

УДК 681.3

ВЛИЯНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ШАГА СЕТКИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ОЦЕНКУ ДЕФОРМАЦИИ В МЕТОДЕ КОРРЕЛЯЦИИ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

С. В. Панин^{*,**}, В. В. Титков^{*}, П. С. Любутин^{*,**}

* Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, 634055 Томск, Россия

** Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
634050 Томск, Россия

E-mails: svp@ispms.tsc.ru, titkov.vladimir@gmail.com, p.lyubutin@gmail.com

Исследовано влияние величины шага сетки векторного поля перемещений на оценку деформации в методе корреляции цифровых изображений. Проанализированы причины возникновения и величина погрешности оценки деформации при обработке оптических изображений поверхности материала с различной текстурой. Изучена зависимость величины шага сетки при оценке деформации от величины перемещений, а также от наличия и размера области разрыва в поле деформаций. Предложен адаптированный алгоритм выбора шага сетки, позволяющий уменьшить погрешность вычисления деформации в 1,9 раза, при этом вычислительные затраты уменьшаются в 2,1 раза.

Ключевые слова: поле векторов перемещений, шаг сетки, корреляция цифровых изображений, погрешность оценки деформации, текстура, шум Гаусса.

DOI: 10.15372/PMTF20170307

Введение. Обеспечение надежности и ресурса работы элементов конструкций и деталей машин является одним из главных условий развития современной науки и техники, особенно при использовании гетерогенных (в том числе композиционных) материалов. При решении таких проблем применяются численные методы, однако при этом требуется проводить дополнительные экспериментальные исследования как для верификации моделей и расчетных данных, так и для детального исследования процессов, не имеющих точного математического описания [1].

Кроме того, при проведении расчетов прочности изделий с учетом сложного характера напряженно-деформированного состояния в них невозможно получить точные оценки только на основе результатов стандартных испытаний по определению механических свойств [2]. Поэтому необходимо развивать методы экспериментальной механики, позволяющие регистрировать и количественно оценивать поля напряжений и деформаций, например в области концентраторов напряжений либо структурных неоднородностей.

Работа выполнена в рамках проектов фундаментальных исследований РАН (2013–2020 гг.), при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-38-00526), а также в рамках гранта Президента РФ для молодых (до 35 лет) ученых и аспирантов, осуществляющих перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики (№ СП-1529.2015.5).

© Панин С. В., Титков В. В., Любутин П. С., 2017

В настоящее время разработано значительное количество экспериментальных методов оценки напряжений и деформаций в нагруженных образцах материалов или элементах конструкций [3–6]. Одним из наиболее быстро развивающихся методов является бесконтактный метод корреляции цифровых изображений (digital image correlation (DIC)) [7] основанный на использовании компьютерных технологий, позволяющих не только увеличить скорость сбора и обработки данных, но и более точно интерпретировать получаемые результаты. При этом поля перемещений и деформаций в исследуемом объекте могут быть получены в реальном времени. Цифровой способ регистрации, обработки и хранения данных позволяет визуализировать результаты измерений.

Вычисление деформации с использованием метода DIC включает два этапа: 1) построение поля векторов перемещений; 2) расчет компонент деформации [7]. На первом этапе, т. е. при построении векторного поля, требуется задать ряд параметров, в частности размеры площадки корреляции, зоны сканирования и шага сетки [8]. Задача выбора значений данных параметров является некорректно поставленной задачей, поэтому при ее решении можно применять известные методы регуляризации, изложенные в работах [9–12]. Однако в литературе имеются только рекомендации по выбору таких параметров, в то время как результаты их систематических (параметрических) исследований авторам настоящей работы найти не удалось.

В данной работе решается задача выбора шага сетки при построении поля векторов перемещений. Обычно данный параметр выбирается с учетом следующих условий [13]:

- 1) шаг должен быть достаточно малым, чтобы можно было максимально точно определить деформацию (на поверхности) материала;
- 2) размер шага сетки должен быть не больше минимального размера областей на поверхности материала, в которых имеет место деформация;
- 3) шаг сетки не должен быть очень мелким, так как в этом случае увеличится время построения поля векторов перемещений, а также погрешность, появляющаяся в результате численного дифференцирования величин перемещений.

Таким образом, возникает проблема выбора оптимального значения шага сетки при построении поля векторов перемещений. В настоящей работе исследуется влияние шага сетки векторного поля в методе DIC на точность определения деформации как в отдельных областях, так и во всем поле смещений.

При использовании метода DIC компоненты деформации рассчитываются путем численного дифференцирования перемещений (dU_x , dU_y — приращения перемещений участков изображения вдоль соответствующих осей) [14]. При вычислении производных применяется процедура численного дифференцирования [15]

$$y'(x_k) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} \frac{C_n^i y_i}{n!} \frac{d}{dt} \left(\frac{t(t-1) \cdots (t-n)}{t-i} \right) \Big|_{t=k}, \quad (1)$$

где $C_t^m = t(t-1) \cdots (t-m+1)/m!$; m — натуральное число; t — произвольное действительное число.

При $n = 2$ формула (1) принимает вид

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i-1}) - y(x_{i+1})}{2h} - \frac{h^2}{6} y'''(\xi),$$

где $(h^2/6)y'''(\xi)$ — остаточный член формулы численного дифференцирования, которым обычно пренебрегается. Оценка перемещений в узлах сетки также проводится с некоторой погрешностью $\delta > 0$. При вычислении производных перемещений указанные погрешности влияют на конечный результат. Суммарная погрешность вычисления производных

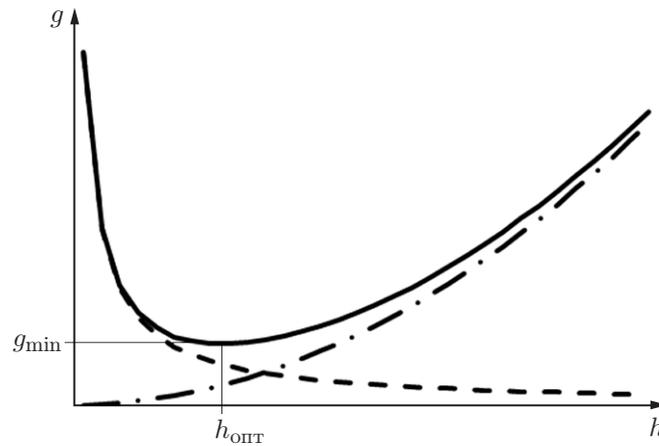


Рис. 1. Характерные зависимости $g(h)$ [16]:
 сплошная линия — $g = \delta/h + M_3h^2/6$, штриховая — $g = \delta/h$, штрихпунктирная —
 $g = M_3h^2/6$

определяется по формуле [12]

$$g(h) = \frac{\delta}{h} + \frac{M_3h^2}{6}, \quad (2)$$

где $M_3 = \max |y'''(x)|$. Характерные графики функции $g(h)$ приведены на рис. 1. Видно, что функция $g(h)$ имеет глобальный минимум g_{\min} , величина которого соответствует искомой оптимальной величине шага h .

В большинстве коммерческих пакетов, используемых для оценки деформации методом DIC (VIC 3D, Strain Master и пр.), реализовано вычисление смещений при равномерном шаге сетки. Однако в последнее время появились работы, в которых при определении перемещений используется сетка с неравномерным шагом либо гибридные экспериментально-теоретические подходы, сочетающие метод DIC и метод конечных элементов [17–22].

1. Методика исследований. Исследования проводились с использованием модельных изображений. Рассчитывались зависимости погрешности определения деформации (при ее заданной в модели величине) от шага сетки n векторного поля, изменяющегося в диапазоне от 4 до 124 пикселей (с шагом, равным 4 пикселя). Формирование серий модельных изображений включает два этапа: 1) генерирование текстуры изображения модельной поверхности; 2) генерирование серии ее изображений с учетом приращения деформации. Всего было получено две серии изображений.

1.1. *Модель многослойного изображения.* Данное модельное изображение (рис. 2,а) получено из заданного количества слоев псевдослучайных чисел, при этом каждый слой соответствовал определенной пространственной частоте [23].

1.2. *Модель окрашенной поверхности (спекла).* При использовании метода DIC для анализа неподготовленных поверхностей и увеличения контрастности с помощью двух баллонов краски напыляется спекл, представляющий собой темные округлые пятна на сером (белом) фоне [7]. При создании такой картины (рис. 2,б) формировались изображения, сходные с экспериментальными фотографиями образца с напыленным спеклом [24].

1.3. *Серия изображений модельной поверхности с учетом приращения деформации.* Для моделирования изменений, происходящих при нагружении поверхности по схеме одноосного растяжения, задавалось смещение каждой ее точки. При этом яркость каждого пикселя изображения пересчитывалась для заданного приращения деформации. Интерполирование проводилось с помощью B -сплайна. В результате из начального изображения

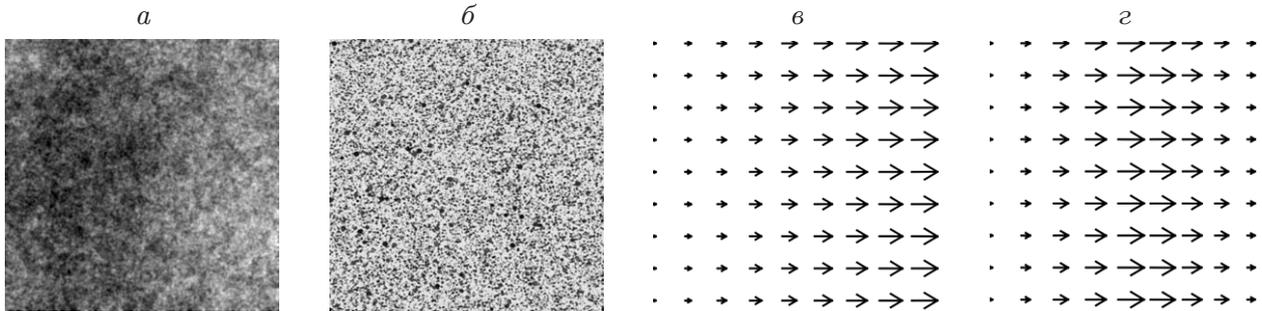


Рис. 2. Модели многослойного изображения (а) и окрашенной поверхности (спекла) (б), а также векторные поля в случаях однородной (в) и неоднородной (з) деформации

была получена вся серия с заданным конечным приращением деформации и известным распределением перемещений. Была сформирована серия изображений, имитирующих одноосное растяжение с однородной (рис. 2, в) и неоднородной (рис. 2, з) деформацией.

Неоднородность в поле деформаций создавалась путем одноосного растяжения правой половины изображения и одноосного сжатия левой. При растяжении возникает положительное приращение длины (смещение) правой половины изображения, в то время как сжатие сопровождается отрицательным приращением длины его левой половины (см. рис. 2, в, з). В результате были получены две серии, каждая из которых содержит девять изображений, имитирующих растяжение образца, с приращением деформации между изображениями 1 %, при этом полное удлинение изображений в серии составляло 8 %.

1.4. *Оценка погрешности определения деформации.* Оценивалась средняя абсолютная погрешность расчета продольной компоненты тензора дисторсии $\delta\varepsilon_{xx}$. В случае равномерного растяжения и сжатия заданная и экспериментально рассчитанная величины ε_{xx} должны быть постоянными во всем поле. В то же время в случае неоднородной деформации параметр ε_{xx} имеет положительное значение в правой части поля деформации и отрицательное в его левой части. Поэтому погрешность оценивалась как среднеарифметическая поэлементная абсолютная разность полей деформации, т. е. заданной (модельной) и расчетной величин ε_{xx} :

$$\delta\varepsilon_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N |\varepsilon_{xx м}^i - \varepsilon_{xx р}^i|.$$

Средняя по модулю относительная погрешность вычисляется как среднеарифметическое значение абсолютного отношения поэлементной разности компонент полей деформации (заданной (модельной) и расчетной величин ε_{xx}) к расчетной величине ε_{xx} :

$$\delta\varepsilon_{xx \text{ отн}} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \left| \frac{\varepsilon_{xx м} - \varepsilon_{xx р}}{\varepsilon_{xx р}} \right|.$$

Далее среднюю по модулю относительную погрешность будем называть относительной погрешностью.

2. Результаты расчетов и их обсуждение. Ниже приводятся результаты расчетов однородной и неоднородной деформации.

2.1. *Однородная деформация.* На рис. 3, а, б показаны зависимости величины погрешности $\delta\varepsilon_{xx}$ расчета продольной компоненты тензора дисторсии от размера шага сетки векторного поля h при значениях приращения деформации $\varepsilon = 1, 4, 8$ %. Видно, что с увеличением шага сетки параметр $\delta\varepsilon_{xx}$ уменьшается по логарифмическому закону. Также

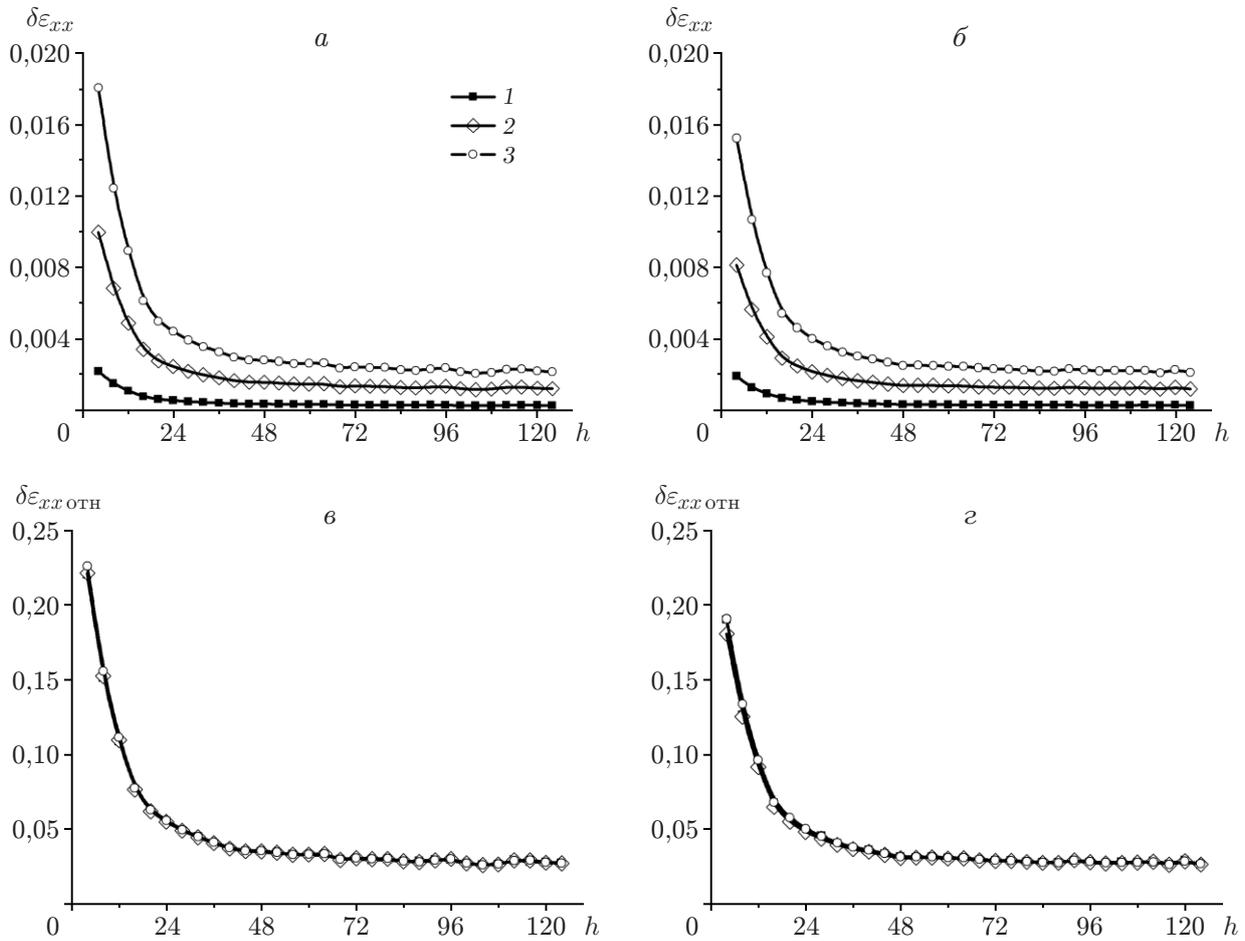


Рис. 3. Зависимости погрешности $\delta\varepsilon_{xx}$ (а, б) и относительной погрешности $\delta\varepsilon_{xx\text{отн}}$ (в, г) вычисления ε_{xx} от величины h шага сетки векторного поля при различных значениях приращений однородной деформации:
 а, в — модель многослойного изображения, б, г — окрашенная поверхность; 1 — $\varepsilon = 1\%$,
 2 — $\varepsilon = 4\%$, 3 — $\varepsilon = 8\%$

видно, что для модели многослойного изображения (см. рис. 3,а) и модели окрашенной поверхности (см. рис. 3,б) кривые $\delta\varepsilon_{xx}$ являются подобными, т. е. зависимость $\delta\varepsilon_{xx}(h)$ слабо зависит от текстуры изображения. Заметим, что с увеличением приращения деформации значения $\delta\varepsilon_{xx}$ увеличиваются. Для модели многослойного изображения (см. рис. 3,а) их значения при всех рассмотренных значениях приращения деформации больше, чем для модели окрашенной поверхности (см. рис. 3,б).

Анализ отношения $\delta\varepsilon_{xx}$ к ε_{xx} показал, что оно имеет приблизительно постоянное значение ($\delta\varepsilon_{xx}/\varepsilon \approx 0,002$), т. е. по мере приращения деформации значение $\delta\varepsilon_{xx}$ увеличивается по линейному закону. Абсолютная погрешность оценки деформации для двух серий изображений составляет $\delta\varepsilon_{xx} = 0,0001$ и $\delta\varepsilon_{xx} = 0,003$. Различие этих значений можно объяснить меньшей контрастностью многослойного изображения (см. рис. 2,а) по сравнению с окрашенной поверхностью (см. рис. 2,б) [7]. Зависимость величины относительной погрешности $\delta\varepsilon_{xx\text{отн}}$ от шага сетки h позволяет оценить его влияние на деформацию независимо от величины этой погрешности (см. рис. 3,в,г). Во всем интервале изменения шага сетки графики $\delta\varepsilon_{xx\text{отн}}$ для моделей изображений двух типов смещены относительно друг друга на постоянную величину, не превышающую 2,5 %.

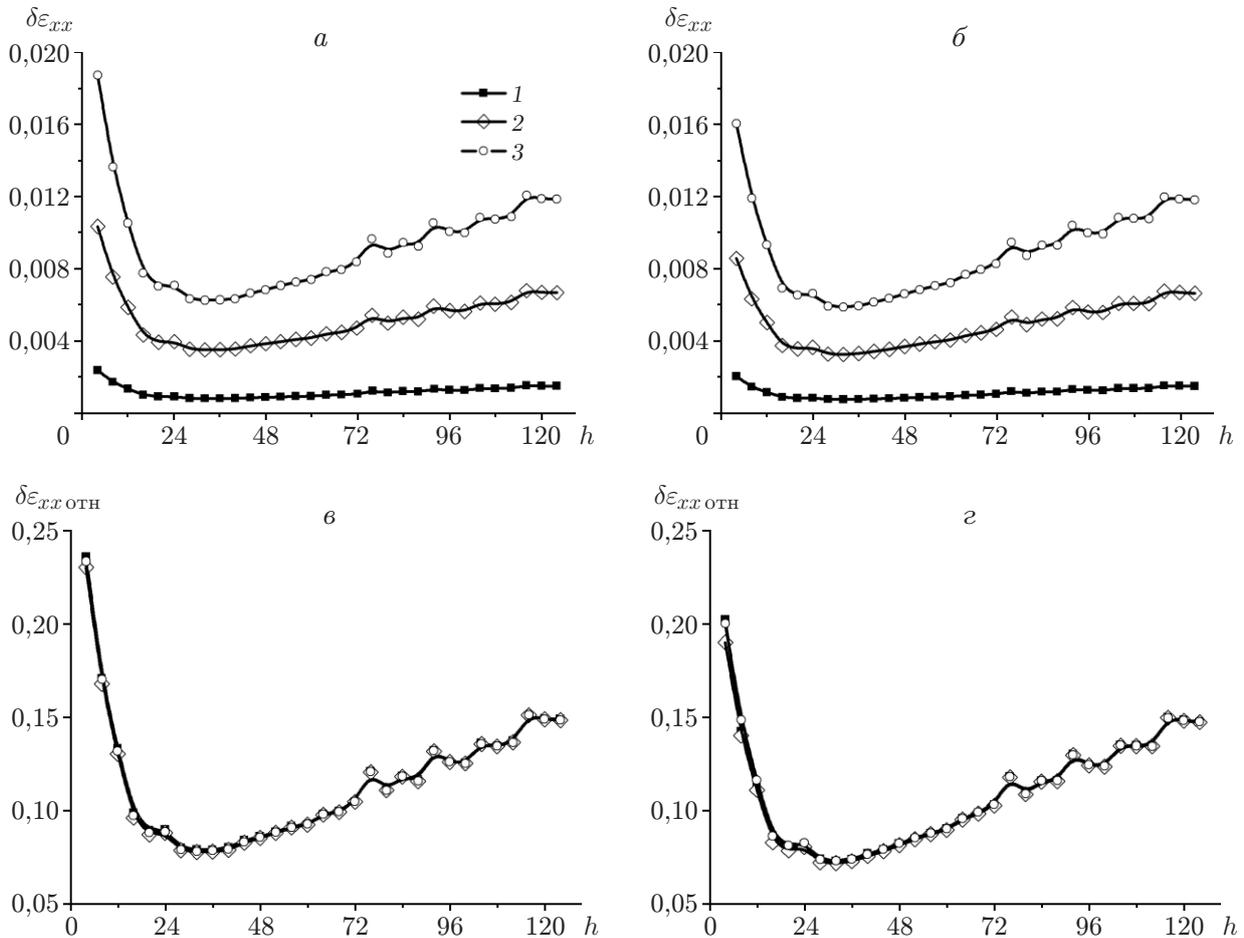


Рис. 4. Зависимости погрешности $\delta\varepsilon_{xx}$ (а, б) и относительной погрешности $\delta\varepsilon_{xx\text{отн}}$ (в, г) вычисления ε_{xx} от величины h шага сетки векторного поля при различных значениях приращений неоднородной деформации (обозначения те же, что на рис. 3)

Кроме того, из анализа данных на рис. 3 следует, что при величине шага сетки $h > 50$ не происходит существенного уменьшения погрешности определения деформации. Таким образом, в случае однородной деформации оптимальная величина шага сетки составляет $h \approx 50$, поскольку при $h < 50$ значительно увеличивается погрешность оценки деформации, в то время как при $h > 50$ увеличивается погрешность, обусловленная чрезмерным осреднением. В то же время в соответствии с поведением функции $g(h)$ (см. рис. 1) величина $\delta\varepsilon_{xx\text{отн}}$ должна иметь минимум при некоторой величине шага сетки, которая является оптимальной. Отсутствие такого минимума на кривой зависимости погрешности от величины шага сетки объясняется выбранной моделью приращения деформации. В данной работе использовалась модель равномерного растяжения, описываемая полиномом первой степени. В результате в формуле (2) второе слагаемое (зависящее от третьей производной) равно нулю.

2.2. Неоднородная деформация (разрыв поля деформации). Для изображений, моделирующих неоднородную деформацию, в соответствии с алгоритмом, изложенным в подп. 2.1, были рассчитаны и построены поля продольной компоненты ε_{xx} и получены оценки погрешностей $\delta\varepsilon_{xx}$ и $\delta\varepsilon_{xx\text{отн}}$ (рис. 4). Как и в случае однородной деформации (см. подп. 2.1), величина погрешности $\delta\varepsilon_{xx}$ зависит от приращения деформации (см. рис. 4, а, б), а зависимости относительной погрешности $\delta\varepsilon_{xx\text{отн}}$ от h при $\varepsilon = 1, 4, 8\%$ практически

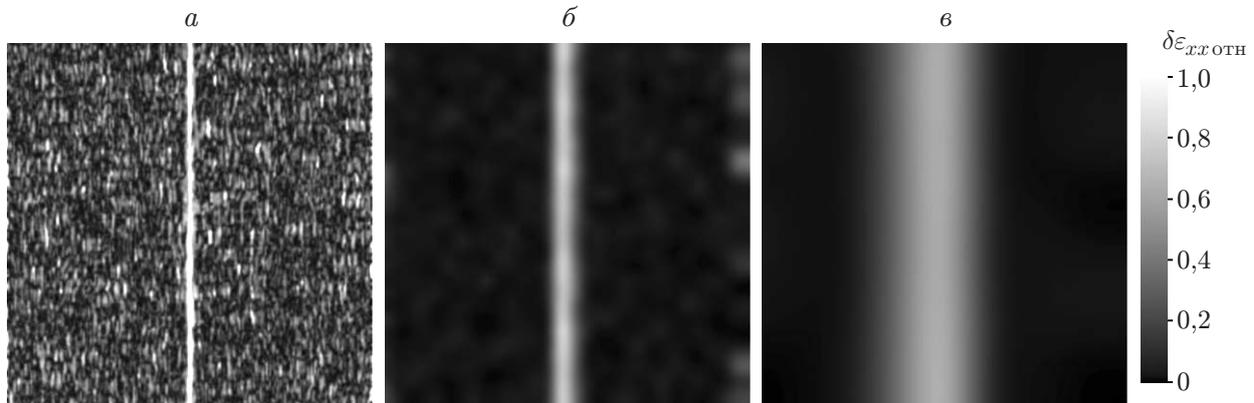


Рис. 5. Поля относительной погрешности определения деформации $\delta\varepsilon_{xx\text{отн}}$ при различной величине шага сетки:
 $a - h = 4$, $b - h = 32$, $v - h = 124$

идентичны (см. рис. 4, в, г). Влияние типа текстуры на погрешность оценки деформации такое же, как и в случае однородной деформации модельной поверхности (см. рис. 3).

В то же время в отличие от случая однородного распределения деформации на кривой зависимости погрешности оценки деформации от величины шага сетки h наблюдается четко выраженный минимум (см. рис. 4), что свидетельствует о существовании оптимальной величины шага сетки. Для используемых модельных изображений и величин приращения деформации величину шага сетки можно принять равной 32. При этом она не зависит ни от типа модельного изображения, ни от величины приращения деформации (см. рис. 4, а, б).

Для объяснения данного эффекта проведено сравнение полей относительных погрешностей оценки продольной компоненты тензора дисторсии $\delta\varepsilon_{xx\text{отн}}$ при различных величинах шага сетки (рис. 5). Независимо от шага сетки поле деформации рассчитывается в соответствии с размером исходных изображений либо анализируемой области изображения, поэтому размер полей деформации и соответственно размер полей погрешности совпадают. Соответствующие вычисления проводятся с использованием интерполирования B -сплайнами.

При малом значении шага сетки $h = 4$ вследствие недостаточно полной информации при дифференцировании возникают многочисленные локальные пики (выбросы), следствием чего является крайне неоднородное распределение относительной погрешности (см. рис. 5, а). При этом площадь области, в которой имеется разрыв поля деформаций, достаточно мала, поэтому она оказывает незначительное влияние на величину погрешности оценки деформации.

Разрыв поля деформации вызван изменением направления приращения перемещений и соответственно знака производной от функции перемещений. Таким образом, при малой величине шага сетки h векторного поля погрешность определения ε_{xx} обусловлена в основном погрешностями численного дифференцирования, а не погрешностями, вызванными разрывом поля деформаций. С увеличением шага сетки количество некорректно построенных векторов уменьшается, что приводит к уменьшению погрешностей численного дифференцирования. При этом увеличивается площадь области, в которой имеется разрыв поля деформаций. На рис. 5, б видно, что поле становится более однородным, в то время как размер области, в которой имеется разрыв, увеличивается. При дальнейшем увеличении шага сетки вплоть до максимального из используемых в данной работе ($h = 124$) размер области, в которой имеется разрыв поля деформаций, увеличивается в несколько раз (см. рис. 5, в). В этом случае влияние размера указанной области на погрешности $\delta\varepsilon_{xx}$ и $\delta\varepsilon_{xx\text{отн}}$ определения продольной компоненты тензора дисторсии становится определяющим.

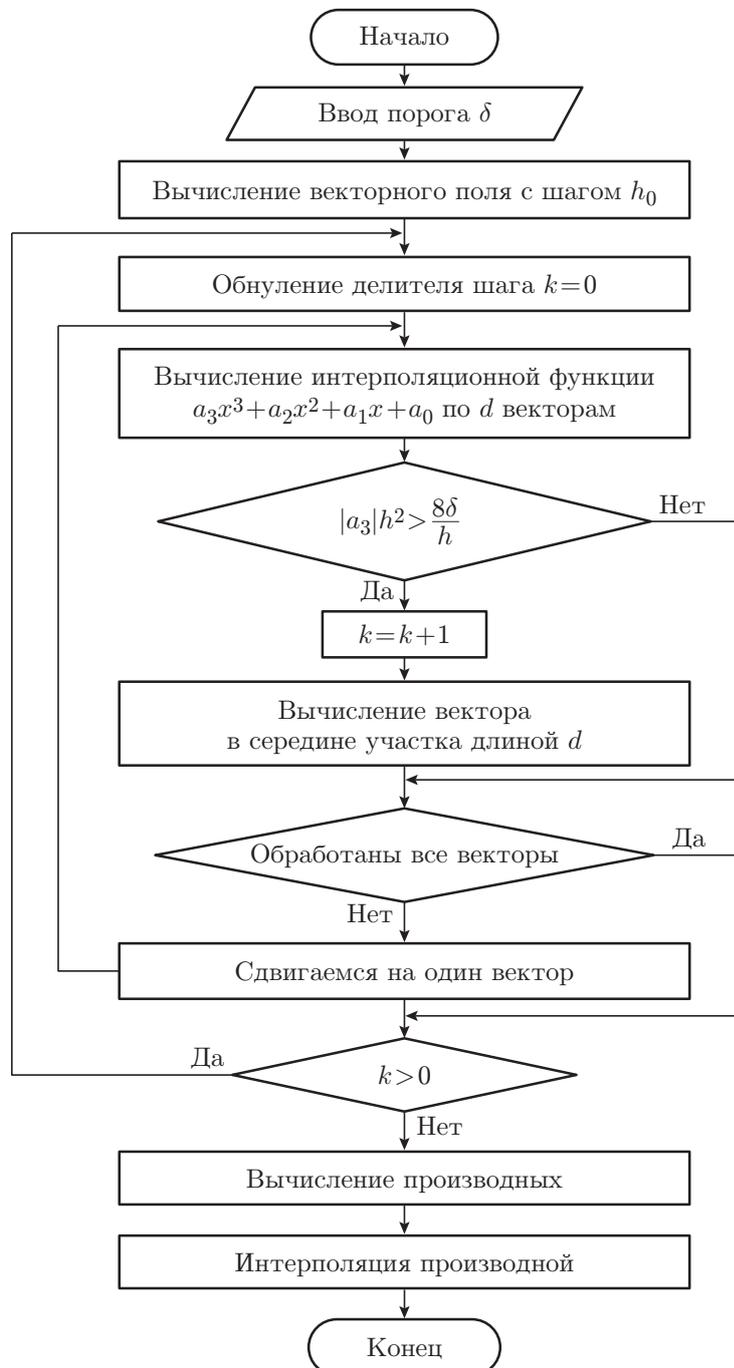


Рис. 6. Алгоритм выбора шага сетки

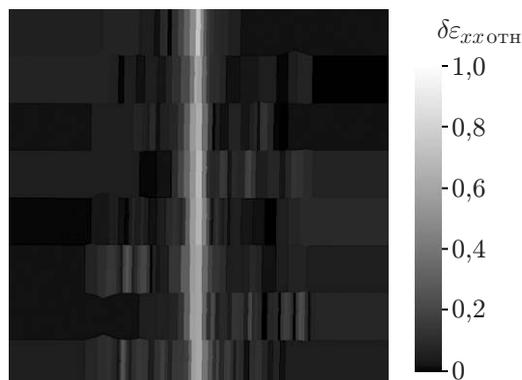


Рис. 7. Поле относительной погрешности определения деформации $\delta\varepsilon_{xx\text{отн}}$ при неравномерном шаге сетки

Таким образом, наличие минимума (экстремума) на кривых зависимостей $\delta\varepsilon_{xx}(h)$ и $\delta\varepsilon_{xx\text{отн}}(h)$ на рис. 4 обусловлено наличием погрешностей двух типов: погрешности численного дифференцирования недостаточно точно определенных перемещений и погрешности, вызванной наличием разрыва в поле деформации. Первая из указанных погрешностей уменьшается по мере увеличения шага сетки, вторая, наоборот, увеличивается. Таким образом, размер шага сетки, при котором суммарная ошибка ($\delta\varepsilon_{xx}; \delta\varepsilon_{xx\text{отн}}$) имеет минимум, следует считать оптимальным.

3. Алгоритм выбора шага сетки. В подп. 2.1 указано, что при моделировании перемещений на изображении используется полином первой степени. Данное условие ограничивает возможность проведения анализа влияния шага сетки на величину погрешности определения деформации, а также затрудняет выбор оптимального шага сетки в случае нелинейных приращений деформации. Поэтому был предложен алгоритм (рис. 6), в основе которого лежит учет суммарной погрешности вычисления производных. Тестирование предлагаемого алгоритма проводилось для изображений, моделирующих неоднородную деформацию (см. рис. 2, б, г). Для оценки эффективности работы алгоритма выбора шага сетки выполнялся расчет деформации. В результате построено поле продольной компоненты тензора дисторсии ε_{xx} и вычислена погрешность ее определения $\delta\varepsilon_{xx\text{отн}}$ (рис. 7).

При построении векторного поля с помощью предложенного алгоритма потребовалось определить 309 векторов. Суммарная погрешность оценки деформации составила $\delta\varepsilon_{xx\text{отн}} = 0,038$. В то же время наименьшая величина суммарной погрешности при использовании равномерного шага сетки $h = 32$ составила $\delta\varepsilon_{xx\text{отн}} = 0,071$ при количестве построенных векторов, равном 840. Таким образом, применение предлагаемого алгоритма позволило в 1,86 раза уменьшить погрешность оценки деформации и в 2,72 раза — количество векторов, необходимое для достоверной оценки деформации. Кроме того, временные затраты уменьшились в 2,1 раза: время расчета векторного поля при одновременном определении шага сетки по предложенному алгоритму составило 1,77 с (при использовании сетки с равномерным шагом — 3,74 с).

Тем не менее при использовании предложенного алгоритма время расчета, необходимое для построения одного (каждого) вектора, составило 5,7 мс (при использовании сетки с равномерным шагом — 4,5 мс). Однако за счет уменьшения общего числа рассчитываемых векторов полное время построения векторного поля уменьшается.

На рис. 7 видно, что поле относительной погрешности деформации $\delta\varepsilon_{xx\text{отн}}$ подобно полю, полученному при расчете с регулярным шагом сетки $h = 32$ (см. рис. 5, б), несмотря на то что вертикально ориентированная область максимальной погрешности в центре

изображения существенно сужается. По-видимому, этим объясняется уменьшение полной погрешности во всем поле.

Таким образом, предлагаемый алгоритм может быть использован для определения шага сетки и позволяет увеличить точность вычислений и уменьшить количество векторов, необходимое для получения оценки деформации.

4. Выводы. Проведенные в работе исследования позволяют сделать следующие выводы о влиянии величины шага сетки векторного поля на оценку деформации методом корреляции цифровых изображений. Увеличение шага сетки приводит к уменьшению погрешности оценки деформации в случае отсутствия неоднородности в соответствующем поле. Контрастность изображения (текстура поверхности) оказывает незначительное влияние на зависимость погрешности оценки деформации от величины шага сетки. В случае наличия неоднородности в поле деформации существует шаг сетки, при котором погрешность определения деформации минимальна. Величина оптимального шага сетки не зависит от величины приращения деформации. Предложен адаптированный алгоритм выбора шага сетки, позволяющий уменьшить погрешность вычисления деформации в 1,86 раза и одновременно уменьшить вычислительные затраты в 2,1 раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Разумовский И. А., Одинцев И. Н.** Экспериментальный анализ нелинейных динамических процессов с использованием оптико-интерференционных методов // Вестн. науч.-техн. развития. 2012. № 8. С. 35–56.
2. **Вильдеман В. Э.** Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов / В. Э. Вильдеман, Ю. В. Соколкин, А. А. Ташкинов. М.: Наука, 1997.
3. **Калтофф И.** Теневой оптический метод каустик // Экспериментальная механика: В 2 т. М.: Мир, 1990. Т. 1. С. 492–563.
4. **Gloud G. L.** Optical methods in engineering analyses. Cambridge: Univ. Press, 1998.
5. **Ахметзянов М. Х., Албаут Г. Н., Барышников В. Н.** Исследование локализации деформаций и напряжений в шейке тонкой полосы методом фотоупругих покрытий // Физ. мезомеханика. 2004. Т. 7, № S1-1. С. 347–350.
6. **Digital speckle pattern interferometry and related techniques** / Ed. by P. K. Rastogi. N. Y.: John Wiley and Sons, 2001.
7. **Sutton M. A.** Image correlation for shape, motion and deformation measurements: basic concepts, theory and applications / M. A. Sutton, J.-J. Orteu, H. Schreier. N. Y.: Springer, 2009.
8. **Любутин П. С., Панин С. В.** Исследование точности и помехоустойчивости построения векторов перемещений при оценке деформаций оптико-телевизионным методом // Вычисл. технологии. 2006. Т. 11, № 2. С. 52–66.
9. **Тихонов А. Н.** Методы решения некорректно поставленных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. М.: Наука, 1973.
10. **Лаврентьев М. М.** Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1973.
11. **Тихонов А. Н.** Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. М.: Наука, 1990.
12. **Димаки А. В., Светлаков А. А.** Регуляризация решения задачи идентификации при использовании алгоритма чувствительности // Изв. Том. политехн. ун-та. 2009. Т. 314, № 5. С. 27–31.
13. **Рудяк Ю. В.** Математический анализ. [Электрон. ресурс]. М.: Центр развития электрон. обучения Моск. фин.-пром. ун-та “Синергия”, 2013. Режим доступа: http://free.megacampus.ru/xbookM0017/index.html?go=part-063*page.htm.

14. **Физическая** мезомеханика и компьютерное конструирование материалов: В 2 т. / Под ред. В. Е. Панина. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1995.
15. **Березин И. С.** Методы вычислений: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., перераб. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. М.: Физматгиз, 1962. Т. 1.
16. **Вержбицкий В. М.** Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2001.
17. **Wang X., Ma S. P.** Mesh-based digital image correlation method using non-uniform elements for measuring displacement fields with high gradient // Exp. Mech. 2014. V. 54. P. 1545–1554.
18. **Hild F., Roux S.** Comparison of local and global approaches to digital image correlation // Exp. Mech. 2012. V. 52. P. 1503–1519.
19. **Ma S. P., Zhao Z. L., Wang X.** Mesh-based digital image correlation method using higher order isoparametric elements // J. Strain Anal. Engng. 2012. V. 47. P. 163–175.
20. **Sun Y. F., Pang J. H. L., Wong C. K., et al.** Finite element formulation for a digital image correlation method // Appl. Opt. 2005. V. 44. P. 7357–7363.
21. **Besnard G., Hild F., Roux S.** “Finite-element” displacement fields analysis from digital images: application to Portevin — Le Chatelier bands // Exp. Mech. 2006. V. 46. P. 789–803.
22. **Moerman K. M., Holt C. A., Evans S. L., et al.** Digital image correlation and finite element modelling as a method to determine mechanical properties of human soft tissue in vivo // J. Biomech. 2009. V. 42. P. 1150–1153.
23. **Панин С. В., Титков В. В., Любутин П. С.** Инкрементный подход к определению перемещений фрагментов изображений при построении векторных полей // Автометрия. 2014. Т. 50, № 2. С. 39–49.
24. **Панин С. В., Титков В. В., Любутин П. С.** Выбор параметров алгоритма трехмерного рекурсивного поиска при построении векторов перемещений с использованием иерархического подхода // Автометрия. 2015. Т. 51, № 2. С. 27–37.

*Поступила в редакцию 28/І 2016 г.,
в окончательном варианте — 10/VI 2016 г.*
