

# О ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ МАКСВЕЛЛОВСКОГО КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

С. И. Мешков, Т. Д. Шермергор

(Воронеж)

Рассматривается внутреннее трение, возникающее при вынужденных колебаниях крутильного маятника, материал которого описывается реологическими моделями Максвелла и Фойгта. Модель Фойгта, дающая обычные частотные зависимости амплитуды вынужденных колебаний и сдвига фаз, не годится для описания фона внутреннего трения, так как дает убывающее с ростом температуры внутреннее трение, что противоречит экспериментальным данным. Модель Максвелла дает внутреннее трение, возрастающее с температурой, что находится в согласии с экспериментальными результатами. Обсуждаются различные методы измерения внутреннего трения при большом затухании. Показано, что для максвелловской среды обратная амплитуда колебаний с ростом температуры проходит через максимум, тогда как внутреннее трение монотонно возрастает. Поэтому обратная амплитуда при вынужденных колебаниях может использоваться как мера внутреннего трения лишь при малых затуханиях.

1. Температурная зависимость внутреннего трения металлов представляет собой ряд максимумов, каждый из которых связан с определенным релаксационным процессом. При измерении внутреннего трения методом затухающих колебаний приближение температуры к точке плавления приводит к резкому возрастанию логарифмического декремента затухания [1], что получило название фона внутреннего трения. Физическая природа фона связывается с диффузией вакансий [2]. Последняя приводит к тому, что равновесное значение модуля сдвига равно нулю, и в стационарном режиме при малых уровнях напряжений течение металлов следует ньютоновскому закону [3].

В общем случае нестационарного режима при наличии одного релаксационного процесса — диффузии вакансий для однородного изотропного тела вместо ньютоновского течения следует пользоваться релаксационной формулой

$$s_{ik} = 2\mu \int_{-\infty}^t \exp \frac{t' - t}{\tau} \dot{e}_{ik}(t') dt' \quad (1.1)$$

полученной при помощи термодинамики необратимых процессов [4,5]. Здесь  $s_{ik}$  и  $e_{ik}$  — девиаторы тензоров напряжений и деформаций,  $\mu$  — модуль сдвига,  $\tau$  — время релаксации и точкой обозначена производная по времени.

При помощи формулы (1.1) удастся описать фон внутреннего трения, причем с ростом температуры логарифмический декремент возрастает вплоть до бесконечности [6,7]. Однако другая характеристика внутреннего трения — коэффициент затухания остается во всей области температур конечным [8].

Для измерения внутреннего трения наряду с затухающими колебаниями широко используется резонансный метод, поэтому ниже проводится исследование температурной зависимости внутреннего трения при вынужденных колебаниях максвелловской среды.

2. Рассмотрим вынужденные колебания крутильного маятника, среда которого описывается выражением (1.1). Крутильный маятник представляет собой стержень, один конец которого закреплен, а на другой конец, имеющий инерционную подвеску с моментом инерции  $I$ , действует вынуждающий момент пары сил. Обычно внутреннее трение измеряется при малой амплитуде колебаний, когда задача может считаться линейной. Поэтому примем линейную связь (1.1) и будем считать выполняющейся гипотезу плоских сечений.

Пусть вынуждающий момент сил  $M = M_0 \sin \omega t$  начинает действовать на нижнем конце стержня  $z = l$  с момента времени  $t = 0$ . Тогда решение однородного уравнения движения с неоднородными граничными условиями можно представить в виде свертки [9]

$$\varphi(z, t) = \frac{1}{M_*} \int_0^t G(z, t-t') M(t') dt' \quad (2.1)$$

где  $\varphi$  — угол закручивания стержня, а  $G$  — функция Грина рассматриваемой задачи, т. е. решение соответствующей краевой задачи для импульсного момента сил  $\dot{M} = M_* \delta(t)$ .

Функция  $G$  для крутильного маятника, среда которого описывается уравнением (1.1) при следующих краевых условиях

$$\varphi(z, t)|_{z=0} = 0, \quad \left( \iint \sigma_{\theta z} r dS + I \ddot{\varphi} \right) \Big|_{z=l} = M_* \delta(t) \quad (2.2)$$

после интегрирования в комплексной плоскости для  $t > 0$  имеет следующий вид [6,7]:

а) Для затухающих колебаний, когда  $D_n = \alpha_n^2 - 1/4\tau^2 > 0$

$$G_1(z, t) = \frac{2M_* z}{\pi \mu R^4 \tau} + \frac{2M_*}{I} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z) \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \frac{1}{\beta_n} \sin(\beta_n t - \psi_n) \quad (2.3)$$

$$c_n(z) = \frac{\sin(b_n z/l)}{(1+a) \sin b_n + b_n \cos b_n} \quad \left( \alpha_n^2 = \frac{\mu b_n^2}{\rho l^2} \right) \quad (2.4)$$

Здесь  $R$ ,  $l$  и  $\rho$  — радиус, длина и плотность стержня,  $I$  — момент инерции подвески,  $ib_n$  — корни функции  $f(x) = x \operatorname{sh} x + a \operatorname{ch} x$ ; обычно

$$a \equiv \pi R^4 \rho l / 2I \ll 1 \quad (b_1 \approx \sqrt{a}, \quad b_{n+1} \approx \pi n + a / \pi n)$$

Собственная частота колебаний  $\beta_n$  и сдвиг фаз  $\psi_n$  до  $n$ -й гармоники определяются формулами

$$\beta_n = \sqrt{\alpha_n^2 - 1/4\tau^2}, \quad \psi_n = \arccos(1 - 1/2\alpha_n^2 \tau^2) \quad (2.5)$$

б) Для аperiодического движения, когда  $D_n = \alpha_n^2 - 1/4\tau^2 < 0$

$$G_2(z, t) = \frac{2M_* z}{\pi \mu R^4 \tau} + \frac{M_*}{I\tau} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z) \frac{1}{\alpha_n^2} [H_{1n} \exp(-\gamma_{1n} t) + H_{2n} \exp(-\gamma_{2n} t)] \quad (2.6)$$

Здесь коэффициенты затухания  $\gamma$  и амплитуды  $H$  определяются выражениями

$$\gamma_{1n, 2n} = \frac{i}{2\tau} (1 \mp \sqrt{1 - 4\alpha_n^2 \tau^2}), \quad H_{1n, 2n} = -1 \mp \frac{1 - 2\alpha_n^2 \tau^2}{\sqrt{1 - 4\alpha_n^2 \tau^2}} \quad (2.7)$$

Подставляя формулу (2.3) в выражение (2.1) и проводя интегрирование, получим для  $D_n > 0$

$$\varphi(z, t) = \frac{2M_0 z}{\pi \mu R^4 \omega \tau} + \frac{2M_0}{I} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z) \left[ \frac{\omega}{\beta_n} \exp\left(-\frac{st}{2}\right) \times \right. \quad (2.8)$$

$$\left. \times \frac{\sin(\beta_n t - \psi_{1n})}{\sqrt{(\alpha_n^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 s^2}} + \frac{1}{\omega} \left( \frac{s^2 + \omega^2}{(\alpha_n^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 s^2} \right)^{1/2} \sin(\omega t - \psi_{2n}) \right]$$

где для удобства вместо времени релаксации  $\tau$  введена частота релаксации  $s \equiv \tau^{-1}$ . Сдвиги фаз гармоник определяются выражениями

$$\psi_{1n} = \arctg \frac{\beta_n s (\omega^2 + s^2 - 2\alpha_n^2)}{\alpha_n^2 (2s^2 + \omega^2 - \alpha_n^2) - 1/2 s^2 (s^2 + \omega^2)} \quad (2.9)$$

$$\psi_{2n} = \arctg \frac{\alpha_n^2 s}{\omega (\alpha_n^2 - \omega^2 - s^2)}$$

В равенстве (2.8) первое слагаемое  $\varphi_0 = 2M_0 z / \pi \mu R^4 \omega \tau$  описывает новое положение равновесия, обусловленное наличием собственной вязкости системы. Для упругой среды  $\tau \rightarrow \infty$  и  $\varphi_0 \rightarrow 0$ , как и следует ожидать. Второе слагаемое дает переходный процесс, обусловленный тем, что возмущение  $M_0 \sin \omega t$  включается в момент  $t = 0$ . Наконец, последнее слагаемое описывает стационарный режим вынужденных колебаний.

Аналогично для условия  $D_n = \alpha_n^2 - 1/4\tau^2 < 0$  получим

$$\varphi(z, t) = \frac{2M_0 z}{\pi \mu R^4 \omega \tau} + \frac{M_0}{I} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z) \left\{ \frac{\omega s}{\alpha_n^2} \left[ \frac{H_{1n}}{\gamma_{1n}^2 + \omega^2} \exp(-\gamma_{1n} t) + \right. \quad (2.10)$$

$$\left. + \frac{H_{2n}}{\gamma_{2n}^2 + \omega^2} \exp(-\gamma_{2n} t) \right] + \frac{2}{\omega} \left( \frac{s^2 + \omega^2}{(\alpha_n^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 s^2} \right)^{1/2} \sin(\omega t - \psi_{2n}) \right\}$$

где  $H$  и  $\gamma$  определяются формулами (2.7), а  $\psi_{2n}$  — формулой (2.9). Здесь первое слагаемое описывает новое положение равновесия, выражение, стоящее в квадратных скобках, описывает переходный процесс, тогда как последнее слагаемое дает стационарный режим.

Выражения (2.8) и (2.10) дают решение поставленной задачи. Отметим, что эти выражения могут быть получены и непосредственным решением уравнения крутильных колебаний

$$\rho \ddot{\varphi}(z, t) = \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{-\infty}^t \exp \frac{t'-t}{\tau} \dot{\varphi}(z, t') dt' \quad (2.11)$$

с нулевыми начальными и следующими граничными условиями

$$\varphi(z, t)|_{z=0} = 0, \quad \left[ \frac{\pi \mu R^4}{2} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^t \exp \frac{t'-t}{\tau} \dot{\varphi}(t') dt' + I \ddot{\varphi} \right] \Big|_{z=l} = M_0 \sin \omega t \quad (2.12)$$

например, при помощи интегрального преобразования Лапласа.

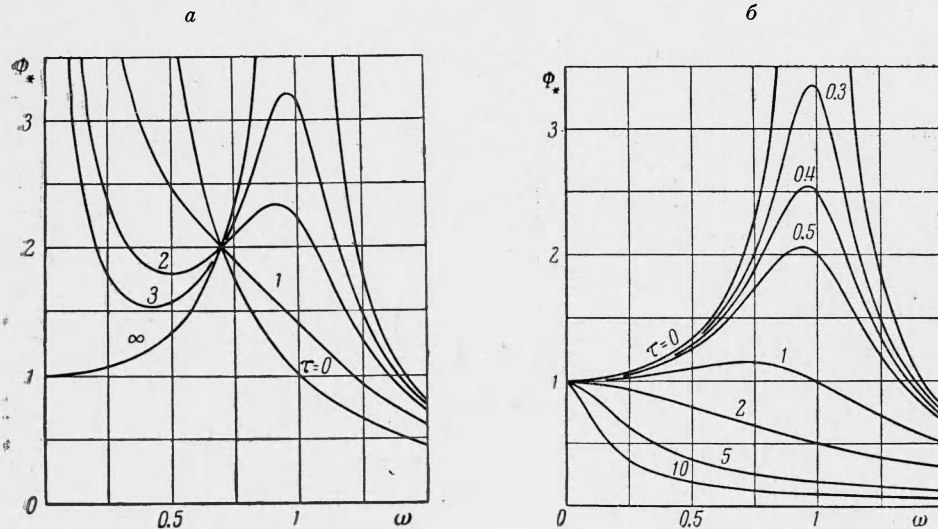
Решения (2.8) и (2.10) имеют различный вид лишь для нестационарной части. Однако для измерения внутреннего трения используется стационарный режим вынужденных колебаний. Имея это в виду и ограничиваясь первой гармоникой, объединим решения (2.8) и (2.10)

$$\varphi_* = \Phi(\omega, \tau) \sin(\omega t - \psi_2) \quad (\varphi_* \equiv \varphi - \varphi_0) \quad (2.13)$$

где  $\varphi_* = \varphi - \varphi_0$ , а  $\varphi_0$  и амплитуда колебаний  $\Phi$  определяются выражениями

$$\varphi_0 = \frac{2M_0 z}{\pi \mu R^4 \omega \tau}, \quad \Phi = \frac{M_0 z}{I l \omega} \left( \frac{1 + \omega^2 \tau^2}{\omega^2 + \tau^2 (\alpha^2 - \omega^2)^2} \right)^{1/2} \quad (2.14)$$

На фиг. 1а представлена частотная зависимость амплитуды колебаний при  $M_0 z / I l = 1$  в стационарном режиме согласно формуле (2.14) при различных значениях параметра  $\tau$ . При этом значение  $\alpha$  выбрано таким, чтобы в упругой области частота собственных колебаний  $\beta = 1$ . В этом случае  $\alpha^2 = \mu a / \rho l^2 = 1$ . Точка пересечения кривых лежит при  $\omega = \alpha \sqrt{2}$  и при  $z = l$  имеет амплитуду  $\Phi = 2M_0 / I \alpha^2$ . При малом затухании, т. е. большом времени релаксации, частотная зависимость амплитуды,



Фиг. 1. Частотная зависимость приведенной амплитуды колебаний крутильного маятника  $\Phi_* \equiv I l \Phi / M_0 z$ : а — по модели Максвелла, б — по модели Фойгта. Цифрами указано значение времен релаксаций

как и следовало ожидать, имеет максимум, который в предельном случае упругой задачи ( $\tau \rightarrow \infty$ ) становится бесконечным. Характерной особенностью максвелловского стержня является резкое возрастание амплитуды при  $\omega \rightarrow 0$ .

3. Сопоставим полученные результаты с решением соответствующей задачи для широко используемой модели Фойгта [10]. Связь между девиаторами тензоров напряжений  $s_{ik}$  и деформаций  $e_{ik}$  для среды Фойгта имеет вид

$$s_{ik} = 2\mu e_{ik} + 2\eta \dot{e}_{ik} \quad (3.1)$$

Используя соотношение (3.1) и решая задачу при прежних граничных и начальных условиях, легко получить выражение для угла закручивания маятника Фойгта при вынужденных колебаниях

$$\Phi(z, t) = \frac{2M_0}{I} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(z)}{[(\alpha_n^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \lambda_n^2]^{1/2}} \left[ \frac{\omega \exp(-\lambda_n t) \sin(\beta_n t + \psi_{1n})}{\beta_n} + \sin(\omega t - \psi_{2n}) \right] \quad \text{при } D_n = \alpha_n^2 - \lambda_n^2 > 0 \quad (3.2)$$

$$\Phi(z, t) = \frac{2M_0}{I} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z) \left\{ \frac{\omega}{2\lambda_n} \left[ \frac{\exp(-\gamma_{1n} t)}{\gamma_{1n}^2 + \omega^2} - \frac{\exp(-\gamma_{2n} t)}{\gamma_{2n}^2 + \omega^2} \right] + \right. \\ \left. + [(\alpha_n^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \lambda_n^2]^{-1/2} \sin(\omega t - \psi_{2n}) \right\} \quad \text{при } D_n = \alpha_n^2 - \lambda_n^2 < 0 \quad (3.3)$$

Сдвиги фаз определяются выражениями

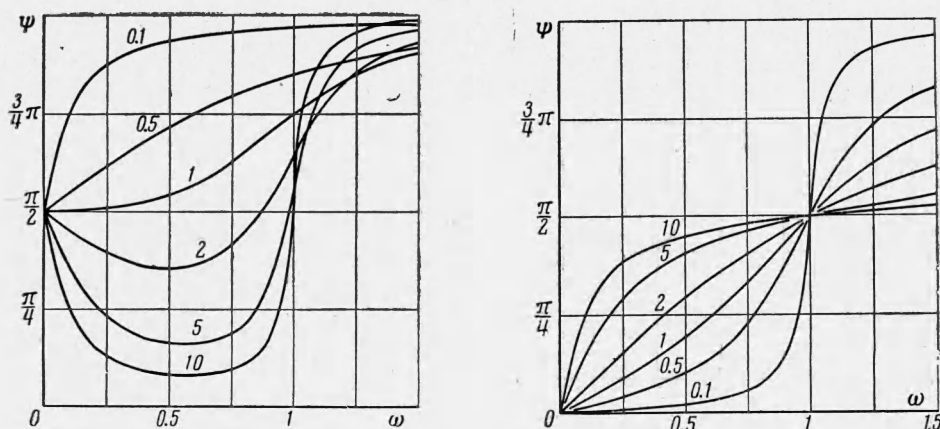
$$\psi_{1n} = \arctg \frac{2\beta_n \lambda_n}{\omega^2 - \alpha_n^2 + 2\lambda_n^2}, \quad \psi_{2n} = \arctg \frac{2\lambda_n \omega}{\alpha_n^2 - \omega^2} \quad (3.4)$$

Здесь приняты обозначения

$$\lambda_n = 1/2 \alpha_n^2 \tau = \eta b_n^2 / 2\rho l^2, \quad \beta_n = \sqrt{\alpha_n^2 - \lambda_n^2} \quad (3.5)$$

$$\chi_n = i\beta_n, \quad \gamma_{1n,2n} = \lambda_n \mp \chi_n$$

Как и для максвелловского маятника, различный вид имеет лишь нестационарная часть решения, которая при большой вязкости описывается



Фиг. 2. Частотная зависимость угла сдвига фаз для стационарного режима: а — по модели Максвелла, б — по модели Фойгта. Цифрами указано значение времен релаксаций

первым слагаемым в выражении (3.2), а при малой — в (3.3). Для стационарного режима оба решения объединяются. Ограничиваясь первой гармоникой, представим результат выражением (2.13), причем теперь  $\psi_2$  дается выражением (3.4), а амплитуда  $\Phi(\omega, \tau)$  равна

$$\Phi(\omega, \tau) = \frac{M_0 z}{Il} [(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \lambda^2]^{-1/2} \quad (3.6)$$

На фиг. 1б приведена частотная зависимость амплитуды колебаний согласно выражению (3.6) для различных времен релаксаций  $\tau = 2\lambda/\alpha^2$ , причем, как и для максвелловского маятника, собственная частота колебаний  $\beta$  в упругой области ( $\tau = \eta = 0$ ) принималась равной единице. Сопоставление частотной зависимости сдвига фаз  $\psi_2$  обеих моделей приводит к фиг. 2, где в качестве параметра выбрано время релаксации.

4. Найдем потери энергии, обусловленные наличием сил вязкости. Наличие сдвига фаз между моментом приложенных сил и углом закручивания позволяет построить петлю гистерезиса

$$\left(\frac{\Phi_*}{\Phi}\right)^2 + \left(\frac{M}{M_0}\right)^2 - 2 \frac{\Phi_*}{\Phi} \frac{M}{M_0} \cos \psi_2 = \sin^2 \psi_2 \quad (4.1)$$

которая будет эллиптической для обеих моделей, причем для модели Фойгта  $\Phi_* \equiv \Phi - \Phi_0 = \Phi$ . Из выражений (2.9) и (4.1) следует, что для максвелловской среды при  $\omega\tau \rightarrow 0$  эллипс вырождается в окружность, так как  $\psi_2 \rightarrow 1/2\pi$ . В предельном случае упругой среды  $\omega\tau \rightarrow \infty$  эллипс вырожда-

ется в прямую. Среда Фойгта дает обычную для резонансных систем зависимость — окружность в резонансе и прямые в двух предельных случаях.

Площадь петли гистерезиса, пропорциональная потерям энергии за период, не может служить мерой внутреннего трения. В качестве меры внутреннего трения принимается величина, обратная добротности  $Q^{-1} = \Delta E / 2\pi E$ , где  $\Delta E / E$  — относительная потеря энергии за период ( $E$  — полная энергия). Так как

$$\Delta E = \oint M_0 \sin \omega t d\varphi = \pi M_0 \Phi(\omega, \tau) \sin \psi_2 \quad (4.2)$$

$$\left( E = \frac{\pi R^4}{4l} \mu(\omega, \tau) \Phi^2(\omega, \tau) \right)$$

то для внутреннего трения обеих моделей получим

$$Q_M^{-1} = \frac{1}{\omega \tau}, \quad Q_V^{-1} = \omega \tau \quad (4.3)$$

Здесь учтено, что динамические модули по модели Максвелла и по модели Фойгта соответственно равны

$$\mu_M(\omega, \tau) = \frac{\mu_\infty \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad \mu_V(\omega, \tau) = \mu$$

Индексы  $M$  и  $V$  относятся к моделям Максвелла и Фойгта соответственно.

В выражения (4.3) не входят геометрические характеристики крутильного маятника и внутреннее трение определяется лишь временем релаксации материала стержня. Поэтому формулу (4.3) можно получить и без решения краевой задачи. Действительно, подставляя в выражение (1.1) периодическое изменение деформации  $e_{ik} = e_{ik}^0 \sin \omega t$ , интегрируя и исключая время, получим уравнение петли гистерезиса эллиптической формы в виде

$$s_{ik} = \frac{2\mu}{1 + \omega^2 \tau^2} \left\{ e_{ik} \omega^2 \tau^2 \pm e_{ik}^0 \omega \tau \left[ 1 - \left( \frac{e_{ik}}{e_{ik}^0} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (4.4)$$

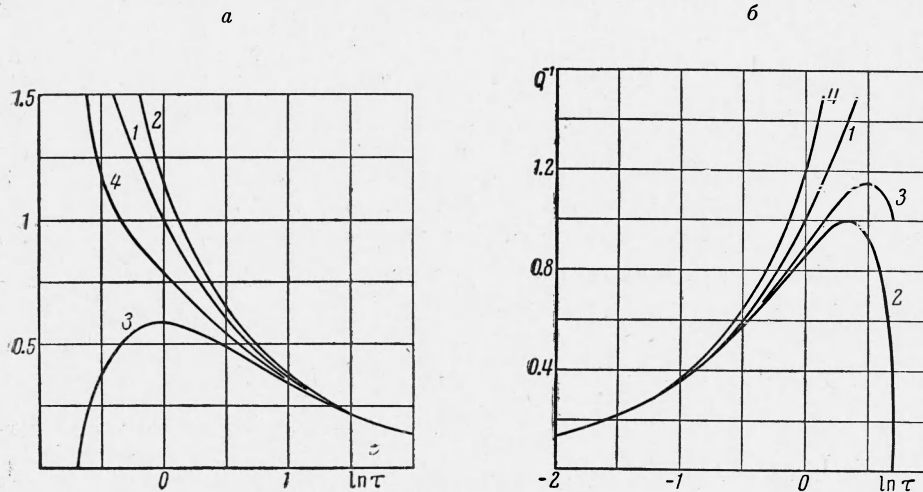
Относя площадь полученной петли к полной энергии единицы объема, получим для максвелловской среды  $Q_M^{-1}$ , совпадающее с выражением (4.3). Однако в этом случае не удается найти температурную зависимость амплитуды  $\Phi$  и угла сдвига фаз  $\psi_2$ , так как эти величины зависят от собственной частоты  $\beta$ , а последняя зависит от температуры.

Сопоставляя выражения  $Q_M^{-1}$  и  $Q_V^{-1}$  и учитывая, что для диффузионных процессов время релаксации  $\tau = \tau_0 \exp(U/RT)$ , где  $U$  — энергия активации,  $R$  — газовая постоянная, находим, что модель Фойгта не годится для описания фона внутреннего трения, так как дает уменьшение внутреннего трения с ростом температуры во всей области температур, что противоречит экспериментальным данным [11]. Другим недостатком этой модели является то, что она не дает стационарной ползучести, которая имеет место при высоких температурах благодаря диффузии вакансий [3].

5. Для экспериментального определения внутреннего трения при помощи вынужденных колебаний используется один из следующих методов: а) находится частотная зависимость амплитуды и измеряется ширина полосы частот  $\Delta\omega$ , на которой квадрат резонансной амплитуды убывает в два раза. Тогда за меру внутреннего трения принимают отношение  $\Delta\omega/\omega_r = Q^{-1}$  [12, 13]; б) во втором методе при помощи обратной связи частота вынуждающей силы поддерживается строго равной собственной частоте и в качестве меры внутреннего трения принимают величину, обратно про-

порциональную амплитуде колебания при постоянной амплитуде момента приложенных сил [14]; в) третий метод состоит в непосредственном измерении площади петли гистеризиса [15]. Сводка эмпирических формул для петель приводится в работе [10].

В случае большого затухания первый метод не может быть использован, так как при  $\omega\tau \sim 1$  резонансный пик либо слабо выражен, либо вовсе



Фиг. 3. Температурная зависимость внутреннего трения крутильного маятника: а — по модели Максвелла, б — по модели Фойгта; 1 — согласно формуле (4.3) при постоянной частоте, 2 — то же при частоте вынуждающей силы  $\omega$  равной частоте затухающих колебаний  $\beta$ , 3 — обратная амплитуда колебаний  $M_0 / I \Phi_r(\beta, \tau)$ , 4 — внутреннее трение по асимптотической формуле  $Q^{-1} \approx M_0 / I \Phi_r(\beta, \tau) \beta^2$

отсутствует (см. фиг. 1). Второй метод может быть использован для измерения внутреннего трения и при большом затухании. Однако обратная амплитуда лишь при малых величинах  $Q^{-1}$  пропорциональна  $\Delta E/E$ . Действительно, для максвелловского маятника при малом затухании собственная частота и резонансная амплитуда соответственно равны

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - 1/4\tau^2} \approx \alpha, \quad \Phi_r \approx M_0 \tau / I \alpha \quad (5.1)$$

Это дает

$$Q^{-1} = 1 / \omega \tau \approx M_0 / I \omega^2 \Phi_r \quad (5.2)$$

Так как в резонансе  $\omega = \beta$  и при малом затухании  $\beta \approx \text{const}$ , то температурная зависимость  $1 / \Phi_r$  может являться мерой внутреннего трения. Для крутильного маятника Фойгта при малом затухании

$$\omega \approx \alpha, \quad \Phi_r \approx M_0 / 2I\omega\lambda = M_0 / I\tau\omega^3$$

Отсюда для зависимости  $Q^{-1}$  от амплитуды получается выражение (5.2), как и для максвелловского маятника.

На фиг. 3 приведены кривые внутреннего трения  $Q^{-1}$  в функции  $\ln \tau \sim 1/T$ , кривые 1 и 2 построены по точной формуле (4.3), причем для кривой 1 частота  $\omega$  считалась не зависящей от температуры, а для кривой 2 принималось  $\omega = \beta$ , т. е. с ростом температуры частота уменьшалась. Кривые 3 и 4 построены по асимптотической формуле (5.2), причем в обоих случаях учитывалось изменение собственной частоты  $\beta = \omega$  с температурой. Кривая 3 дает обратную амплитуду  $M_0 / I \Phi_r \approx \omega^2 Q^{-1}$ ,

тогда как кривая 4 дает внутреннее трение  $Q^{-1}$ . Во всех случаях температурная зависимость  $\mu$  нерелаксационной природы игнорировалась. Так как рассматриваемая методика основана на возбуждении крутильного маятника на частоте его собственных колебаний, то учет температурной зависимости собственной частоты проводился по формуле  $\beta^2 = \alpha^2 - 1/4\tau^2$ . Фиг. 3а относится к максвелловской модели, используемой для описания фона внутреннего трения [6,7]. На фиг. 3б для сопоставления приведены аналогичные кривые, построенные для модели Фойгта. Последний рисунок иллюстрирует сказанное ранее о непригодности модели Фойгта для описания высокотемпературного внутреннего трения.

Из рассмотренного следует, что при большой величине потерь энергии (для максвелловской среды это имеет место при низкой частоте и высокой температуре) обратная амплитуда колебаний не может использоваться даже для качественного описания внутреннего трения. Качественно правильную температурную зависимость дает величина  $Q^{-1} \approx M_0/I\omega^2\Phi_r$ , которая тем точнее, чем меньше затухание.

Для количественного описания внутреннего трения в температурно-частотной области, характеризуемой большой диссипацией энергии, следует применять третий метод — непосредственное измерение площади петли гистерезиса. При малом затухании колебаний петля становится узкой и предпочтительными будут косвенные методы измерения внутреннего трения — по ширине резонансного пика или по обратной амплитуде.

Авторы признательны В. С. Постникову за обсуждение полученных результатов.

Поступила 19 VII 1963]

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Постников В. С. Температурная зависимость внутреннего трения чистых металлов и сплавов. Усп. физ. наук, 1958, т. 66, № 1.
2. Постников В. С. Рассеяние энергии колеблющимся образцом при высоких температурах. ФММ, 1959, т. 7, вып. 5.
3. Лифшиц И. М. К теории диффузионно-вязкого течения поликристаллических тел. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, № 4.
4. Финкельштейн Б. Н., Фастов Н. С. К теории релаксационных явлений в твердых телах. Докл. АН СССР, 1950, т. 71, № 5.
5. Фастов Н. С. К термодинамике необратимых процессов в упруго-деформированных телах. Сб. Проблемы металловедения и физики металлов, 1958, т. 5.
6. Шермергор Т. Д., Мешков С. И. К описанию фона внутреннего трения при крутильных колебаниях. ФММ, 1962, т. 13, № 6.
7. Мешков С. И., Шермергор Т. Д. О температурной зависимости внутреннего трения крутильного маятника. ПМТФ, 1962, № 6.
8. Шермергор Т. Д., Мешков С. И. О температурной зависимости коэффициента затухания максвелловского тела. Инж.-физ. ж., 1963, № 5.
9. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 1, ИЛ, 1958.
10. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. Физматгиз, 1960.
11. Постников В. С. К вопросу затухания колебаний цилиндрического образца. ФММ, 1958, т. 6, № 3.
12. Зинер К. Неупругость металлов. Сб. Внутреннее трение металлов, 1963.
13. Новик А. С. Внутреннее трение в металлах. Сб. Успехи физики металлов, 1956, т. 1.
14. Шаповал Б. И. Резонансный метод определения внутреннего трения в металлах. Сб. Исследования по жаропрочным сплавам, 1960, т. 7.
15. Roberts J. M., Brown N. Low Frequency Internal Friction in Zinc Single Crystals. Acta Metallurg., 1962, vol. 10, No. 4.