О РЭЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ Z-ПИНЧА

М. Г. Никулин (Москва)

Как известно, в начальной стадии мощного импульсного разряда в газе граница разряда движется с ускорением к оси. В таком случае существенную роль может играть рэлей-тейлоровская неустойчивость [1]. В некоторых экспериментальных работах по Z-пинчу [2-4] действительно еще до момента первого сжатия обнаруживается неустойчивость поверхности разряда по отношению к возмущениям типа перетяжек, инкремент неустойчивости которых оказывается приблизительно равным половине величины

$$\omega_0 = (gk)^{1/2} \tag{1}$$

Здесь g — ускорение границы разряда, k — волновое число гармоники возмущения. Выражение (1) получено в известной работе Крускала и Шварцшильда [5], в которой, в частности, исследовалась рэлей-тейлоровская неустойчивость полубесконечной плазмы, поддерживаемой магнитным полем в однородном поле тяготения. При выводе (1) предполагалось, что плазма лежит выше горизонтальной плоскости $y = 0$, а ускорение силы тяжести, магнитное поле и волновой вектор возмущения поверхности плазмы имеют лишь составляющие $g_y = -g$, B_z и $k_x = k$ соответственно.

Определенный интерес представляет непосредственное решение задачи о рэлей-тейлоровской неустойчивости Z-пинча в процессе сжатия. В настоящей работе эта задача решается для одной из возможных моделей Z-пинча в начальной стадии, а именно, для модели «снежного плуга» [6].

Отметим, что устойчивость Z-пинча до момента первого сжатия для различных моделей, в том числе и для «снежного плуга», рассматривалась в [7]. Однако в этой работе допускались только радиальные возмущения поверхности плазмы. Из-за такого ограничения в вычислениях работы [7] рэлей-тейлоровская неустойчивость не появилась, хотя неустойчивости других типов должным образом исследованы.

Итак, рассмотрим бесконечный круговой цилиндр, образованный идеально проводящей плазмой нулевого давления. По поверхности цилиндра вдоль оси z течет ток, создающий азимутальное магнитное поле. Под действием лоренцовой силы токовая поверхность стягивается к оси, сгребая плазму и собирая ее в бесконечно тонком поверхностном слое. Будем считать, что граница разряда движется к оси с постоянным ускорением g. Для начальной стадии сжатия такое предположение подтверждается экспериментально [4]. Радиус токонесущей оболочки $R_0(t)$ связан с начальным радиусом цилиндра $R_* = R_0(0)$ кинематическим соотношением

$$R_0(t) = R_* - \frac{1}{2} g t^2 = R_* \left(1 - \frac{t^2}{t_*^2}\right) \qquad \left(t_* = \left(\frac{2R_*}{g}\right)^{1/2}\right) \tag{2}$$

Здесь t_* — время, за которое граница разряда при движении с постоянным ускорением g должна была бы достигнуть оси.

Уравнение движения элемента площади поверхности $dA_0 = R_0 d\varphi dz$ имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M_0}{2\pi R_0} R_0 d\varphi\, dz \frac{dR_0}{dt}\right) = -p_0 R_0 d\varphi\, dz \qquad \left(p_0(t) = \frac{B_0^2(t)}{8\pi}\right) \tag{3}$$

Здесь $p_0(t)$ — магнитное давление на поверхности плазмы, а $M_0(t)$ — масса на единицу длины цилиндра, сгребаемая границей. Очевидно,

$$M_0(t) = \pi\rho\,(R_*^2 - R_0^2) \tag{4}$$

где ρ — начальная плотность плазмы. Уравнение (3) с учетом (2) и (4) дает

$$p_0 = \frac{3}{2} \rho g^2 t^2 \frac{1 - {}^5/_6 (t/t_*)^2}{1 - (t/t_*)^2} \tag{5}$$

В соответствии с выбранной моделью будем рассматривать далее только начальную стадию сжатия, когда $t \ll t_*$, и поэтому везде будем пренебрегать величинами порядка $(t/t_*)^2$ по сравнению с единицей. Тогда (5) переходит в

$$p_0 = \frac{B_0^2}{8\pi} = \frac{3}{2} \rho g^2 t^2$$

Отсюда

$$B_0 = 2\,(3\pi\rho)^{1/2} g t$$

и, следовательно, полный ток разряда должен быть пропорционален времени

$$I_0(t) = {}^1/_2\, c B_0 R_0 = (3\pi\rho)^{1/2} c g R_* t$$

Именно такое нарастание тока обычно бывает в начальной стадии разряда.

Исследуем теперь устойчивость оболочки разряда. Пусть $\boldsymbol{\xi}(\varphi, z, t) = (\xi_r, \xi_\varphi, \xi_z)$ — малое смещение частицы, которая первоначально находилась на поверхности цилиндра в точке (φ, z); $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r + \mathbf{n}_1$ — единичный вектор нормали к поверхности; dA — элемент площади возмущенной поверхности цилиндра. Тогда в линейном относительно возмущения приближении

$$\mathbf{n}dA = [\mathbf{e}_\varphi(R_0 + \xi_r)d\varphi + \boldsymbol{\xi}(\varphi + d\varphi, z) - \boldsymbol{\xi}(\varphi, z)] \times [\mathbf{e}_z dz + \boldsymbol{\xi}(\varphi, z + dz) - \boldsymbol{\xi}(\varphi, z)] =$$

$$= R_0 d\varphi\, dz \left[\mathbf{e}_r\left(1 + \frac{1}{R_0}\xi_r + \frac{1}{R_0}\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z}\right) - \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{R_0}\frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} - \mathbf{e}_z \frac{\partial \xi_r}{\partial z}\right] \qquad (6)$$

Отсюда

$$dA = R_0 d\varphi\, dz \left(1 + \frac{1}{R_0}\xi_r + \frac{1}{R_0}\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z}\right), \qquad \mathbf{n}_1 = \left(0, \; -\frac{1}{R_0}\frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi}, \; -\frac{\partial \xi_r}{\partial z}\right)$$

Возмущение магнитного поля вне плазмы $\mathbf{B}_1$ найдем из уравнений

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \psi_1, \qquad \Delta \psi_1 = 0 \qquad (7)$$

и граничного условия для полного поля $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ на поверхности плазмы

$$0 = \mathbf{n}\mathbf{B} \approx \mathbf{e}_r \mathbf{B}_1 + \mathbf{n}_1 \mathbf{B}_0 \qquad (8)$$

Считаем, что зависимость всех величин от φ и z имеет вид

$$e^{i(m\varphi + kz)} \qquad (9)$$

Тогда решение уравнения $\Delta\psi_1 = 0$, исчезающее на бесконечности и удовлетворяющее условию (8), есть

$$\psi_1 = \frac{imB_0 K_m(kr)}{kR_0 K_m'(kR_0)}\xi_r \qquad (10)$$

где $K_m(kr)$ — функция Макдональда, а штрих означает дифференцирование по аргументу. Для давления магнитного поля на возмущенной поверхности цилиндра имеем

$$8\pi p = \mathbf{B}^2(R_0 + \xi_r) \approx \mathbf{B}_0^2(R_0) + 2\mathbf{B}_0(R_0)\mathbf{B}_1(R_0) + \xi_r \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{B}_0^2(R_0)$$

отсюда, используя (7) и (10), находим

$$p = p_0 + p_1 = \frac{B_0^2}{8\pi} - \frac{B_0^2}{4\pi}\left[1 + \frac{m^2 K_m(kR_0)}{kR_0 K_m'(kR_0)}\right]\frac{\xi_r}{R_0} \qquad (11)$$

где второе слагаемое представляет, очевидно, возмущение давления.

Уравнение движения элемента поверхности, обладающего массой $(M_0 / 2\pi)\, d\varphi dz$ и площадью [1] после возмущения dA, имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{M_0}{2\pi}d\varphi\, dz\left(\frac{dR_0}{dt}\mathbf{e}_r + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}\right)\right] = -(p_0 + p_1)\,\mathbf{n}\,dA$$

Отсюда, учитывая уравнение для невозмущенного движения (3), а также уравнения (4), (6) и (11), в линейном относительно возмущения приближении получим

$$\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}\left[(R_*^2 - R_0^2)\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}\right] =$$

$$= p_0\left\{\left[\left(1 + \frac{2m^2 K_m(kR_0)}{kR_0 K_m'(kR_0)}\right)\xi_r - \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} - R_0\frac{\partial \xi_z}{\partial z}\right]\mathbf{e}_r + \frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + R_0\frac{\partial \xi_r}{\partial z}\mathbf{e}_z\right\} \qquad (12)$$

Если, далее, использовать уравнение (2) и зависимость всех величин от φ и z в виде (9), то для новой переменной

$$\boldsymbol{\eta} = t\boldsymbol{\xi} \qquad (13)$$

получим из (12) систему уравнений

$$\eta_r^{\cdot\cdot} - \frac{3g}{R_*}\left[\left(1 + \frac{2m^2 K_m(kR_*)}{kR_* K'_m(kR_*)}\right)\eta_r - im\eta_\varphi - ikR_*\eta_z\right] = 0 \qquad (14)$$

$$\eta_\varphi^{\cdot\cdot} - \frac{3g}{R_*}im\eta_r = 0, \qquad \eta_z^{\cdot\cdot} - 3gik\eta_r = 0$$

---

[1] Учет изменения массы при возмущении существенно усложняет уравнения

Здесь в соответствии с замечанием, сделанным после формулы (5), вместо R_0 везде стоит R_*. Учитывая (13) и начальное условие $\xi(0) = \xi_0$, будем искать $\eta(t)$ в виде

$$\eta(t) = \xi_0 \frac{\operatorname{sh} \omega t}{\omega} \tag{15}$$

Подстановка (15) в (14) дает систему алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}\left[\omega^2 - \frac{3g}{R_*}\left(1 + \frac{2m^2 K_m}{kR_* K_m'}\right)\right]\xi_{0r} + \frac{3g}{R_*} im\xi_{0\varphi} + 3gik\xi_{0z} = 0 \\ \omega^2\xi_{0\varphi} - \frac{3g}{R_*} im\xi_{0r} = 0, \qquad \omega^2\xi_{0z} - 3gik\xi_{0r} = 0\end{gathered} \tag{16}$$

Нетривиальное решение (16) существует, если

$$\omega^4 - \frac{3g}{R_*}\left(1 + \frac{2m^2K_m}{kR_*K_m'}\right)\omega^2 - \left(\frac{3gm}{R_*}\right)^2 - (3gk)^2 = 0$$

отсюда

$$\omega^2 = 3g\left\{\frac{1}{2R_*}\left(1 + \frac{2m^2K_m}{kR_*K_m'}\right) \pm \left[\frac{1}{4R_*^2}\left(1 + \frac{2m^2K_m}{kR_*K_m'}\right)^2 + \frac{m^2}{R_*^2} + k^2\right]^{1/2}\right\}$$

Таким образом, уравнение (12) имеет решение вида

$$\xi = \xi_0 \frac{\operatorname{sh} \omega t}{\omega t} \tag{17}$$

содержащее неустойчивую моду с

$$\omega^2 = 3g\left\{\frac{1}{2R_*}\left(1 + \frac{2m^2K_m}{kR_*K_m'}\right) + \left[\frac{1}{4R_*^2}\left(1 + \frac{2m^2K_m}{kR_*K_m'}\right)^2 + \frac{m^2}{R_*^2} + k^2\right]^{1/2}\right\} \tag{18}$$

Прежде чем исследовать полученные соотношения, отметим, что, полагая $M_0 = \text{const}$, приходим к решенной в работе [8] задаче об устойчивости радиально ускоренной тонкой цилиндрической плазменной оболочки постоянной массы. В этом случае неустойчивое решение уравнения (12) имеет вид $\xi = \xi_0 e^{\nu t}$, где ν связано с ω из (18) формулой $3\nu^2 = \omega^2$.

Увеличение массы движущейся оболочки Z-пинча со временем существенно влияет на характер неустойчивости. Как это следует из (18), неустойчивое возмущение медленно растет при $\omega t < 1$ и растет почти экспоненциально с инкрементом, близким к ω, при $\omega t \gg 1$. Чтобы оценить, разовьется ли возмущение, возникшее при $t = 0$, за рассматриваемое время $t \ll t_*$, введем «инкремент» неустойчивости ω_e как величину, обратную времени, за которое начальное возмущение увеличится в e раз. Для (17) этот инкремент равен $\omega_e = 0.37\,\omega$. Имея это в виду, будем далее исследовать непосредственно величину ω, определяемую уравнением (18).

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть сначала $k = 0$, $m \neq 0$. Так как

$$\lim_{k\to 0} \frac{K_m(kR_*)}{kR_*K_m'(kR_*)} = -\frac{1}{m}$$

то (18) переходит в

$$\omega^2 = \frac{3g}{2R_*}\{1 - 2m + [(1-2m)^2 + 4m^2]^{1/2}\} \tag{19}$$

Отсюда следует довольно неожиданный факт, что поверхность разряда при $k = 0$ неустойчива для всех значений m. Правда, при $m \sim 1$ из уравнения (19) имеем

$$\omega^2 \sim \frac{g}{R_*} \sim \frac{1}{t_*^2}$$

т. е. возмущения нарастают за время порядка t_*, лежащее вне пределов нашего рассмотрения. Если же $m \gg 1$, то

$$\omega^2 \approx \frac{3gm}{R_*}(\sqrt{2} - 1) \sim \frac{m}{t_*^2} \gg \frac{1}{t_*^2}$$

так что коротковолновые возмущения нарастают за времена, малые по сравнению с t_*. Между тем, возмущения с $m \neq 0$ изгибают силовые линии, увеличивая энергию магнитного поля, и поэтому, по крайней мере, достаточно коротковолновые из них должны быть устойчивыми. Получающееся противоречие связано с пренебрежением толщиной движущейся оболочки разряда. Как показано в [8], учет конечной толщины оболочки приводит к появлению устойчивости коротковолновых возмущений. Если применить результат работы [8] к нашей модели, то при $k = 0$ неустойчивыми будут лишь возмущения с $m < R_* / 2a$, где a — толщина ускоряемого слоя. Из-за неадэкватности выбранной модели и в общем случае, когда $k \neq 0$ и $m \neq 0$, уравнение (18) обнаруживает неустойчивость для всех значений k и m.

Далее рассмотрим возмущения типа перетяжек, для которых $m = 0$, $k \neq 0$. С энергетической точки зрения перетяжки являются наиболее опасными, так как они не изгибают силовых линий магнитного поля. Из уравнения (18) следует, что в этом случае

$$\omega^2 = 3g\left[\frac{1}{2R_*} + \left(\frac{1}{4R_*^2} + k^2\right)^{1/2}\right] \tag{20}$$

Выясним роль различных членов в полученном выражении. Если допустить только радиальные смещения частиц поверхности плазмы, т. е. $\xi = (\xi_r, 0, 0)$, то вместо системы (14) будет одно уравнение

$$\eta_r^{\cdot\cdot} - \frac{3g}{R_*}\eta_r = 0$$

и соответственно вместо (20)

$$\omega_r^2 = \frac{3g}{R_*} = \frac{6}{t_*^2}$$

Таким образом, R_*-члены связаны с неустойчивостью чисто радиальных возмущений, и наличие их в (20) выражает тот известный факт, что магнитное давление на поверхности тела вращения с продольным током больше в том месте, где меньше радиус. Так как $\omega_r \sim 1 / t_*$, неустойчивость этого типа в рассматриваемой здесь начальной стадии разряда несущественна.

С другой стороны, при $R_* \to \infty$, т. е. при переходе к плазме с плоской границей, (20) переходит в

$$\omega^2 = 3gk \tag{21}$$

Используя выражение (1) для инкремента рэлей-тейлоровской неустойчивости полубесконечной плазмы в поле тяготения, запишем (21) в виде

$$\omega^2 = 3\omega_0^2 \tag{22}$$

Отсюда можно сделать вывод, что член с k в (20), обязанный смещениям частиц вдоль поверхности плазмы, соответствует неустойчивости Рэлея — Тейлора. Для достаточно коротковолновых возмущений, когда $kR_* \gg 1$, вместо (20) снова имеем (21) и (22), а введенный нами «инкремент» $\omega_e \approx 0.64\omega_0$.

При этом время развития неустойчивости имеет порядок

$$\frac{1}{\omega} = \frac{t_*}{(6kR_*)^{1/2}} \ll t_*$$

Следовательно, в модели «снежного плуга» рэлей-тейлоровская неустойчивость Z-пинча на стадии сжатия может играть существенную роль.

Автор благодарит М. Л. Левина за внимание к работе и ценные замечания.

Поступила 10 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. Proc. Roy. Soc., A, 1950, vol. 201, No. 1064.
2. Борзунов Н. А., Орлинский Д. В., Осовец С. М. Исследование мощного импульсного разряда в газах с помощью скоростной фотосъемки. Атомная энергия, 1958, т. 4, № 2.
3. Curzon F. L., Churchill R. J. Framing camera studies of the Z-pinch in nitrogen. Canad J. Phys., 1962, vol. 40, No 9.
4. Curzon F. L., Hodgson R. T., Churchill R. J. Excitation of m = 0 instabilities in a Z-pinch discharge. J. Nucl. Energy, Pt. C, 1964, vol. 6, No 3.
5. Kruscal M., Schwarzshild M. Same instabilities of a completely ionized plasma. Proc. Roy. Soc., A, 1,954, vol. 223, No 1154. (русск. перев, сб. «Проблемы современной физики», 1956, вып. 2, стр. 108).
6. Rosenbluth M., Garwin R., Rosenbluth A. Infinitive conductivity theory of the pinch. LA-1850, 1954.
7. Wyld H. W. Dynamic stability of a self-pinched discharge. J. Appl. Phys. 1958, vol. 29, No 10.
8. Harris E. G. Rayleigh-Taylor' instabilities of a collapsing cylindrical shall in a magnetic field. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No 9.