h_2(x) = \sin^2(\alpha + \varphi) (1 - \rho_1^2/\rho_2^2). \quad (16)$$

Из соотношения для потока массы и геометрических соотношений определяется безразмерная функция тока на УВ [2]

$$\psi_S(x) = \int_0^x \frac{1 - y_S + xy'_S}{\sqrt{1 + (y'_S)^2}} \frac{x dx}{R_S^3}, \quad (17)$$

где $y_S(x)$ — функция, задающая форму УВ.

5. Асимптотическое решение задачи в ударном слое. При $M_S \sin^2(\alpha + \varphi) \gg 1$ из соотношения (8) следует

$$\varepsilon = \frac{\rho_1}{\rho_2} \rightarrow \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

При $\gamma = 1,4$ отсюда следует $\varepsilon = 1/6 \ll 1$. Таким образом, ε является малым параметром задачи. Решение системы уравнений (14) можно искать в виде степенных разложений искомых функций по малому параметру ε [10].

Однако, как показано в работах [2, 6, 9], для более точного вычисления величины отхода УВ от контактной плоскости необходимо использовать более точное выражение для касательной составляющей скорости, вычисляя ее в следующем приближении по ε . Поэтому будем искать решение в виде разложений

$$\begin{aligned} y &= \varepsilon y_0, & u^2 &= u_0^2 + \varepsilon u_f^2 + \dots, & v &= \varepsilon v_0 + \dots, \\ p &= p_0 + \varepsilon p_f + \dots, & \rho &= \rho_0/\varepsilon + \rho_f + \dots, & h &= h_0 + \varepsilon h_f + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (18) в систему (14), для первых членов разложения получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial p_0}{\partial \psi} &= 0, & v_0 &= u_0 \frac{\partial y_0}{\partial x}, \\ (u_0^2 + \varepsilon u_f^2)^{1/2} \frac{\partial h_0}{\partial x} &= -b_R h_0^{n+5}, \\ \rho_0 u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} &= -\frac{\partial p_0}{\partial x}, & \frac{\partial y_0}{\partial \psi} &= \frac{1}{(u_0^2 + \varepsilon u_f^2)^{1/2} x \rho_0}, & h_0 &= \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{p_0}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из соотношения (9) на скачке уплотнения следует

$$\varepsilon \frac{\partial y_{0S}}{\partial x} = \operatorname{ctg} \alpha. \quad (20)$$

Отсюда при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем $\alpha = \pi/2$. Это решение, в котором уже в нулевом приближении по ε УВ совпадает с контактной плоскостью, использовалось в [5, 6].

В [2] построено решение (без учета излучения), в котором в отличие от [6] уже в первом приближении учитывается ненулевое значение кривизны УВ. Однако такая поправка к величине отхода УВ за счет учета ее кривизны значительно меньше поправки за счет учета поправки εu_f^2 к касательной составляющей скорости. Поэтому в данной работе, для того чтобы не усложнять существенно решение, будем учитывать только поправку к касательной составляющей скорости. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ граничные условия (15), (16) для искомых функций принимают вид

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_S(x), & u_{0S}(x) &= -\cos(\alpha + \varphi) = \sin \varphi, & u_{fS}(x) &= 0, \\ p_{0S}(x) &= \frac{\sin^2(\alpha + \varphi)}{R_S^2(x)} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_S^2(x)}, & h_{0S}(x) &= \sin^2(\alpha + \varphi) = \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (21)$$

В этом приближении по ε имеем $\operatorname{tg} \varphi \approx x$, а выражение (17) для функции тока на УВ записывается следующим образом [6]:

$$\psi_S(x) = 1 - 1/\sqrt{1+x^2}. \quad (22)$$

Произвольная функция тока имеет параметрический вид

$$\psi(t) = 1 - 1/\sqrt{1+t^2}, \quad (23)$$

где t — координата точки, в которой линия тока ψ входит в ударный слой. В переменных x, t решение двух первых уравнений (19) с граничными условиями (21) имеет вид

$$u_0(t) = t/\sqrt{1+t^2}, \quad p_0(x) = 1/(1+x^2)^2. \quad (24)$$

С учетом (18) из первого, четвертого и пятого уравнений системы (19) получаем уравнения для определения поправки к касательной скорости u и энтальпии h

$$u \frac{\partial h_0}{\partial x} = -b_R h_0^{n+5}, \quad u^2 = u_0^2 + \varepsilon u_f^2; \quad (25)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\gamma-1}{2\gamma} h_0 \frac{d \ln p_0(x)}{dx}. \quad (26)$$

Эти два уравнения могут быть сведены к одному нелинейному интегродифференциальному уравнению для $u(x, t)$. Для этого введем новую искомую функцию $g(x, t) = h_0^{-(n+4)}$, а также обозначения $\Phi(x) = d \ln p_0/dx$, $b = 2(\gamma-1)/\gamma$. Тогда из (25) следует

$$g(x, t) = g_S(t) + B_R \int_t^x \frac{dx'}{u(x', t)}, \quad B_R = b_R(n+4). \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26), получаем уравнение для $u(x, t)$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{b}{4} \Phi(x) h_S(t) \left[1 + B_R h_S^{n+4}(t) \int_t^x \frac{dx'}{u(x', t)} \right]^{-1/(n+4)}, \quad (28)$$

из которого следует, что при $n \gg 1$ излучение оказывает незначительное влияние на касательную составляющую скорости $u(x, t)$. В этом случае показатель степени $1/(n+4)$ в (28) близок к нулю. Заменяя в (28) выражение в квадратных скобках на единицу, имеем

$$u^2(x, t) = u_0^2 + \varepsilon u_f^2 = \frac{t^2}{1+t^2} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{2}{1+t^2} \ln \frac{1+t^2}{1+x^2}. \quad (29)$$

Используя (29), из четвертого уравнения системы (19) получаем выражение для энтальпии

$$h_0(x, t) = [(1+t^2)^{n+4} + B_R I(x, t)]^{-\eta}, \quad \eta = 1/(n+4); \quad (30)$$

$$I(x, t) = (1+t^2)^{1/2} \int_t^x dz G(z, t), \quad G(z, t) = \left[t^2 - b \ln \frac{1+t^2}{1+z^2} \right]^{-1/2}. \quad (31)$$

С помощью выражения (30) из уравнения состояния (19) находим плотность газа в ударном слое

$$\rho_0(x, t) = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{p_0(x)}{h_0(x, t)}. \quad (32)$$

Для геометрической координаты из (19) получаем

$$y_0(x, t) = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{(1+x^2)^2}{x} \int_0^t \frac{t dt}{1+t^2} G(x, t) F(x, t)^{-\eta}, \quad (33)$$

$$F(x, t) = (1+t^2)^{n+4} + B_R I(x, t), \quad \eta = 1/(n+4).$$

Нормальная составляющая скорости v_0 находится из третьего уравнения (19) и из (33). При $t = x$ из (33) следует

$$y_{0S}(x, t) = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{(1 + x^2)^2}{x} \int_0^x \frac{t dt}{1 + t^2} G(x, t) F(x, t)^{-\eta}. \quad (34)$$

Таким образом, все параметры течения в ударном слое определены в квадратурах. Из выражения (34) следует, что наличие излучения газа в ударном слое при $n+4 \geq 0$ приводит к уменьшению величины отхода УВ по сравнению с величиной отхода, рассчитанной по адиабатическим параметрам. На основе найденного решения задачи получаем выражение для локального коэффициента лучистой теплопередачи [8]

$$G_R(x) = \frac{2q_R}{\rho_* U_*^3} = \frac{b_R}{2} J_R(x); \quad (35)$$

$$J_R(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{1 + t^2} G(x, t) F(x, t)^{-m} t dt, \quad m = \frac{n + 5}{n + 4}. \quad (36)$$

Здесь q_R — нормальная составляющая вектора потока лучистой энергии, падающего из ударного слоя на плоскость [8, 9].

Из выражений (30), (34)–(36) следует, что на профиль энтальпии, форму УВ и коэффициент лучистого теплообмена оказывают влияние параметры b , B_R , n .

6. Предельные выражения для скорости и энтальпии вблизи оси симметрии. Из формулы (24) следует, что в данном решении излучение не влияет на распределение давления. На распределение касательной составляющей скорости $u(x, t)$ существенное влияние оказывает параметр b . Для изучения поведения функции $u(x, t)$ при $x \rightarrow 0$ введем в (29) параметрическую переменную $v = t/x$, $0 \leq v \leq 1$, где значение $v = 0$ соответствует плоскости, $v = 1$ — ударной волне. Из (29) нетрудно получить выражение

$$\hat{u} = u(x, t)/x = [v^2(1 - b) + b]^{1/2}.$$

Следовательно, наиболее существенное отличие зависимости $\hat{u}(v)$ при $b \neq 0$ от зависимости $\hat{u}(v)$ при $b = 0$ имеет место в области вблизи плоскости: $0 \leq v \leq 0,5$. Так, в случае $v = 0$ при $b = 0$ имеем $\hat{u} = 0$, а при $b = 0,182$ ($\gamma = 1,1$) получаем $\hat{u} = 0,427$. При исследовании зависимости (30) для энтальпии в интеграле (31) сначала выполним замену $z = xw$, $dz = x dw$, а затем замену $v = t/x$. Тогда интеграл (31) можно записать в виде, удобном для анализа:

$$I(x, v) = (1 + x^2 v^2)^{1/2} I_1(x, v), \quad I_1(x, v) = \int_v^1 dw \Phi(v, w), \quad (37)$$

$$\Phi(v, w) = \left(v^2 - \frac{b \ln(1 + (xv)^2)}{x^2} + \frac{b \ln(1 + (xw)^2)}{x^2} \right)^{-1/2}.$$

При $x \rightarrow 0$ на оси симметрии интеграл I_1 вычисляется в конечном виде:

$$I_1(0, v) = [\ln(\sqrt{b} + \sqrt{b + av^2}) - \ln((\sqrt{b} + 1)v)]/\sqrt{b}, \quad a = 1 - b. \quad (38)$$

Из формулы (30) следует распределение энтальпии на оси при $x \rightarrow 0$:

$$h(0, v) = [1 + B_R I_1(0, v)]^{-1/(n+4)}. \quad (39)$$

Расчеты, выполненные по формуле (39) при $B_R = 0,01; 1,00; 100,00$, показывают, что с увеличением высвечивания газа (с увеличением B_R) вблизи УВ энтальпия (и температура) уменьшается более резко. Результаты вычисления интеграла I_1 в (37) при различных значениях x в диапазоне $0 \leq x \leq 1$ показали, что он отличается от интеграла, вычисленного по формуле (38), менее чем на 5 %.

7. Результаты расчетов. Исследуем влияние параметров b , B_R , n на коэффициент лучистого теплообмена $C_R(x)$. Аналогично (37) путем замены переменных выражение (36) приводится к выражению, содержащему интеграл с постоянными пределами интегрирования:

$$J_R(x) = \int_0^1 v dv \sqrt{1 + (xv)^2} \Phi(v, 1) F_1^{-m}(x, v),$$

$$F_1(x, v) = [1 + (xv)^2]^{n+4} + B_R I(x, v). \quad (40)$$

При $x \rightarrow 0$ интеграл (40) принимает вид

$$J_R(0) = \int_0^1 \frac{v dv}{[v^2(1-b) + b]^{1/2}} \frac{1}{[1 + B_R I(0, v)]^m}, \quad (41)$$

где $I(0, v)$ определяется формулами (37), (38). Коэффициент лучистого теплообмена $C_R(0)$ в критической точке вычисляется из (35), (41).

На рис. 2 представлена зависимость $C_R(0)$ от параметра B_R при различных значениях b , n . С увеличением B_R и уменьшением n значения $C_R(0)$ увеличиваются, при этом кривые 2, 3, 5, 6, полученные при $b \neq 0$, расположены значительно ниже кривых 1, 4, построенных при $b = 0$.

В некоторых предельных случаях интеграл в (41) вычисляется в аналитическом виде, что позволяет получить оценку $C_R(0)$ и проверить вычисления. Например, в случае слабоизлучающего газа ($B_R \rightarrow 0$) интеграл J_R и коэффициент $C_R(0)$ равны:

$$J_R(0) = \frac{1}{1 + \sqrt{b}}, \quad C_R(0) = \frac{b_R}{2} \frac{1}{1 + \sqrt{b}}.$$

Таким образом, учет поправки к касательной скорости приводит к существенному уменьшению значения $C_R(0)$ по сравнению со значением $C_R(0)$ в случае $b = 0$. Так, при $b = 0,334$, $\gamma = 1,2$ уменьшение достигает 37 %.

На рис. 3 представлены распределения лучистого потока на плоскости $\bar{q}_R(x) = C_R(x)/C_R(0)$ при $B_R = 1$ и различных значениях b , n . Видно, что с увеличением b , n уменьшение величины $\bar{q}_R(x)$ становится более резко выраженным. На рис. 4 показано влияние параметра B_R на распределение $\bar{q}_R(x)$ при $n = 4$, $b = 0,334$.

В результате замены переменных, такой же как в (37), (40), преобразование интегралов, входящих в выражение (34), приводит к выражениям, содержащим интегралы с постоянными пределами:

$$y_{s0} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} (1 + x^2)^2 J_{sh}(x), \quad y_{sh}(x) = \varepsilon y_{s0},$$

$$J_{sh}(x) = \int_0^1 v dv (1 + (xv)^2)^{-1} \Phi(v, 1) F_1^{-n}(x, v). \quad (42)$$

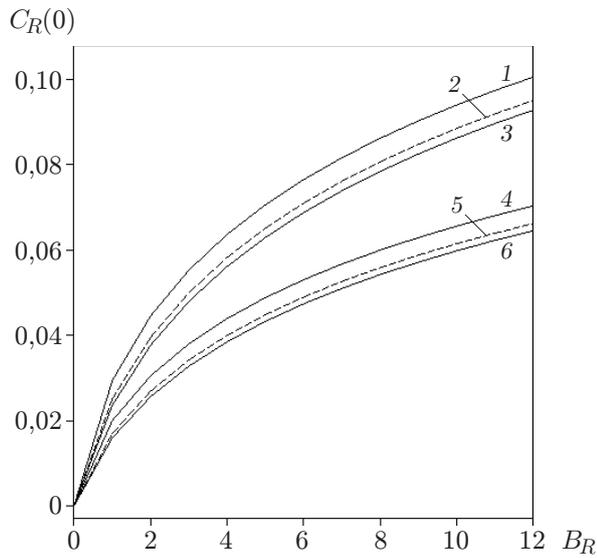


Рис. 2

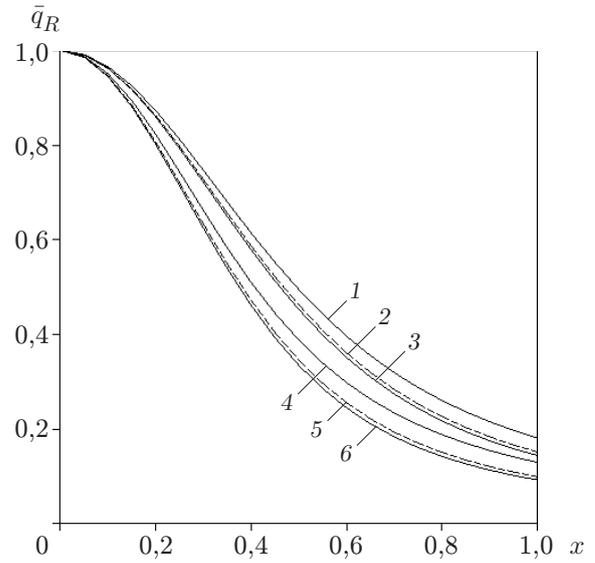


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость коэффициента лучистого теплообмена в критической точке на плоскости $C_R(0)$ от параметра B_R при $n = 4$ (1-3) и $n = 8$ (4-6):
1, 4 — $b = 0$; 2, 5 — $b = 0,334$; 3, 6 — $b = 0,571$

Рис. 3. Распределение лучистого потока $\bar{q}_R(x)$ на плоскости при $B_R = 1$ и различных значениях b, n (обозначения те же, что на рис. 2)

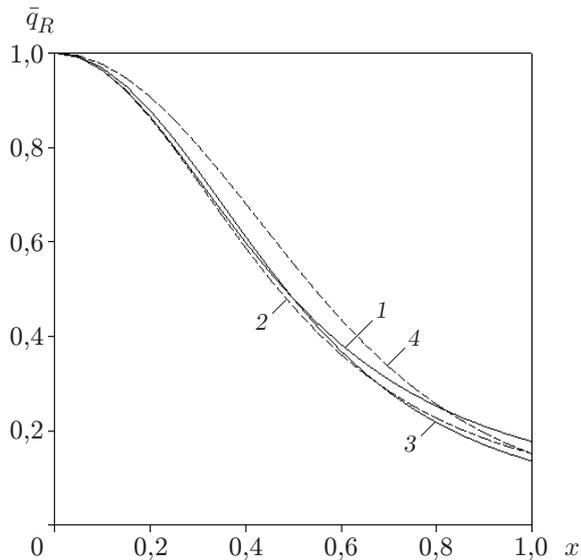


Рис. 4

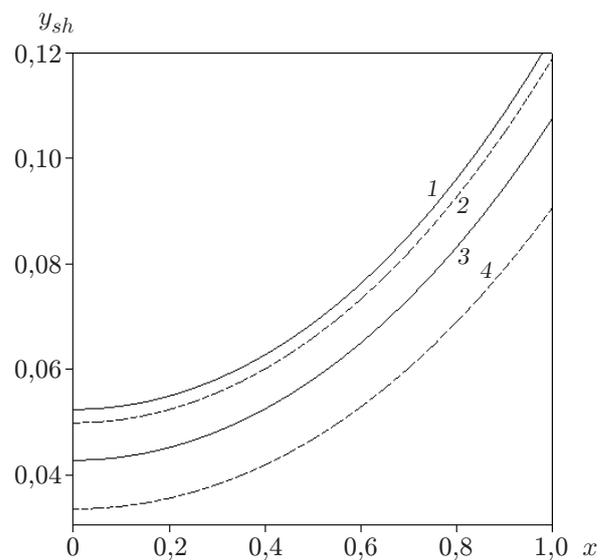


Рис. 5

Рис. 4. Распределение лучистого потока $\bar{q}_R(x)$ на плоскости при $n = 4, b = 0,334$ и различных значениях B_R :
1 — $B_R = 0,1$; 2 — $B_R = 1$; 3 — $B_R = 10$; 4 — $B_R = 100$

Рис. 5. Влияние параметра B_R на величину отхода УВ при $n = 4, b = 0,334$ (обозначения те же, что на рис. 4)

При $x \rightarrow 0$ на оси симметрии интеграл в (42) в некоторых случаях вычисляется в аналитическом виде. В случае слабоизлучающего газа ($B_R \rightarrow 0$) имеем

$$J_{sh}(0) = \frac{1}{1 + \sqrt{b}}, \quad y_{sh}(0) = \frac{b}{4} \frac{1}{1 + \sqrt{b}}. \quad (43)$$

Выражение (43) совпадает с формулой, полученной в [2].

На рис. 5 показано влияние параметра B_R на величину отхода УВ, рассчитанную по формулам (42) при $n = 4$, $b = 0,334$. Из рис. 5 следует, что с увеличением параметра B_R величина отхода УВ от плоскости уменьшается.

Заключение. В работе получено асимптотическое решение уравнений радиационной газодинамики в ударном слое вблизи плоскости при ее обтекании гиперзвуковым потоком излучающего газа от сферического источника. Установлено, что учет поправки к касательной составляющей скорости оказывает существенное влияние на распределение энтальпии, а также на коэффициент лучистого теплообмена и величину отхода УВ. Получены выражения для определения распределения лучистого потока на плоскости и формы УВ в зависимости от параметров задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лебедев М. Г., Савинов К. Г.** Удар неравномерного сверхзвукового потока газа в плоскую преграду // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1969. № 3. С. 164–171.
2. **Пилюгин Н. Н.** Аналитическое решение задачи о столкновении двух гиперзвуковых потоков газа от симметричных источников // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 2. С. 61–70.
3. **Гишинский М. М.** Моделирование течений газа с ударными волнами / М. М. Гишинский, М. Г. Лебедев, И. Р. Якубов. М.: Машиностроение, 1984.
4. **Лебедев М. Г., Мясников А. В.** Взаимодействие двух сверхзвуковых радиальных потоков газа // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 4. С. 159–165.
5. **Pilyugin N. N., Usov V. V.** Collision of two identical hypersonic stellar winds in binary systems // Astrophys. J. 2007. V. 655, N 1. P. 1002–1009.
6. **Пилюгин Н. Н., Усов В. В.** Взаимодействие двух гиперзвуковых потоков от симметричных источников // Тр. 5-й Междунар. школы-семинара “Внутрикамерные процессы, горение и газовая динамика дисперсных систем”. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2007. Т. 2. С. 75–91.
7. **Зельдович Я. Б.** Физика ударных волн и высокотемпературных газодинамических явлений / Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер. М.: Наука, 1966.
8. **Пилюгин Н. Н.** Основы динамики излучающего газа / Н. Н. Пилюгин, Г. А. Тирский. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1989.
9. **Пилюгин Н. Н., Чернова Т. А.** Радиационный теплообмен метеорного тела в приближении лучистой теплопроводности // Космич. исслед. 1986. Т. 24, вып. 1. С. 58–68.
10. **Черный Г. Г.** Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.

*Поступила в редакцию 15/IX 2011 г.,
в окончательном варианте — 28/XII 2011 г.*