4. **Виноградов А. М., Красильщик И. С.** Один метод вычисления высших симметрий нелинейных эволюционных уравнений и нелокальные симметрии // ДАН СССР.— 1980.— Т. 253, № 6.
5. **Лейбович С., Сибасс Р.** Примеры диссипативных и диспергирующих систем, описываемых уравнениями Бюргерса и Кортевега-де Вриза // Нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
6. **Макаров С. Н., Хамзина Б. С.** Эволюция гармонического сигнала в газодинамическом приближении теории плоских волн конечной амплитуды // Акуст. журн.— 1988.— Т. 34, № 1.
7. **Дьярмати И.** Неравновесная термодинамика.— М.: Мир, 1974.
8. **Курант Р., Фридрихс К.** Сверхзвуковое течение и ударные волны.— М.: ИЛ, 1950.
9. **Кестенбойм Х. С., Росляков Г. С., Чудов Л. А.** Точечный взрыв. Методы расчета. Таблицы.— М.: Наука, 1974.
10. **Nakamura Y., Nakashima Y.** Analysis of unsteady shock propagation generated by interaction with simple expansion waves // Techn. Repts Kumamoto Univ.— 1987.— V. 36, N 1.
11. **Макаров С. Н., Филиппов Б. В.** К расчету волн конечной амплитуды в газодинамическом приближении // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 2.
12. **Макаров С. Н., Хамзина Б. С.** Численный расчет эволюции интенсивных импульсов в газодинамическом приближении // Вестн. ЛГУ. Сер. 1.— 1987.— № 3.

г. Ленинград *Поступила 3/IV 1989 г.*

УДК 517.9:536.46

Вит. А. Вольперт, Вл. А. Вольперт

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АСИМПТОТИКИ СКОРОСТИ ВОЛНЫ ГОРЕНИЯ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Метод последовательных приближений может быть использован не только при изучении качественных вопросов, таких как существование решений, но и при определении количественных характеристик этих решений. Известны отдельные работы (см. [1]), в которых данный подход применялся к задачам горения, но существенного развития в теории горения он не получил. По-видимому, это объясняется тем, что не всегда удается подобрать удачную реализацию метода (их может быть несколько) и начальное приближение.

В настоящей работе метод последовательных приближений использован для определения скорости волны горения в конденсированной среде. Построены сходящиеся приближения, монотонно убывающие к искомому решению, и приближения, монотонно возрастающие. Таким образом получены оценки скорости сверху и снизу, причем удачный выбор начального приближения дает совпадение асимптотик этих оценок уже для первых приближений, что позволяет найти асимптотику скорости в старших членах.

1. Постановка задачи. Система дифференциальных уравнений, описывающая распространение фронта реакции n-го порядка в конденсированной среде, имеет вид

$$\theta'' - u\theta' + (1/\gamma)a^n\Phi(\theta) = 0,\ ua' + (1/\gamma)a^n\Phi(\theta) = 0. \tag{1.1}$$

Здесь θ — безразмерная температура; a — концентрация исходного вещества; u — скорость волны; штрих обозначает дифференцирование по пространственной переменной x;

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} 0, & (-1 \leqslant \theta < -1 + h), \\ \exp\dfrac{\theta}{\gamma + \beta\theta}, & (-1 + h \leqslant \theta \leqslant 0); \end{cases} \tag{1.2}$$

β и γ — традиционные для задач горения малые параметры; $\beta = RT_*/E$; $\gamma = RT_*^2/qE$; T_* — температура горения; $T_* = T_н + q$; $T_н$ — начальная температура смеси; q — адиабатический разогрев реакции; E — энергия активации реакции; R — газовая постоянная; h — величина обрезки источника. Граничные условия при $x \to \pm\infty$: $\theta(-\infty) = -1$, $a(-\infty) = 1$; $\theta(+\infty) = a(+\infty) = 0$.

Асимптотика скорости волны горения для указанной модели рассматривалась в [2—5]. В настоящее время можно считать, что вопрос об определении двух старших членов неравномерной асимптотики при $n < 2$ решен. Неравномерность асимптотики нами понимается в следующем смысле: предел асимптотики по малым γ при $n \to 2$ равен нулю и не совпадает с асимптотикой по γ, полученной при $n = 2$. Такая ситуация характерна для случая последовательного применения метода сращивания асимптотических разложений по степеням γ. Метод последовательных приближений позволяет строить равномерную асимптотику при $n \leqslant 2$.

2. Реализация метода последовательных приближений при $0 \leqslant n \leqslant 1$. Система уравнений (1.1) имеет первый интеграл и может быть обычным образом сведена к одному уравнению

$$\frac{da}{d\theta} = -\frac{1}{\gamma u^2} \frac{a^n \exp \dfrac{\theta}{\gamma + \beta\theta}}{a(\theta) + \theta} \tag{2.1}$$

с граничными условиями

$$a(-1 + h) = 1, \ a(0) = 0 \tag{2.2}$$

(θ — новая независимая переменная, $-1 + h \leqslant \theta \leqslant 0$, $a(\theta)$— неизвестная функция). Из (2.1), (2.2) легко получить

$$a^{2-n}(\theta) = 1 - \frac{2-n}{\gamma u^2} \int\limits_{-1+h}^{\theta} \frac{\exp \dfrac{\tau}{\gamma + \beta\tau}}{1 + \tau/a} d\tau; \tag{2.3}$$

$$u^2 = \frac{2-n}{\gamma} \int\limits_{-1+h}^{0} \frac{\exp \dfrac{\tau}{\gamma + \beta\tau}}{1 + \tau/a} d\tau. \tag{2.4}$$

Положим

$$a_{i+1}^{2-n}(\theta) = 1 - \frac{2-n}{\gamma u^2} \int\limits_{-1+h}^{\theta} \frac{\exp \dfrac{\tau}{\gamma + \beta\tau}}{1 + \tau/a_i(\tau)} d\tau, \quad a_0(\theta) \equiv 1. \tag{2.5}$$

Поскольку $a_0(\theta) \geqslant a(\theta)$ при $-1 + h \leqslant \theta \leqslant 0$, то в силу (2.3), (2.5) $a(\theta) \leqslant a_1(\theta) \leqslant a_0(\theta)$ при $-1 + h \leqslant \theta \leqslant 0$. Отсюда по индукции

$$a(\theta) \leqslant a_{i+1}(\theta) \leqslant a_i(\theta) \ (-1 + h \leqslant \theta \leqslant 0). \tag{2.6}$$

Обозначим через $\tilde{a}(\theta)$ предел последовательности функций $\{a_i(\theta)\}$. Делая предельный переход в (2.5) (под знаком интеграла можно переходить к пределу по теореме Лебега в силу неравенства (2.6)), находим, что $\tilde{a}$ удовлетворяет уравнению (2.3) и, следовательно, уравнению (2.1). Ясно также, что если u — скорость волны, то $\tilde{a}(-1 + h) = 1$, $\tilde{a}(0) = 0$.

Таким образом, получена убывающая последовательность функций, сходящаяся к решению, и соответствующая последовательность неравенств для скорости

$$u^2 > F_i(u^2) \equiv \frac{2-n}{\gamma} \int\limits_{-1+h}^{0} \frac{\exp \dfrac{\tau}{\gamma + \beta\tau}}{1 + \tau/a_i(\tau)} d\tau \quad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.7}$$

правые части которых — функции от u^2. Видно, что F_i монотонно убывают по u^2 и $F_{i+1} > F_i$. Если через u_i^2 обозначить решение уравнения

$$u^2 = F_i(u^2), \tag{2.8}$$

то для функции (2.5), где вместо u подставлено u_i, $a_{i+1}(0) = 0$. Поэтому $F_{i+1}(u^2)$ определена при $u^2 > u_i^2$. Таким образом, решение уравнения (2.8) существует, единственно и последовательность чисел $\{u_i\}$ сходится, возрастая, к значению скорости.

Заметим, что последовательные приближения (2.5) определены и сходятся к решению для любых значений $n \geqslant 0$, однако выражение для скорости (2.4) и неравенства (2.7) имеют место только при $n < 2$.

Наряду с функциями $a_i(\theta)$ рассмотрим функции $\alpha_i(\theta)$:

$$\alpha_i^{2-n}(\theta) = \frac{2-n}{\gamma u^2}\int\limits_{\theta}^{0} \frac{\exp\dfrac{\tau}{\gamma+\beta\tau}}{1+\tau/a_i(\tau)}\,d\tau \quad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.9}$$

Из представления решения

$$a^{2-n}(\theta) = \frac{2-n}{\gamma u^2}\int\limits_{\theta}^{0} \frac{\exp\dfrac{\tau}{\gamma+\beta\tau}}{1+\tau/a(\tau)}\,d\tau \tag{2.10}$$

и неравенств (2.6)

$$\alpha_i(\theta) \leqslant \alpha_{i+1}(\theta) \leqslant a(\theta),\ i = 0, 1, 2, \ldots\ (-1+h \leqslant \theta \leqslant 0). \tag{2.11}$$

Существование интеграла в (2.9) следует из того, что определен интеграл в (2.10), и из неравенств (2.6).

Пользуясь представлением скорости (2.4) и неравенствами (2.11), получим

$$u^2 < \frac{2-n}{\gamma}\int\limits_{-1+h}^{0} \frac{\exp\dfrac{\tau}{\gamma+\beta\tau}}{1+\tau/\alpha_i(\tau)}\,d\tau \quad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.12}$$

Существование интеграла в (2.12) при всех i вытекает, очевидно, из существования интеграла при $i = 0$. Для чего достаточно потребовать, чтобы выполнялись условия

$$\alpha_0(\theta) > -\theta \quad (0 > \theta \geqslant -1+h) \tag{2.13}$$

и

$$\lim_{\theta\to 0}(-\theta/\alpha_0(\theta)) < 1. \tag{2.14}$$

При $n > 1$ (2.13) нарушается вблизи нуля. В случае $n \leqslant 1$, который рассматривается в этом пункте, оно следует из неравенства $\alpha_0^{2-n}(\theta) > -\theta$, т. е.

$$J_0(\theta) \equiv \frac{2-n}{\gamma u^2}\int\limits_{\theta}^{0} \frac{\exp\dfrac{\tau}{\gamma+\beta\tau}}{1+\tau}\,d\tau > -\theta \quad (-1+h \leqslant \theta < 0).$$

Легко проверяется, что $J_0''(\theta) < 0$ при $\gamma < h$. Так как $J_0(0) = 0$ и $J_0(-1+h) \to 1$ при $\gamma \to 0$ ($u^2 \to 2-n$ при $\gamma \to 0$ [6]), то (2.13) выполняется при достаточно малых γ. Значение предела в (2.14) равно нулю при $n < 1$ и γu^2 при $n = 1$.

Правую часть в (2.12) обозначим $\Phi_i(u^2)$. Видно, что при $u = u_i$ функции a_{i+1} и α_i совпадают, поэтому $\Phi_i(u_i^2) = F_{i+1}(u_i^2)$. Далее, функции $\Phi_i(u^2)$ являются возрастающими и в области определения $\Phi_{i+1} < \Phi_i$. Если через $\tilde{u}_i^2$ обозначим решение уравнения

$$u^2 = \Phi_i(u^2) \tag{2.15}$$

(точнее, наименьшее из решений), то находим убывающую последовательность чисел $\tilde{u}_i^2$, сходящуюся к квадрату скорости. Разрешимость (2.15) при $i > 0$ следует из разрешимости при $i = 0$, которая имеет место как будет видно из дальнейшего, при достаточно малых γ.

3. Асимптотика скорости при $0 \leqslant n \leqslant 1$. Выше показано, что выполняется неравенство

$$F_1(u^2) < u^2 < \Phi_0(u^2).$$

В этом пункте приведены два старших члена асимптотического разложения функций F_1 и Φ_0 при $\gamma \to 0$. Так как эти разложения совпадают, можно получить асимптотику скорости. Заметим, что для функций F_i

и Φ_{i-1} $(i > 1)$ будет совпадать большее число членов разложений, что дает следующие члены асимптотики скорости. Оценка (2.7) при $i = 0$ совпадает с оценкой, полученной минимаксным методом [6] а функция $a_1(\theta)$ — с используемой там основной пробной функцией.

Функцию F_1 представим в виде $F_1 = F_{11} + F_{12}$,

где
$$F_{11} = (2-n) \int\limits_{(-1+h)/\gamma}^{0} \exp \frac{\theta}{1+\beta\theta}\, d\theta;$$

$$F_{12} = (2-n)\gamma \int\limits_{(-1+h)/\gamma}^{0} \frac{-\theta \exp \frac{\theta}{1+\beta\theta}\, d\theta}{\gamma\theta + \left[1 - \frac{2-n}{u^2} \int\limits_{(-1+h)/\gamma}^{\theta} \frac{\exp \frac{\tau}{1+\beta\tau}}{1+\gamma\tau}\, d\tau\right]^{1/(2-n)}}.$$

В выражении для F_{11} сделаем замену переменных $x = \beta^{-1}(1+\beta\theta)^{-1}$ под знаком интеграла и воспользуемся асимптотическим представлением неполной гамма-функции

$$\int\limits_{(-1+h)/\gamma}^{0} \exp \frac{\theta}{1+\beta\theta}\, d\theta = \frac{1}{\beta^2} \exp \frac{1}{\beta} \left[-\frac{e^{-x}}{x}\Bigg|_{x=1/\beta}^{x=\frac{1/\beta}{1+\beta(-1+h)/\gamma}}, \right.$$
$$\left. -\Gamma\left(0, \frac{1}{\beta}\right) + \Gamma\left(0, \frac{1/\beta}{1+\beta\frac{-1+h}{\gamma}}\right)\right] = 1 - 2\beta + o(\gamma).$$

Обозначим через I_{12} интеграл в выражении F_{12}. Если формально перейдем в нем к пределу при $\gamma \to 0$, то

$$\lim_{\gamma\to 0} I_{12} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{-\theta \exp \theta}{(1-\exp\theta)^{1/(2-n)}}\, d\theta, \tag{3.1}$$

и асимптотическое представление для функции F_1 имеет вид

$$F_1 = (2-n)\left[1 - 2\beta - \gamma \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\theta \exp \theta\, d\theta}{(1-\exp\theta)^{1/(2-n)}} + o(\gamma)\right].$$

Для обоснования предельного перехода (3.1) интеграл I_{12} нужно разбить на два интеграла с пределами от $(-1+h)/\gamma$ до $-N$ и от $-N$ до 0. Первый из них при достаточно большом N и малом γ является малой величиной, а во втором интеграле с постоянными пределами можно сделать предельный переход $\gamma \to 0$ по теореме Лебега.

Аналогично находим асимптотическое представление функции $\Phi_0(u^2)$. Заметим, что если не пользоваться сходимостью $u^2 \to 2 - n$ при $\gamma \to 0$, то при фиксированном u^2

$$\Phi_0(u^2) = (2-n)\left[1 - 2\beta + \gamma\left(\frac{u^2}{2-n}\right)^{1/(2-n)} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{-\theta \exp\theta\, d\theta}{(1-\exp\theta)^{1/(2-n)}} + o(\gamma)\right].$$

Отсюда следует, в частности, разрешимость (2.15) при малых γ, $i = 0$. Таким образом, при $0 \leqslant n \leqslant 1$ два старших члена асимптотики оценок сверху и снизу совпадают, следовательно, асимптотика скорости имеет вид

$$u^2 = (2-n)\left(1 - 2\beta + \gamma \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \exp(-x)\, dx}{[1-\exp(-x)]^{1/(2-n)}} + o(\gamma)\right). \tag{3.2}$$

Коэффициент при γ может быть представлен также как

$$\int_0^\infty \frac{x \exp(-x)\,dx}{[1-\exp(-x)]^{1/(2-n)}} = \frac{2-n}{n-1}\left[\Psi(1) - \Psi\left(\frac{3-2n}{2-n}\right)\right],$$

где $\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$; $\Gamma(z)$— гамма-функция; $\Psi(z)$— дигамма-функция.

Асимптотика скорости (3.2) для $0 \leqslant n \leqslant 1$ совпадает с асимптотикой, полученной в [2, 4] сращиванием асимптотических разложений.

4. Метод последовательных приближений при $1 < n \leqslant 2$. Начальное приближение, рассмотренное в п. **3**, не позволяет получить асимптотику оценки сверху при $n > 1$. Поэтому зададим другое начальное приближение. Рассмотрим уравнение

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{1}{\gamma u^2}\frac{b^n}{b+\theta}. \tag{4.1}$$

Сравнивая (2.1) и (4.1), видим, что если $b(\theta) = a(\theta)$, то $db/d\theta < da/d\theta$, т. е. траектории уравнения (4.1) пересекают траектории (2.1) сверху вниз. Поэтому решение уравнения (4.1) с граничным условием $b(0) = 0$ при некотором $\theta = \theta_0$ становится равным единице. В качестве начального приближения возьмем функцию $b_0(\theta)$, совпадающую с указанным решением, когда оно меньше единицы, и равную единице при $-1 + h \leqslant \theta \leqslant \leqslant \theta_0$. Таким образом,

$$a(\theta) \leqslant b_0(\theta) \leqslant 1 \quad (-1 + h \leqslant \theta \leqslant 0) \tag{4.2}$$

($a(\theta)$— решение задачи (2.1), (2.2)). Последующие приближения зададим, как и ранее, в виде

$$b_{i+1}^{2-n}(\theta) = 1 - \frac{2-n}{\gamma u^2}\int_{-1+h}^{\theta} \frac{\exp\dfrac{\tau}{\gamma+\beta\tau}}{1+\tau/b_i(\tau)}\,d\tau, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Из (4.2) следует $a(\theta) \leqslant b_i(\theta) \leqslant a_i(\theta)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ $(-1 + h \leqslant \theta \leqslant 0)$, а отсюда — сходимость последовательных приближений $b_i(\theta)$ к решению $a(\theta)$ и неравенства

$$u^2 > \frac{2-n}{\gamma}\int_{-1+h}^{0} \frac{\exp\dfrac{\tau}{\gamma+\beta\tau}}{1+\tau/b_i(\tau)}\,d\tau, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Для того чтобы получить оценки скорости сверху, надо задать еще одну последовательность функций, оценивающих решение снизу:

$$\beta_i^{2-n}(\theta) = \frac{2-n}{\gamma u^2}\int_{\theta}^{0} \frac{\exp\dfrac{\tau}{\gamma+\beta\tau}}{1+\tau/b_i(\tau)}\,d\tau, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Если

$$\beta_i(\theta) > -\theta \quad (-1 + h \leqslant \theta < 0), \tag{4.3}$$

то

$$u^2 < \frac{2-n}{\gamma}\int_{-1+h}^{0} \frac{\exp\dfrac{\tau}{\gamma+\beta\tau}}{1+\tau/\beta_i(\tau)}\,d\tau, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.4}$$

Отметим, что из (4.3) еще не вытекает конечность интеграла в (4.4). Так как неравенство (4.4) будет использовано далее при $i = 0$, необходимо проверить, что в этом случае оно выполняется.

При $\theta \leqslant \theta_0$ $b_0(\theta) \equiv 1$, и неравенство (4.3) доказывается так же, как (2.13). Функция β_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\beta_0}{d\theta} = -\frac{1}{\gamma u^2}\frac{\beta_0^{n-1} b_0 \exp\dfrac{\theta}{\gamma+\beta\theta}}{b_0+\theta} \tag{4.5}$$

с граничным условием $\beta_0(0) = 0$. Поэтому справедливость (4.3) при $\theta_0 \leqslant \theta < 0$ следует из неравенства

$$(4.6) \qquad -\frac{1}{\gamma u^2} \frac{(-\theta)^{n-1} b_0 \exp \dfrac{\theta}{\gamma + \beta\theta}}{b_0 + \theta} < -1,$$

которое означает, что траектории уравнения (4.5) пересекают прямую $\beta_0 = -\theta$ сверху вниз. Вводя обозначения

$$(4.7) \qquad \varepsilon = (\gamma\sigma m)^m/\gamma, \ \psi_m(z) = z^{1-m} E_m(z) \exp z,$$
$$m = 1/(n-1), \ z = \gamma\sigma m [b_0(\theta)]^{-1/m}$$

(E_m — интегральная показательная функция), найдем, решая (4.1), $\theta/b_0(\theta) = -zE_m(z) \exp z$, и представим (4.6) как

$$(4.8) \qquad m\,[\psi_m(z)]^{1/m} \exp \frac{-\varepsilon\psi_m(z)}{1 - \beta\varepsilon\psi_m(z)} \geqslant 1 - zE_m(z) \exp z \quad (z \geqslant \gamma\sigma m).$$

Справедливость (4.8) проверяется несложными выкладками, в которых нужно учесть неравенства $1/(z+m) \leqslant E_m(z) \exp z$ $(z \geqslant 0, \ m > 1)$, $\psi_m(z) \leqslant -\theta_0/\gamma\varepsilon$ $(z > \gamma\sigma m)$, вытекающие из свойств этих специальных функций.

5. Асимптотика скорости при $1 < n \leqslant 2$. Как и в п. 3, получим асимптотическое представление оценок сверху и снизу.

Обозначим через J правую часть в оценке (4.4) при $i = 0$ и после несложных тождественных преобразований, используя обозначения (4.7), запишем

$$J = (2-n)\left[\int\limits_{(-1+h)/\gamma}^{0} \exp \frac{\theta}{1+\beta\theta}\, d\theta + J_1 + J_2\right],$$

где

$$(5.1) \quad J_1 = -\gamma \int\limits_{(-1+h)/\gamma}^{\theta_0/\gamma} \left[\theta \exp \frac{\theta}{1+\beta\theta} \middle/ \left\{\gamma\theta + \left[\frac{2-n}{u^2}\left(\int\limits_{\theta}^{0} \exp\frac{\tau}{1+\beta\tau}\, d\tau - \right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left. -\gamma \int\limits_{\theta}^{\theta_0/\gamma} \frac{\tau \exp \dfrac{\tau}{1+\beta\tau}}{1+\gamma\tau}\, d\tau + \varepsilon \int\limits_{\gamma u^2 m}^{\infty} \psi_m(z) \exp \frac{-\varepsilon\psi_m(z)}{1-\beta\varepsilon\psi_m}\, dz\right)\right]^{1/(2-n)}\right\}\right] d\theta;$$

$$(5.2) \quad J_2 = -\varepsilon \int\limits_{\theta_0/\gamma\varepsilon}^{0} \left[\tau \exp \frac{\varepsilon\tau}{1+\beta\varepsilon\tau} \middle/ \left\{\tau + (m-1)^{m/(m-1)} \left[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon\tau}^{0} \exp \frac{\tau_1}{1+\beta\tau_1}\, d\tau_1 + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \int\limits_{z_0(\tau)}^{\infty} \psi_m(z) \exp \frac{-\varepsilon\psi_m(z)}{1-\beta\varepsilon\psi_m}\, dz\right]^{m/(m-1)}\right\}\right] d\tau.$$

Таким образом, вопрос об определении асимптотики оценки сверху сводится к определению асимптотики интегралов J_1 и J_2. Несложно показать, что

$$(5.3) \qquad J_1 = -\gamma \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\theta \exp\theta}{(1-\exp\theta)^{1/(2-n)}}\, d\theta + o(\gamma);$$

$$(5.4) \qquad J_2 = -\gamma \int\limits_{-1}^{0} \frac{\theta \exp\theta}{(1-\exp\theta)^{1/(2-n)}}\, d\theta + o(\gamma) \quad (1 < n < 3/2);$$

$$(5.5)\quad J_2 = -\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\tau\, d\tau}{\tau + (m-1)^{m/(m-1)} \left[-\tau + \int\limits_{z_0(\tau)}^{\infty} \psi_m(z)\, dz\right]^{m/(m-1)}} + o(\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon \int\limits_0^{\infty} \psi_m(z)\, dz + o(\varepsilon) = \varepsilon \frac{\Gamma(2-m)}{m-1} + o(\varepsilon) \quad \left(\frac{3}{2} < n < 2\right).$$

При этом в (5.3), (5.4) учитывалось, что $u^2 \to 2 - n$ при $\gamma \to 0$, что не влияет на вид старших членов. В (5.5) такую замену делать, вообще говоря нельзя, поскольку именно она приводит к неравномерности асимптотики. Если все-таки иметь в виду неравномерную асимптотику, то она в силу (5.3)—(5.5) для оценки сверху запишется как

$$(5.6)\quad \bar{u}^2 = (2-n)\left[1 - 2\beta + \gamma \int\limits_0^{\infty} \frac{x \exp(-x)\, dx}{(1-\exp(-x))^{1/(2-n)}} + o(\gamma)\right] \quad \left(1 < n < \frac{3}{2}\right);$$

$$(5.7)\quad \bar{u}^2 = (2-n)\left[1 + \gamma^{\frac{2-n}{n-1}} \left(\frac{2-n}{n-1}\right)^{\frac{2-n}{n-1}} \Gamma\left(\frac{2n-3}{n-1}\right) + o\left(\gamma^{\frac{2-n}{n-1}}\right)\right] \quad \left(\frac{3}{2} < n < 2\right).$$

При $n = 3/2$ выражения (5.6), (5.7) не могут быть использованы, поскольку величина отбрасываемых членов зависит от n и возрастает при $n \to 3/2$. Асимптотика интегралов (5.1), (5.2) при $n = 3/2$ дает

$$(5.8)\quad \bar{u}^2 = (1/2)(1 - \gamma \ln \gamma + o(\gamma)) \quad (n = 3/2).$$

Асимптотика оценки снизу получается аналогично и совпадает с (5.6)—(5.8). Таким образом, неравномерная асимптотика скорости при $1 < n < 2$ имеет вид (5.6)—(5.8) и совпадает с полученной в [2, 5].

Ограничиваясь старшим членом разложения интегралов J_1, J_2 по степеням γ, нельзя получить, как видно из приведенных выше выражений, общее представление для асимптотики скорости при $1 < n < 2$. Для оценки скорости сверху указанное общее представление будет

$$(5.9)\quad \bar{u}^2 = (2-n)\left[1 - 2\beta - \frac{\varepsilon_0 \psi_{m-2}(\gamma(m-1))}{(m-2)(m-1)} + \frac{\varepsilon_0}{(m-2)(m-1)^{1/(m-1)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(m-1)^{m/(m-1)}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_0^{1/(m-1)} - \varepsilon_0^r}{r(r - 1/(m-1))} + o\left(\left(\frac{\varepsilon_0 - \gamma}{2-m}\right)^2\right)\right],$$

где $\varepsilon_0 = \gamma^{m-1}(m-1)^m$. Отметим, что асимптотика (5.9) определена с точностью до квадратичных членов, что приводит к появлению дополнительных членов разложения по сравнению с (5.6)—(5.8). При этом она не может быть существенно упрощена при всех n, $1 < n \leqslant 2$.

Аналогичное представление можно записать и для асимптотики оценки снизу, однако совпадают у них только два старших члена разложения.

В заключение остановимся на вопросе о равномерной асимптотике скорости при $n \to 2$. Как уже указывалось, метод последовательных приближений дает возможность получить оценки скорости сверху и снизу через функции, в свою очередь зависящие от скорости. Совпадение двух старших членов асимптотики этих функций приводит к асимптотическому равенству для скорости $(3/2 < n < 2)$

$$(5.10)\quad u^2 = (2-n)\left[1 + \left(\frac{\gamma u^2}{n-1}\right)^{\frac{2-n}{n-1}} \Gamma\left(\frac{2n-3}{n-1}\right) \frac{u^2}{2-n} + o\left(\gamma^{\frac{2-n}{n-1}} u^{\frac{2}{n-1}}\right)\right].$$

Анализ интегралов J_1 и J_2 показывает, что отбрасываемые члены остаются ограниченными при $n \to 2$, что позволяет делать предельный переход. В результате при $n = 2$ $u^2 \ln(1/\gamma u^2) \sim 1$, откуда $u^2 \sim 1/\ln(1/\gamma)$, что совпадает со старшим членом асимптотики в [2]. Пренебрегая в (5.10) младшими членами, получим

$$u^2 = \frac{2-n}{1-\left(\frac{\gamma u^2}{n-1}\right)^{\frac{2-n}{n-1}} \Gamma\left(\frac{2n-3}{n-1}\right)}.$$

Решая это трансцендентное уравнение относительно u^2 методом последовательных приближений, найдем

$$u^2 \sim \frac{2-n}{1-\gamma^{\frac{2-n}{n-1}}\left(\frac{2-n}{n-1}\right)^{\frac{2-n}{n-1}} \Gamma\left(\frac{2n-3}{n-1}\right)\frac{1}{(1-\gamma^{2-n})^{2-n}}}. \quad (5.11)$$

Выражение (5.11) дает равномерную асимптотику при $n \to 2$ и два старших члена неравномерной асимптотики при $3/2 < n < 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вильямс Ф. А.** Теория горения.— М.: Наука, 1971.
2. **Берман В. С., Рязанцев Ю. С.** Асимптотический анализ распространения фронта экзотермической одноступенчатой реакции n-го порядка в конденсированной фазе // ФГВ.— 1975.— № 1.
3. **Галкина В. Н., Любченко В. И., Марченко Г. Н.** О скорости распространения волны горения в конденсированной среде // ДАН СССР.— 1986.— Т. 286, № 2.
4. **Худяев С. И.** К асимптотической теории стационарной волны горения // Хим. физика.— 1987.— № 5.
5. **Худяев С. И., Ильин А. М.** Об асимптотике стационарной волны горения в конденсированной среде // Хим. физика.— 1989.— № 4.
6. **Вольперт В. А., Вольперт В. А., Давтян Д. С.** Оценки скорости волны горения в конденсированной среде.— Черноголовка, 1988.— (Препр./АН СССР, Отд-ние ин-та хим. физики).

г. Черноголовка *Поступила 20/IV 1989 г.*

УДК 534.2:532

А. Н. Богданов, В. А. Куликовский

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В КОЛЕБАТЕЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОМ ГАЗЕ, ПОДВЕРЖЕННОМ ДЕЙСТВИЮ ВНЕШНЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В газе с неравновесным распределением энергии по внутренним степеням свободы, поддерживаемым химическими реакциями, внешним облучением, электрическими разрядами и т. п., звуковые волны могут усиливаться [1—4]. Это приводит к возрастанию роли нелинейных эффектов и к образованию ударных волн (УВ) [5—7]. Процессы возникновения и распространения УВ представляют значительный интерес, так как их появление в активной среде газовых лазеров может приводить к срыву генерации [8], а в плазмотронах — к существенному снижению эффективности химических реакций [9].

В настоящей работе рассмотрены вопросы распространения слабых нестационарных возмущений в газе при наличии накачки энергии в колебательные степени свободы молекул, найдены условия образования УВ и законы ее эволюции со временем. Особое внимание уделено практически важному случаю переменного фона. Получено решение задачи о развитии нелинейного стационарного возмущения сверхзвукового потока колебательно-неравновесного газа при подводе энергии во внутренние степени свободы в слое конечной ширины. Рассмотрены достаточно короткие волны, время взаимодействия которых с частицами газа много меньше характерного времени релаксации («квазизамороженное приближение»). Длинные волны, для которых наличие релаксационного процесса эквивалентно дополнительной объемной вязкости, а основным математическим аппаратом является уравнение Бюргерса («квазиравновесное приближение»), изучены в [7, 10].