УДК 536.25: 517.958

ПРИНЦИП МОНОТОННОСТИ В ЗАДАЧЕ РЭЛЕЯ ДЛЯ ИЗОТЕРМИЧЕСКИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

М. Ю. Тяглов

Южный Федеральный университет, 344090 Ростов-на-Дону
E-mail: tyaglov@gmail.com

Рассматривается конвекция изотермически несжимаемой жидкости в горизонтальном слое со свободными недеформируемыми границами, на которых поддерживается постоянная температура. При достаточно общих предположениях о зависимости удельного объема от температуры показано, что имеет место “принцип монотонности”, а спектр критических чисел Рэлея является счетным и простым. В качестве примеров приведены модели с линейной и квадратичной зависимостями удельного объема от температуры. Полученные результаты о спектре критических чисел Рэлея справедливы также при некоторых других краевых условиях.

Ключевые слова: конвекция, изотермически несжимаемая жидкость, “принцип монотонности”, число Рэлея, осцилляционные операторы.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая теплопроводная жидкость заполняет бесконечный горизонтальный слой толщиной H, ограниченный свободными недеформируемыми границами, на которых задана постоянная температура: T_1 — температура на нижней стенке, T_2 — на верхней, причем $T_2 < T_1$ (т. е. слой подогревается снизу). На жидкость действует сила тяжести с ускорением $\boldsymbol{g}$.

Жидкость будем полагать изотермически несжимаемой, т. е. ее удельный объем V зависит только от температуры. Пусть функция $V(T)$ задается формулой

$$V = \tilde{V}(1 + \gamma F(T)), \qquad V(T) > 0, \tag{1.1}$$

где $\gamma > 0$ — некоторая постоянная; $F(T)$ — непрерывно дифференцируемая функция, причем $F(\tilde{T}) = 0$, $\tilde{V} = V(\tilde{T})$, $\tilde{T} < T_1$ — некоторое значение температуры.

Полагая вязкость η, теплопроводность $\varkappa$ и удельную теплоемкость при постоянном давлении c_p постоянными, а изменение в процессе конвекции потенциальной энергии частицы жидкости малым по сравнению с изменением внутренней энергии, можно значительно упростить уравнение переноса тепла. В сделанных предположениях уравнения конвекции и краевые условия для скорости $\boldsymbol{v}$, температуры T и давления p имеют вид [1]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0, \qquad \rho = \frac{1}{V(T)},$$

$$\rho\Big(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}\Big) = -\nabla p + \eta\Delta\boldsymbol{v} - \rho g\boldsymbol{k}, \qquad \rho\Big(\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v}\nabla T\Big) = \varkappa\Delta T,$$

$$T\big|_{z=0} = T_1, \qquad T\big|_{z=H} = T_2,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05-01-00567-а, 04-01-96802-р2004юг-а) и в рамках Программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант № НШ-1768.2003.1).

$$\frac{\partial v_1}{\partial z}\Big|_{z=0,H} = \frac{\partial v_2}{\partial z}\Big|_{z=0,H} = v_3\big|_{z=0,H} = 0,$$

где $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ — единичный вектор оси, направленной вверх; $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$.

Следуя [2], перейдем к безразмерным переменным. В качестве масштабов длины и температуры примем характерный размер h и характерную разность температур $\Theta = T_1 - \tilde{T}$. Температуру нижней границы слоя T_1 будем считать начальной. В качестве единицы времени примем $\tau = \sqrt{h/(\alpha g \Theta)}$ — характерное время конвективного всплытия нагретой (или погружения охлажденной) частицы жидкости (α — средний коэффициент объемного расширения жидкости). Для удельного объема, скорости и давления используем масштабы $\tilde{V}$, h/τ и $gh\alpha\Theta/\tilde{V}$ соответственно. Сохраняя для безразмерных переменных прежние обозначения, имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \qquad \rho = V(T)^{-1}, \qquad V(T) = 1 + \beta\Phi(T),\\ \rho\Big(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}\Big) = -\nabla p + \mu\Delta\boldsymbol{v} - \beta^{-1}(\rho - 1)\boldsymbol{k}, \qquad \rho\Big(\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v}\nabla T\Big) = \delta\Delta T;\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$T\big|_{z=0} = 0, \qquad T\Big|_{z=l} = -l; \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z}\Big|_{z=0,l} = \frac{\partial v_2}{\partial z}\Big|_{z=0,l} = v_3\big|_{z=0,l} = 0, \tag{1.4}$$

где $\beta = \alpha\Theta$, $\mu = \eta\tau\tilde{V}/h^2$, $\delta = \varkappa\tau\tilde{V}/(h^2 c_p)$ — безразмерные коэффициент теплового расширения, вязкость и теплопроводность соответственно [2]; $l = H/h$ — безразмерная толщина слоя; $\Phi(T) = F(T\Theta + T_1)/F(T_1)$ — непрерывно дифференцируемая функция ($\Phi(-1) = 0$).

Далее предположим, что $\beta \geqslant 0$, и будем рассматривать лишь жидкости, расширяющиеся при нагреве (в случае отсутствия инверсии плотности).

Задача (1.2)–(1.4) имеет стационарное решение, соответствующее механическому равновесию жидкости:

$$\boldsymbol{v}_0 = 0, \qquad T_0 = -z, \qquad p_0 = \beta^{-1}\int\limits_z^l [\rho(-s) - 1]\,ds + \text{const}\,. \tag{1.5}$$

В силу линейности равновесного профиля температуры $l = (T_1 - T_2)/\Theta$.

Поскольку $\Phi(T)$ — непрерывно дифференцируемая функция, зависимость $V(T)$ в окрестности точки $\tilde{T}$ можно представить в виде

$$V(\tilde{T} + T) = 1 + \beta\Phi(\tilde{T}) + \beta\frac{\partial\Phi}{\partial T}\Big|_{T=\tilde{T}} T + \beta O(T^2), \qquad T \to 0. \tag{1.6}$$

Вторичные решения p', $\boldsymbol{v}'$, T' задачи (1.2)–(1.4) будем искать в виде

$$p' = p_0 + \mu\delta p, \qquad \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}_0 + \delta\boldsymbol{v}, \qquad T' = T_0 + T. \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.2)–(1.4) и учитывая (1.5), (1.6), получаем нелинейную систему для возмущений p, $\boldsymbol{v}$, T (штрихи опущены):

$$\begin{gathered}V(T - z) = 1 + \beta\Phi(T - z),\\ \beta\,\frac{\partial\Phi}{\partial T}\Big|_{T=-z}\Big(\frac{\partial T}{\partial t} - v_3 + \boldsymbol{v}\nabla T\Big) = V(T - z)\operatorname{div}\boldsymbol{v},\\ \mathrm{Pr}^{-1}\rho(T - z)\Big(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}\Big) = -\nabla p + \Delta\boldsymbol{v} + \mathrm{R}\rho_0\rho(T - z)\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\Big|_{T=-z} T + O(T^2)\Big)\boldsymbol{k},\end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\rho(T-z)\Big(\frac{\partial T}{\partial t}-v_3+\boldsymbol{v}\nabla T\Big)=\Delta T.$$

Здесь $\rho_0=\rho_0(z)=\rho(-z)$ — плотность в состоянии равновесия (1.5); $\mathrm{R}=(\mu\delta)^{-1}$, $\mathrm{Pr}=\mu\delta^{-1}$ — числа Рэлея и Прандтля [2]. В силу положительности функции удельного объема (1.1) равновесная плотность $\rho_0(z)=V(-z)^{-1}$ положительна на отрезке $z\in[0,l]$.

Из (1.3), (1.4) получаем краевые условия для возмущений температуры и скорости:

$$T\big|_{z=0}=0,\qquad T\big|_{z=l}=0; \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z}\Big|_{z=0,l}=\frac{\partial v_2}{\partial z}\Big|_{z=0,l}=0,\qquad v_3\big|_{z=0,l}=0. \tag{1.10}$$

Соответствующая (1.8) линеаризованная система для возмущений имеет вид

$$\beta\rho_0(z)\phi(z)\Big(\frac{\partial T}{\partial t}-v_3\Big)=\operatorname{div}\boldsymbol{v},$$

$$\mathrm{Pr}^{-1}\,\rho_0(z)\,\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\Delta\boldsymbol{v}-\nabla p+\mathrm{R}\rho_0^2(z)\phi(z)T\boldsymbol{k}, \tag{1.11}$$

$$\rho_0(z)\Big(\frac{\partial T}{\partial t}-v_3\Big)=\Delta T,$$

где $\phi(z)=(\partial\Phi/\partial T)\big|_{T=-z}$ — непрерывная функция.

2. Спектральная задача. “Принцип монотонности”. Нетривиальные решения краевой задачи (1.11), (1.9), (1.10), периодические по переменной x_1 с периодом $2\pi/k_1$ и по переменной x_2 с периодом $2\pi/k_2$, будем искать в виде

$$\boldsymbol{v}(x_1,x_2,z)=\boldsymbol{U}(z)\exp(-\sigma t+ik_1x_1+ik_2x_2),$$

$$T(x_1,x_2,z)=\theta(z)\exp(-\sigma t+ik_1x_1+ik_2x_2),\qquad p(x_1,x_2,z)=p(z)\exp(-\sigma t+ik_1x_1+ik_2x_2),$$

где k_1, k_2 — волновые числа; σ — декремент возмущений, который в общем случае может быть комплексным. При этом полагается, что средний массовый расход жидкости в направлениях x_1, x_2 отсутствует:

$$\int\limits_{-\pi/k_2}^{\pi/k_2}\int\limits_0^l\rho v_1\,dx_2\,dx_3=\int\limits_{-\pi/k_1}^{\pi/k_1}\int\limits_0^l\rho v_2\,dx_1\,dx_3=0.$$

Отделяя переменные, получаем спектральную задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_0Dw+F=-\sigma\beta\rho_0\phi\theta; \tag{2.1}$$

$$LF+k^2p=-\sigma\,\mathrm{Pr}^{-1}\,\rho_0F; \tag{2.2}$$

$$Lw-Dp+\mathrm{R}\phi\rho_0^2\theta=-\sigma\,\mathrm{Pr}^{-1}\,w; \tag{2.3}$$

$$L\theta+w=-\sigma\rho_0\theta; \tag{2.4}$$

$$z=0,l:\qquad \theta=w=DF=0. \tag{2.5}$$

Здесь $\rho_0(z)=\rho(-z)$; $f_0(z)=\rho_0(z)^{-1}$; $w=\rho_0U_3$; $F=ik_1U_1+ik_2U_2$; $D=d/dz$; $k^2=k_1^2+k_2^2$; $L=D^2-k^2$.

Покажем, что в данном случае имеет место “принцип монотонности”, т. е. из условия $\operatorname{Re}\sigma=0$ следует $\operatorname{Im}\sigma=0$.

Исключая из системы (2.1)–(2.5) функции F, p и w, для неизвестной функции θ получим краевую задачу на собственные значения относительно декрементов возмущений σ:

$$-LNL\theta - \sigma\Big(\frac{1}{\mathrm{Pr}} + 1\Big)L^2\theta - \frac{\sigma^2}{\mathrm{Pr}}\,M\theta = \mathrm{R}k^2\phi\rho_0^2\theta; \tag{2.6}$$

$$z = 0, l: \qquad \theta = L\theta = NL\theta = 0. \tag{2.7}$$

Здесь дифференциальные выражения для N и M имеют вид

$$N = D[f_0 D] - k^2 f_0, \qquad M = D[\rho_0 D] - k^2\rho_0. \tag{2.8}$$

Наряду с решением θ системы (2.6), (2.7) рассмотрим комплексно-сопряженное решение $\overline{\theta}$. Умножая уравнение (2.6) на $\overline{\theta}$ и интегрируя его по частям по z в пределах от 0 до l, получаем

$$\sigma^2 I_1 - \sigma I_2 + I_3 = \mathrm{R}I_4, \tag{2.9}$$

где величины

$$I_1 = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Big(\int\limits_0^l \rho_0|D\theta|^2 dz + k^2\int\limits_0^l \rho_0|\theta|^2 dz\Big),$$

$$I_2 = \Big(\frac{1}{\mathrm{Pr}} + 1\Big)\int\limits_0^l |L\theta|^2 dz, \qquad I_3 = \int\limits_0^l f_0|DL\theta|^2 dz$$

положительны с учетом того, что $\theta(z)$ — нетривиальное решение задачи (2.6), (2.7), а величина $I_4 = k^2\int\limits_0^l \phi\rho_0^2|\theta|^2 dz$ вещественна.

Разделяя мнимую и вещественную части в уравнении (2.9), получаем

$$\mathrm{Im}\,\sigma(2\,\mathrm{Re}\,\sigma I_1 - I_2) = 0. \tag{2.10}$$

Согласно (2.10) либо $\mathrm{Im}\,\sigma = 0$, либо $\mathrm{Re}\,\sigma = I_2/(2I_1) > 0$. Следовательно, колебательные моды могут появиться только в случае устойчивости ($\mathrm{Re}\,\sigma > 0$). Таким образом, "принцип монотонности" доказан.

Отметим, что проведенное доказательство учитывает случаи отрицательных критических чисел Рэлея, как, например, в модели проникающей конвекции [3–5].

Замечание 1. В случае других краевых условий доказать отсутствие колебательной неустойчивости не удалось. Численные расчеты [6] показывают, что в случае двух твердых стенок имеет место колебательная устойчивость и при подогреве снизу, и при нагреве сверху, в то время как колебательная неустойчивость численно не обнаружена [4, 6].

3. Спектр критических чисел Рэлея. Положив в (2.6), (2.7) $\sigma = 0$, рассмотрим систему уравнений для нейтральных возмущений:

$$-LNL\theta = \mathrm{R}k^2\phi\rho_0^2\theta; \tag{3.1}$$

$$z = 0, l: \qquad \theta = L\theta = NL\theta = 0. \tag{3.2}$$

Задача (3.1), (3.2) является задачей на собственные значения, роль которых играют критические числа Рэлея.

Исследуем жидкости двух типов: нормальные и аномальные. Нормальными будем называть жидкости, монотонно расширяющиеся при нагреве. В этом случае $\partial F/\partial T > 0$ при всех $T \in [T_2, T_1]$ и $\phi(z) > 0$ при всех $z \in [0, l]$ (здесь полагаем $h = H$, $\tilde{T} = T_2$, $\tilde{V} = V(T_2)$ и, следовательно, $l = 1$). К классу таких жидкостей относятся, например, жидкости с линейной зависимостью удельного объема от температуры $V = \tilde{V}(1 + \alpha(T - T_2))$.

Жидкости с инверсией плотности будем называть аномальными. Если на интервале (T_2, T_1) отсутствуют точки инверсии плотности и жидкость расширяется при нагреве, то такую жидкость будем считать нормальной. В точках инверсии плотности функция $\partial F/\partial T$ меняет знак. Далее будем рассматривать только случай, когда на интервале (T_2, T_1) эта функция меняет знак один раз в точке T_*. Тогда функция $\phi(z)$ также меняет знак один раз в точке $z = 1$ (здесь полагаем $h = H\Theta/(T_1 - T_2)$, $\tilde{T} = T_*$, $\tilde{V} = V(T_*)$ и, следовательно, $l = H/h > 1$). Примером такой жидкости может служить вода при атмосферном давлении (см., например, [3–5]), для которой температура инверсии $T_* \approx 4$ °C и $V = \tilde{V}(1+\gamma(T-T_*)^2)$ при $T_1 > 4$ °C, $T_2 < 4$ °C.

Замечание 2. В случае аномальных жидкостей несущественно, подогревается слой снизу или нагревается сверху, поэтому все дальнейшие результаты, полученные для жидкостей с инверсией удельного объема, справедливы и при $T_2 > T_1$ (в этом случае появляются отрицательные критические числа Рэлея).

Пусть $\beta_* > 0$ — первое число такое, что $\rho_0(z_0, \beta_*) = 0$ при некотором z_0 на отрезке $[0, l]$ (если $\rho_0(z, \beta_*) > 0$ при любых $z \in [0, l]$ и $\beta > 0$, то полагаем $\beta_* = \infty$). Тогда имеет место

Теорема 1. *Пусть $\beta \in [0, \beta_*)$, $k \geqslant 0$. Тогда для нормальной жидкости ($\phi(z) > 0$) спектр задачи* (3.1), (3.2) *состоит из счетного числа простых положительных собственных значений*

$$0 < \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2 < \mathrm{R}_3 < \ldots,$$

а для аномальной ($\phi(z)$ меняет знак один раз) — из счетного числа положительных и отрицательных простых собственных значений

$$\ldots < \mathrm{R}_{-3} < \mathrm{R}_{-2} < \mathrm{R}_{-1} < 0 < \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2 < \mathrm{R}_3 < \ldots.$$

Для доказательства используем следующую лемму [7].

Лемма. *Рассмотрим дифференциальное выражение второго порядка*

$$M_2 = \frac{d}{dz}\left[f_1(z)\,\frac{d}{dz}\right] - f_2(z).$$

Пусть $f_1(z)f_2(z) > 0$ $\forall z \in [a, b]$. Тогда M_2 можно факторизовать, т. е. представить в виде

$$M_2 = \frac{1}{y}\,\frac{d}{dz}\,f_1 y^2\,\frac{d}{dz}\,\frac{1}{y},$$

где $y(z)$ — не имеющее нулей на $[a, b]$ решение уравнения $M_2 y = 0$.

Дифференциальное выражение N из (2.8), определенное на отрезке $[0, l]$, удовлетворяет условиям леммы, следовательно, оно может быть факторизовано с положительными весами:

$$N = \rho_1\,\frac{d}{dz}\,\rho_2\,\frac{d}{dz}\,\rho_3 \tag{3.3}$$

($\rho_1 = \rho_3 = 1/u$; $\rho_2 = f_0 u^2$; u — не имеющее нулей на $[0, l]$ решение уравнения $Nu = 0$).

Из леммы также следует известная факторизация

$$L = \mathrm{e}^{-kz}\,\frac{d}{dz}\,\mathrm{e}^{2z}\,\frac{d}{dz}\,\mathrm{e}^{-kz}\,. \tag{3.4}$$

Далее используем следующие теоремы.

Теорема 2 (Калафати — Гантмахера — Крейна [8, 9]). *Пусть в спектральной задаче*

$$L_1y = l_0y^{(n)} + l_1y^{(n-1)} + \ldots + l_ny = \lambda ry,$$

$$U_iy = y^{(q_i)}(a) + \sum_{q<q_i} \gamma_{iq}y^{(q)}(a) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{3.5}$$

$$U_iy = y^{(q_i)}(b) + \sum_{q<q_i} \gamma_{iq}y^{(q)}(b) = 0, \qquad i = m + 1, \ldots, n,$$

где γ_{iq} вещественны; $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ — достаточно гладкие вещественные функции на $[a, b]$; $l_0(x) \neq 0$; $r(x)$ — непрерывная положительная на $[a, b]$ функция; $1 \leqslant m \leqslant n - 1$; $0 \leqslant q_1 < \ldots < q_m \leqslant n - 1$; $0 \leqslant q_{m+1} < \ldots < q_n \leqslant n - 1$, дифференциальное выражение L_1y допускает факторизацию

$$L_1y = r_0 \frac{d}{dz} r_1 \frac{d}{dz} \cdots r_{n-1} \frac{d}{dz} r_ny,$$

где $(-1)^{n-m}r_0(x) \cdots r_n(x) > 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, а краевые условия неособенные и могут быть представлены в виде

$$\begin{gathered}\sum_{q=1}^{n} \alpha_{iq}(D_{q-1}y)(a) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,\\ \sum_{q=1}^{n} \beta_{iq}(D_{q-1}y)(b) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n - m;\end{gathered} \tag{3.6}$$

$$D_0u = r_nu, \qquad D_mu = r_{n-m} \frac{d}{dz} [D_{m-1}u]. \tag{3.7}$$

Если все отличные от нуля миноры m-го порядка матрицы

$$A = \|(-1)^q\alpha_{iq}\| \qquad (i = 1, \ldots, m; \quad q = 1, \ldots, n)$$

имеют одинаковый знак и то же справедливо для миноров $(n - m)$-го порядка матрицы

$$B = \|\beta_{iq}\| \qquad (i = 1, \ldots, n - m; \quad q = 1, \ldots, n),$$

то краевая задача (3.5) имеет осцилляционную функцию Грина $G(x, t)$ и, следовательно, простой положительный вещественный спектр

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots.$$

Теорема 3 (Барковского — Юдовича [10]). *Если в условиях теоремы 2 функция $r(x)$ на $[a, b]$ меняет знак один раз, то краевая задача (3.5) имеет счетное число простых отрицательных и простых положительных собственных значений*

$$\ldots < \lambda_{-3} < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots.$$

Для доказательства теоремы 1 запишем (3.1), (3.2) в виде

$$-f_0^2LNL\theta = \mathrm{R}k^2\phi\theta; \tag{3.8}$$

$$z = 0, l: \qquad \theta = L\theta = NL\theta = 0. \tag{3.9}$$

Из (3.3), (3.4) следует, что дифференциальное выражение f_0^2LNL может быть факторизовано с положительными весами:

$$f_0^2LNL = r_0 \frac{d}{dz} r_1 \frac{d}{dz} r_2 \frac{d}{dz} r_3 \frac{d}{dz} r_4 \frac{d}{dz} r_5 \frac{d}{dz} r_6, \tag{3.10}$$

которые определяются равенствами $r_0 = f_0^2\,\mathrm{e}^{-kz}$, $r_1 = r_5 = \mathrm{e}^{2kz}$, $r_2 = \mathrm{e}^{-kz}\,\rho_1$, $r_3 = \rho_2$, $r_4 = \rho_3\,\mathrm{e}^{-kz}$, $r_6 = \mathrm{e}^{-kz}$.

Используя обозначения (3.7), в которых $n = 6$, $m = 3$, приведем задачу (3.8), (3.9) к виду

$$-D_6\theta = \mathrm{R}k^2\phi\theta;$$

$$z = 0, l: \qquad D_0\theta = D_2\theta = D_4\theta = 0. \tag{3.11}$$

Краевые условия (3.11) можно представить в форме (3.6), где матрицы $A = (\alpha_{iq})$, $B = (\beta_{jq})$ имеют вид

$$A = B = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что все ненулевые миноры 3-го порядка этих матриц положительны. В случае, когда $\phi(z) > 0$ на отрезке $z \in [0, l]$ для любых $\beta \in [0, \beta_*)$ и $k \geqslant 0$, краевая задача (3.8), (3.9) с учетом (3.10) удовлетворяет условиям теоремы 2, из которой следует утверждение первой части теоремы 1. В случае, когда функция $\phi(z)$ меняет знак один раз на отрезке $z \in [0, l]$ для любых $\beta \in [0, \beta_*)$ и $k \geqslant 0$, положительность всех миноров 3-го порядка матриц A и B и факторизация (3.10) позволяют применить к спектральной задаче (3.8), (3.9) теорему 3, из которой следует утверждение второй части теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Замечание 3. В случае, когда $\phi(z) > 0$, по теореме 2 краевая задача (3.8), (3.9) имеет осцилляционную функцию Грина. Согласно теории интегральных операторов с осцилляционными ядрами [9] собственная вектор-функция этой задачи (θ_1, w_1), соответствующая минимальному собственному значению R_1, не меняет знак на $[0, l]$, а собственная вектор-функция (θ_n, w_n), соответствующая n-му по модулю собственному значению R_n, на $[0, l]$ меняет знак $n - 1$ раз.

Замечание 4. Теорема 1 справедлива, например, для случаев, когда границы слоя — твердые стенки, либо одна из них — твердая стенка, а другая — свободная недеформируемая граница. Тогда на границе вместо условия $DF = 0$ (см. (2.5)) справедливо условие $F = 0$, и соответствующим образом меняется спектральная задача: вместо $NL\theta = 0$ имеем $DL\theta = 0$.

Рассмотрим некоторые примеры.

3.1. *Линейная зависимость удельного объема от температуры.* В данном случае функция $V(T)$ имеет вид

$$V = \tilde{V}(1 + \alpha(T - \tilde{T})). \tag{3.12}$$

Как показано в [11], для такой (и только такой) зависимости удельного объема от температуры удельная теплоемкость при постоянном давлении c_p не зависит от давления (см. также [2, 4, 6, 12–14]).

Поскольку зависимость $\partial V/\partial T = \tilde{V}\alpha$ не имеет нулей, можно положить $\tilde{T} = T_2$. Тогда $l = 1$, функция $\phi(z) \equiv 1$, и по теореме 1 спектр критических чисел Рэлея состоит из счетного числа простых положительных собственных значений (критических чисел Рэлея).

Замечание 5. Утверждения теоремы 1 остаются справедливыми, если в (1.11) $\beta \to 0$. Если уравнение состояния имеет вид (3.12), то при $\beta \to 0$ ($\alpha \to 0$) из (1.11) можно получить уравнения в приближении Обербека — Буссинеска [2, 4, 6, 14]. Тогда из теоремы 1 следует вывод о положительности и простоте спектра критических чисел Рэлея для приближения Обербека — Буссинеска [15].

3.2. *Квадратичная зависимость удельного объема от температуры.* Рассмотрим модель проникающей конвекции с квадратичной зависимостью удельного объема от температуры [3–5]:

$$V = V_i(1 + \gamma(T - T_*)^2).$$

Здесь V_i — минимальный удельный объем; T_* — точка инверсии; γ — постоянная; $\alpha = \gamma\Theta$ — средний коэффициент объемного расширения жидкости; $\beta = \alpha\Theta = \gamma\Theta^2$ — параметр теплового расширения; производная $\partial V/\partial T = 2V_i\gamma(T - T_*)$ меняет знак в точке T_*. Тогда $l > 1$, а функция $\phi(z) = 2(1 - z)$ на отрезке $z \in [0, l]$ меняет знак один раз в точке $z = 1$. Согласно теореме 1 в этом случае существует счетное число положительных и отрицательных простых собственных значений (критических чисел Рэлея), а мнимые и кратные отсутствуют.

Автор выражает благодарность В. И. Юдовичу и Ю. С. Барковскому за полезные обсуждения, а также В. В. Пухначеву за помощь в постановке задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ландау Л. Д.** Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986.
2. **Юдович В. И.** Уравнения свободной конвекции изотермически несжимаемой жидкости / Ростов. гос. ун-т. Препр. Ростов н/Д, 1983.
3. **Veronis G.** Penetrative convection // Astrophys. J. 1963. V. 137, N 2. P. 641–663.
4. **Надолин К. А.** Численное исследование математических моделей свободной конвекции изотермически несжимаемой жидкости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1989.
5. **Надолин К. А.** Конвекция в горизонтальном слое жидкости при инверсии удельного объема // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989. № 1. С. 43–49.
6. **Андреев В. К., Бекежанова В. Б.** Об устойчивости равновесия плоского слоя в модели микроконвекции // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 2. С. 43–53.
7. **Пойа Г.** Задачи и теоремы из анализа / Г. Пойа, Г. Сеге. М.: Физматгиз, 1956. Ч. 1.
8. **Калафати П. Д.** О функциях Грина обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1940. Т. 26, № 6. С. 535–539.
9. **Гантмахер Ф. Р.** Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. М.: Гостехтеоретиздат, 1950.
10. **Барковский Ю. С., Юдович В. И.** Спектральные свойства одного класса краевых задач // Мат. сб. 1981. Т. 114, № 3. С. 438–450.
11. **Mihaljan J. M.** A rigorous exposition of the Boussinesq approximation applicable to a thin layer of fluid // Astrophys. J. 1962. V. 136, N 3. P. 1126–1133.
12. **Юдович В. И.** Конвекция изотермически несжимаемой жидкости. Б. м., 1999. Деп. в ВИНИТИ 28.05.99. N 1699–В99.
13. **Пухначев В. В.** Модель конвективного движения при пониженной гравитации // Моделирование в механике. 1992. Т. 6, № 4. С. 47–56.
14. **Пухначев В. В.** Иерархия моделей в теории конвекции // Зап. науч. семинаров С.-Петерб. отд-ния Мат. ин-та / Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. 2002. Т. 288. С. 152–177.
15. **Юдович В. И.** О возникновении конвекции // Прикл. математика и механика. 1966. № 30. С. 1000–1005.

Поступила в редакцию 7/IX 2004 г.,
в окончательном варианте — 3/X 2006 г.