

В результате прохождения солитона радиус трубы принимает прежнее значение R_0 , а в продольном направлении стенка смещается на величину $\Delta u/R_0 = \frac{12\lambda}{\lambda + 2a} \sqrt{-G_{x2}(1)/G_{x3}(1)}$. Отметим, что в [2] прохождение волны характеризовалось лишь радиальными перемещениями. На рис. 6 показана зависимость $\Delta u/R_0$ от M_0^2 при тех же параметрах. Как видно, продольные перемещения по своей величине превосходят радиальные. Это указывает на необходимость рассмотрения задач распространения волн напряжений и деформаций в трубопроводах с учетом квазидвумерности напряженно-деформируемого состояния стенки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров А. В., Фомин В. М. Математическое моделирование процессов, протекающих в магистральных трубопроводах. Препринт ИТНМ СО АН СССР, 1983, № 35.
2. Федоров А. В. Распространение солитона в упругом криволинейном трубопроводе. — В кн.: Численные методы решения задач теории упругости и пластичности/Под ред. В. М. Фомина. Новосибирск: ИТНМ СО АН СССР, 1984.
3. Андронов А. А., Витт А. Л., Хайкин С. О. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.

Поступила 13/III 1985 г.

УДК 532.593

ГЕНЕРАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ПРИ СОВМЕСТНОМ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ЦИЛИНДРА В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Букреев, А. В. Гусев, И. В. Стурова

(Новосибирск)

В настоящее время в рамках линейной теории выполнен анализ внутренних волн в невязкой двухслойной жидкости при достаточно общем законе движения источника возмущения (см., например, [1]). Для частного случая движения круглого цилиндра перпендикулярно его образующей один из интересных режимов такой, когда наряду с поступательным перемещением параллельно границе раздела цилиндр совершает вертикальные гармонические колебания. Как показано в [1], волновое поле в этом случае существенно зависит от частоты колебаний Ω . При относительно малых частотах волновые возмущения имеют место как впереди, так и позади тела. С увеличением частоты сверх некоторого критического значения Ω_* , зависящего от скорости поступательного движения тела, толщин слоев и перепада плотности между ними, волновое движение возможно только за телом. При $\Omega = \Omega_*$ в рамках линейной теории идеальной жидкости происходит неограниченное (степенное) нарастание амплитуды волн во времени, как и в различного рода резонансных явлениях. Рост волн могут ограничить либо вязкость, либо нелинейные эффекты. Влияние вязкости рассмотрено в [2] на примере аналогичной плоской задачи о возмущениях, создаваемых горизонтально колеблющимся цилиндром, движущимся в нижнем слое безграничной двухслойной жидкости. При этом предполагалось, что вязкость отлична от нуля только в верхнем слое. Нелинейные эффекты проанализированы в [3, 4], где на примере частного случая однородной жидкости учтены нелинейные граничные условия на свободной поверхности. Для линейно-стратифицированной жидкости теоретически и экспериментально изучено поведение внутренних волн при различных законах движения тела (см., например, [5]). Наиболее близка по постановке к рассматриваемой задаче работа [6].

В теоретической части данной работы основное внимание уделяется учету вязкости в рамках линейной модели. Проведены также опыты, в которых изучены критические и близкие к ним режимы. Настоящая работа — продолжение [7], где представлено теоретическое и экспериментальное исследование внутренних волн, возникающих при вертикальных гармонических колебаниях погруженного цилиндра в двухслойной вязкой жидкости с учетом поверхностного натяжения на границе раздела.

При теоретическом решении линейной задачи о поведении внутренних волн, генерируемых движущимся круглым цилиндром, последний моделируется точечным диполем. Жидкость предполагается несжимаемой, в невозмущенном состоянии покоящейся и состоящей из двух бесконечно

глубоких слоев малой вязкости; плотность жидкости в верхнем ($y > 0$) и нижнем слоях ($y < 0$) соответственно ρ_1 и $\rho_2 = \rho_1(1 + \epsilon)$ ($\epsilon > 0$), динамические коэффициенты вязкости μ_1 и μ_2 . Поверхностное натяжение на границе раздела характеризуется коэффициентом σ . Ось y направлена вертикально вверх, горизонтальная ось x совпадает с невозмущенной поверхностью раздела. Предполагается, что в момент времени $t = 0$ в верхнем слое жидкости начинает действовать диполь с переменным моментом $M(t)$ ($M(t) \equiv 0$ при $t \leq 0$) и траектория его движения имеет вид $X = Y(t)$, где $X = (x, y)$, $Y(t) = (y_1(t), y_2(t))$. Аналогично однородной безграничной жидкости это эквивалентно движению кругового цилиндра радиуса R со скоростью $U(t) = (U_1(t), U_2(t))$ (момент диполя равен $M(t) = 2\pi R^2 U(t)$, $dY/dt = U(t)$). Окончательно выражение для функции $\eta(x, t)$, описывающей вертикальное смещение поверхности раздела при движении в верхнем слое круглого цилиндра, можно записать как (подробнее см. [7])

$$(1) \quad \eta = -\frac{2R^2}{2+\epsilon} \int_0^\infty k dk \int_0^t [U_1(\tau) \sin k(x - y_1(\tau)) - U_2(\tau) \cos k(x - y_1(\tau))] \times \\ \times e^{-ky_2(\tau) - \lambda(t-\tau)} \left[\cos \omega(t - \tau) - \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega(t - \tau) \right] d\tau,$$

где

$$(2) \quad \omega(k) = \gamma(k) - \chi(k);$$

$\gamma^2(k) = [(\rho_2 - \rho_1)gk + \sigma k^3]/(\rho_1 + \rho_2)$ — дисперсионное соотношение для свободных волн в идеальной двухслойной безграничной жидкости с учетом поверхностного натяжения;

$$\chi(k) = \frac{k \sqrt{2\gamma(k) \rho_1 \rho_2 \mu_1 \mu_2}}{(\rho_1 + \rho_2) (\sqrt{\rho_1 \mu_1} + \sqrt{\rho_2 \mu_2})}; \quad \lambda(k) = \chi(k) + \frac{2k^2 (\rho_1 \mu_1^2 + \rho_2 \mu_2^2)}{(\rho_1 + \rho_2) (\sqrt{\rho_1 \mu_1} + \sqrt{\rho_2 \mu_2})^2};$$

g — ускорение силы тяжести.

При суперпозиции поступательного по горизонтали и колебательного по вертикали перемещения цилиндра траектория движения его центра имеет вид

$$(3) \quad y_1(t) = U_0 t, \quad y_2(t) = h + a \sin \Omega t.$$

В предположении, что амплитуда колебаний цилиндра мала ($a_1 = a/h \ll 1$), решение (1) для заданного движения (3) линеаризуем по a_1 и, переходя к подвижной системе координат $x_1 = U_0 t - x$, представим как

$$\eta = \eta_0 + a_1 (\eta_c \cos \Omega t + \eta_s \sin \Omega t) + O(a_1^2),$$

$$\text{где } \eta_0(x_1, t) = -U_0 \int_0^\infty dk \int_0^t A(k, p) \sin k(U_0 p - x_1) dp;$$

$$(4) \quad \eta_c(x_1, t) = \Omega h \int_0^\infty dk \int_0^t A(k, p) \cos \Omega p \cos k(U_0 p - x_1) dp;$$

$$(5) \quad \eta_s(x_1, t) = \Omega h \int_0^\infty dk \int_0^t A(k, p) \sin \Omega p \cos k(U_0 p - x_1) dp,$$

$$A(k, p) = \frac{2kR^2}{2+\epsilon} e^{-kh-\lambda p} \left(\cos \omega p - \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega p \right).$$

Слагаемое η_0 при $t \rightarrow \infty$ описывает стационарное волновое движение, возникающее при обтекании цилиндра равномерным потоком со скоростью U_0 . При исследовании асимптотического поведения этой функции при $x_1, t \rightarrow \infty$ применяется метод стационарной фазы. Ограничиваясь лишь теми стационарными точками, которые расположены в окрестности невязкого решения, без учета поверхностного натяжения ($\sigma = 0$) получим

$$(6) \quad \eta_0 \approx \frac{2\pi R^2 U_0}{2 + \varepsilon} |\beta| k_0 \exp[-k_0 h - \beta \lambda(k_0) x_1] \times \\ \times \left[\sin k_0 x_1 + \frac{i(k_0)}{k_0 U_0} \cos k_0 x_1 \right] \quad (x_1, t \rightarrow \infty),$$

$$\text{где } \beta^{-1} = U_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{g_1}{k_0} \right)^{1/2} + \frac{5}{4} \alpha_1 k_0^{1/4}; \quad g_1 = \varepsilon g / (2 + \varepsilon), \quad \alpha_1 = \chi k^{-5/4};$$

k_0 — корень уравнения $\alpha_1 k^{3/4} + U_0 k^{1/2} - g_1^{1/2} = 0$, при малых α_1 можно использовать приближенную зависимость $k_0 \approx g_1 (U_0^{-1/2} - \alpha_1 g_1^{1/4} / 2 U_0^2)^4$. Сравнение решения (6) с численными расчетами, представленными в [8], дало хорошее совпадение.

Аналогичным образом исследуется асимптотическое поведение функций η_s и η_c . Фазовые функции в интегралах (4), (5) равны

$$\Psi_{1,2}(k, p) = k(U_0 p - x_1) \pm p[\Omega + \omega(k)],$$

$$\Psi_{3,4}(k, p) = k(U_0 p - x_1) \pm p[\Omega - \omega(k)].$$

Искомые стационарные точки — решения системы уравнений

$$\partial \Psi_i / \partial k = 0, \quad \partial \Psi_i / \partial p = 0 \quad (i = 1, \dots, 4).$$

Наиболее просто провести анализ стационарных точек для идеальной жидкости без учета поверхностного натяжения ($\mu_1 = \mu_2 = \sigma = 0$). В этом случае функция Ψ_1 не имеет стационарных точек, а для Ψ_2 единственная стационарная точка определяется выражением

$$k_1 = \left(\frac{\sqrt{g_1 + 4U_0\Omega} + \sqrt{g_1}}{2U_0} \right)^2, \quad p_1 = \frac{x_1}{U_0} \left(1 + \sqrt{\frac{g_1}{g_1 + 4U_0\Omega}} \right)$$

и существует только при $x_1 > 0$. Функция Ψ_3 имеет при $\Omega < \Omega_* = \frac{g_1}{4U_0}$

две различные стационарные точки:

$$k_{2,3} = \left(\frac{\sqrt{g_1} \mp \sqrt{g_1 - 4U_0\Omega}}{2U_0} \right)^2, \quad p_{2,3} = \frac{x_1}{U_0} \left(1 \mp \sqrt{\frac{g_1}{g_1 - 4U_0\Omega}} \right),$$

причем точка k_2, p_2 дает вклад только при $x_1 < 0$, а точка k_3, p_3 — при $x_1 > 0$. При $\Omega = \Omega_*$ функция Ψ_3 имеет кратную стационарную точку, которой соответствует резонансно возбуждаемая вынужденная волна. При $\Omega > \Omega_*$ для Ψ_3 стационарных точек нет. Функция Ψ_4 имеет единственную стационарную точку только при $x_1 > 0$:

$$k_4 = \left(\frac{\sqrt{g_1 + 4U_0\Omega} - \sqrt{g_1}}{2U_0} \right)^2, \quad p_4 = \frac{x_1}{U_0} \left(1 - \sqrt{\frac{g_1}{g_1 + 4U_0\Omega}} \right).$$

Следовательно, при $\Omega > \Omega_*$ существуют две волны, распространяющиеся вниз по потоку, при $\Omega < \Omega_*$ — четыре волны, три из которых — вниз по течению, а одна — вверх по течению.

При учете поверхностного натяжения независимо от наличия вязкости определение стационарных точек возможно с помощью численных методов. Отметим, что общее число волн при этом может достигать шести. Влияние вязкости в первую очередь состоит в том, что из-за наличия экспоненциального множителя в (4), (5) устраняется резонансная расходимость решения при $\Omega = \Omega_*$, причем для внутренних волн на поверхности раздела демпфирующее влияние вязкости на относительно длинных волнах более значительно, чем для поверхностных волн.

Опыты проводились на экспериментальной установке, схема которой приведена на рис. 1, где 1 — свободная поверхность, 2 — самодвижущаяся тележка, 3 — привод вертикальных колебаний, 4 — траектория движения оси цилиндра, 5 — граница раздела, 6 — неподвижный волномер, 7 — дно канала, 8 — его торцевая стенка. Указаны также наиболее существ-

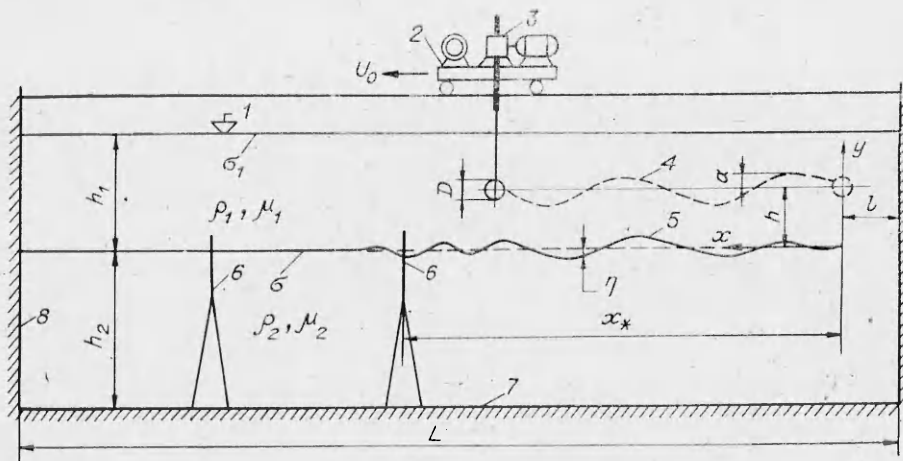


Рис. 1

венные параметры. В качестве нижнего слоя использовалась вода, верхнего — керосин.

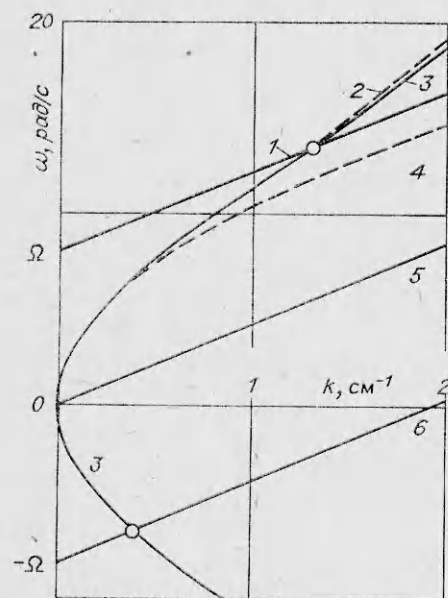
Отклонение границы раздела от положения равновесия η регистрировалось как функция времени $0 \leq t \leq t_1$ при нескольких фиксированных значениях $x = x_*$. Значение t_1 выбиралось из тех соображений, чтобы волны, отраженные от торцевых стенок канала, еще не достигли рассматриваемой точки x_* . Основные варьируемые параметры — U_0 и Ω . Другие величины, от которых в общем случае зависит η , оставались неизменными и равными: $L = 4,8$ м, $l > 40$ см, $h_1 = 15$ см, $h_2 = 30$ см, $D = 2R = 1$ см, $a = 0,5$ см, $h = 2$ см, $\rho_1 = 0,8$ г/см³, $\rho_2 = 1$ г/см³, $\mu_1 = 0,01296$ г/(см·с), $\mu_2 = 0,0108$ г/(см·с), $\sigma = 34 \cdot 10^{-3}$ Н/м, $\sigma_1 = 27 \cdot 10^{-3}$ Н/м. Ширина канала $B = 20$ см, зазор между боковыми стенками канала и торцами цилиндра $0,2$ см. Измерения в разных точках по ширине показали, что волны практически были двумерными.

Максимальные значения η в опытах имели порядок 1 мм, а характерная частота колебаний не превышала $1,5$ Гц. Преобразование η в электрический сигнал осуществлялось теми же, что и в [7], волномерами, в которых использовалось существенное различие электропроводности жидкостей в слоях. Преобразование линейное, с чувствительностью порядка 100 мВ/мм, нижним порогом около 50 мкм и равномерной частотной характеристикой, по крайней мере, в диапазоне от 0 до 4 Гц. Регистрировали электрические сигналы двухканальными самописцами, имеющими адекватные характеристики.

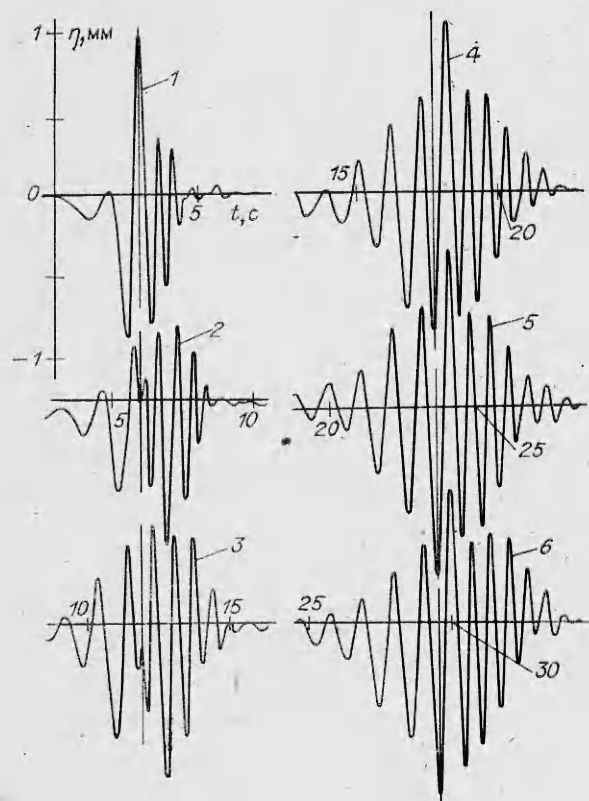
Основное внимание в опытах уделялось упомянутому ранее критическому и близким к нему режимам. При этом функция $\eta(t)$ имела весьма сложный вид, и сформулировать строгую количественную меру случайных погрешностей измерений для нее затруднительно. Можно указать, что при повторных измерениях в одних и тех же условиях фазовая картина основного пуга волн воспроизводилась с точностью до выбранного масштаба записей, а наибольшие амплитуды волн имели вариации по величине в пределах 10% .

На рис. 2 линией 3 приведена дисперсионная зависимость (2), описывающая связь между волновым числом k и частотой ω внутренних волн при указанных выше параметрах. Эта зависимость получила хорошее подтверждение в ранее выполненных опытах [7]. Функция $\omega(k)$ симметрична относительно оси k . Для сравнения приведены верхние ветви дисперсионных кривых для невязких жидкостей ($\mu_{1,2} = 0$, линия 2) и для чисто гравитационных волн ($\mu_{1,2} = \sigma = 0$, линия 4).

Чтобы определить, какие именно из возможных колебаний возбуждаются в системе заданным возмущением, нужно построить в плоскости (k, ω) характеризующую это возмущение зависимость $\omega_*(k)$. Для рас-



Р и с. 2



Р и с. 3

смаатриваемой здесь задачи $\omega_*(k)$ есть множество

$$\omega_*(k) = \{U_0 k, U_0 k + \Omega, U_0 k - \Omega\},$$

отдельные функции которого помечены на рис. 2 цифрами 5, 1, 6. При чисто колебательном движении цилиндра $\omega_* = \pm \Omega$, при чисто поступательном $\omega_* = \pm U_0 k$. Точки пересечения $\omega_*(k)$ и $\omega(k)$ определяют значения k и ω возбуждаемых волн.

Упомянутые критические режимы соответствуют точкам касания $\omega_*(k)$ и $\omega(k)$. В опытах реализованы два таких режима: режим I с $U_0 = 8,44$ см/с, $\Omega/2\pi = 0,51$ Гц и режим II с $U_0 = 11,9$ см/с, $\Omega/2\pi = 0,36$ Гц. Значения $\Omega U_0/g_1$ равны для них соответственно 0,248 и 0,247, причем в обоих случаях точка касания находится в области чисто гравитационных волн. Реализован также режим III с $U_0 = 4,28$ см/с, $\Omega/2\pi = 1,03$ Гц, для которого $\Omega U_0/g_1 = 0,254$, так что для гравитационных волн он был бы критическим. Но в системе с поверхностным натяжением в этом режиме имеются только точки пересечения $\omega(k)$ и $\omega_*(k)$. В опытах осуществлялась вариация U_0 в окрестности режимов I и III.

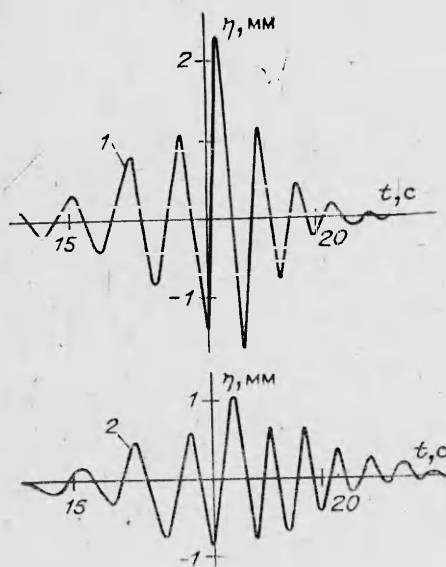
На рис. 3 приведена последовательность записей $\eta(t)$ в режиме I волномерами, расположенными на различных расстояниях x_* (кривые 1—6 соответствуют $x_* = 0,25; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5$ м). Время отсчитывается от начала движения цилиндра. Параметры U_0 , Ω и a принимали свои постоянные значения за время не более 0,2 с. Записи заканчивались до момента остановки цилиндра и прихода в рассматриваемую точку отраженных волн. Моменты прохода оси цилиндра над волномерами помечены вертикальными линиями.

Из рис. 3 видно, что в критическом режиме волны существуют и впереди, и позади цилиндра, причем под цилиндром происходит резкая смена частоты колебаний границы раздела. В этом режиме линии $\omega(k)$ и $\omega_*(k)$ имеют три общие точки: точку касания на верхней ветви дисперсионной кривой и две точки пересечения — одна на нижней, другая на верхней ветвях $\omega(k)$. Поэтому в системе возбуждаются три стационарные волны с длинами и частотами, соответствующими указанным точкам. Впереди цилиндра распространяется только та из этих волн, которая соответствует точке касания. За цилиндром имеет место суперпозиция всех трех волн.

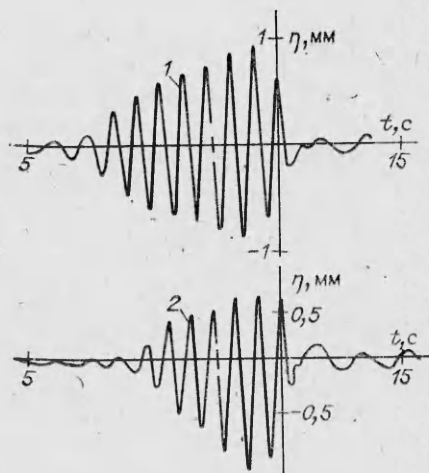
Если сравнивать наибольшие амплитуды волн в цуге с теми, что при чисто поступательном с $U_0 = 8,44$ см/с или чисто колебательном с $\Omega/2\pi = 0,51$ Гц движении, то можно отметить существенное изменение не только в фазовой картине, но и в максимальных амплитудах волн. В частности, при чисто поступательном движении из-за влияния поверхностного натяжения волновое движение в рассматриваемой системе совсем не возбуждается, если $U_0 < 9,6$ см/с (линия $\omega_*(k) = U_0 k$ при этом условии нигде не пересекает $\omega(k)$). При чисто колебательном движении цилиндра с $\Omega/2\pi = 0,51$ Гц амплитуды волн не превышают 0,03 мм.

Вариации U_0 в окрестности критического значения показали, что аналогично резонансным явлениям в динамических системах со значительным затуханием усиление волн происходит и в некоторой окрестности критического режима. Достаточно плавно перестраивается также фазовая картина волн. Это обстоятельство указывает на принципиальную необходимость учета вязкости в математической модели.

Сопоставление расчетных и экспериментальных данных для режима I при $x_* = 1,5$ м приведено на рис. 4 (1 — расчет, выполненный путем численного интегрирования (1) при $y_1(t) = U_0(t)$, $y_2(t) = h - a \sin \Omega t$ и указанных выше параметрах движения, 2 — эксперимент); причем имеет место согласование по всем условиям, кроме следующих: 1) в расчетах принималось $L, B \rightarrow \infty$; аргументация правомерности такого допущения приводилась выше; 2) расчеты выполнены при $h_{1,2} \rightarrow \infty$, уверенность, что это не приводило к заметным расхождениям с экспериментальными данными, основана на ранее выполненных оценках (см., например, [7]), а также на результатах визуальных наблюдений за свободной поверх-



Р и с. 4

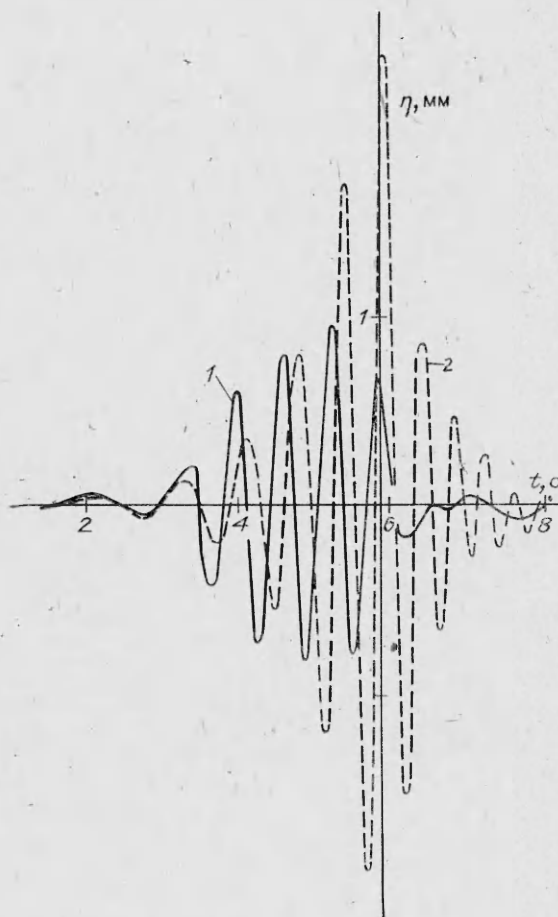


Р и с. 5

ностью в опытах; 3) в теории диполь, имитирующий цилиндр, «включался» мгновенно, а реальное время выхода U_0 , Ω и a на постоянные значения было хотя и малым, но конечным. Это привело к некоторой неопределенности при согласовании в расчетах и опытах той точки траектории цилиндра, где он проходил над волномером.

Роль последнего фактора оценивалась вариацией в расчетах и опытах начальной фазы φ колебательного движения цилиндра в диапазоне $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. В расчетных данных это приводило практически только к смещению той точки стационарного цуга волн, в которой происходит смена частоты колебаний η . В опытах из-за недостаточно большого значения h имела место также вариация максимального значения η в цуге (в пределах 10%). Для сопоставления выбраны такие варианты записей и расчетов, в которых согласованы точки смены частоты колебаний.

Чтобы посмотреть, как обстоит дело для более длинных волн, когда вязкое затухание слабее, реализован критический режим II. К сожалению, в нем значения η оказались столь малыми, что их не удалось зарегистрировать даже весьма чувстви-



Р и с. 6

тельными волномерами. Можно только констатировать, что и в этом режиме рост волн оказался ограниченным.

С другой стороны, усиление волн при сложном возмущении (по сравнению с тем, что происходит для порознь взятых его составляющих) может наблюдаться и не в критических условиях. Примером служат данные для режима III при $x_* = 1,5$ м, приведенные на рис. 5 (1 — расчет с учетом (3), 2 — эксперимент). В этом случае усиливаются волны только впереди цилиндра. На указанном расстоянии x_* пуг волн становится практически постоянным. Характерная частота колебаний в нем определяется точкой пересечения $\omega(k)$ и $\omega_*(k) = U_0 k + \Omega$.

На рис. 6 приведены результаты расчетов для режима III при $x_* = 0,25$ м в тех же условиях, что и на рис. 5, с учетом (линия 1) и без учета вязкости и поверхностного натяжения (линия 2).

Данные рис. 4—6 показывают, что учет вязкости в рассматриваемой задаче даже в рамках линейной теории приводит к неплохому согласию с опытом, особенно по фазовой картине волн. Некоторое превышение амплитуд волн в расчете, видимо, связано с пренебрежением нелинейными членами в граничном условии на поверхности раздела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стурова И. В. Внутренние волны, возникающие в двухслойной жидкости при нестационарном движении тела. — В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1985, вып. 70.
2. Долина И. С. Усиление колебательного движения тел в стратифицированной жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 4.
3. Dagan G., Miloh T. Free-surface flow past oscillating singularities at resonant frequency. — J. Fluid Mech., 1982, v. 120.
4. Akyas T. R. On the excitation of nonlinear water waves by a moving pressure distribution oscillating at resonant frequency. — Phys. Fluids, 1984, v. 27, N 12.
5. Чашечкин Ю. Д., Макаров С. А., Белиев В. С. Присоединенные внутренние волны. Препринт № 214. — М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1983.
6. Stevenson T. N., Thomas N. H. Two-dimensional internal waves generated by a travelling oscillating cylinder. — J. Fluid Mech., 1969, v. 36, p. 3.
7. Букреев В. И., Гусев А. В., Стурова И. В. Волны от колеблющегося цилиндра в вязкой двухслойной жидкости. — В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1985, вып. 70.
8. Бородин П. Н., Букреев В. И., Гусев А. В., Стурова И. В. Вязкое затухание внутренних волн, возникающих в двухслойной жидкости при движении цилиндра и крыла. — В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1982, вып. 54.

Поступила 25/IV 1985 г.

УДК 532.51

УСЛОВИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Владимиров

(Новосибирск)

Рассмотрена задача устойчивости стационарных течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в классах движений, обладающих одним из типов симметрии (трансляционной, осевой, вращательной или винтовой). Получено два типа достаточных условий нелинейной устойчивости, суть доказательств которых состоит в построении двух типов функционалов, имеющих абсолютные минимумы на заданных стационарных решениях. Каждый из используемых функционалов есть сумма кинетической энергии и некоторого другого интеграла, специфичного именно для изучаемого класса движений. Условия устойчивости первого типа — обобщение на случай конечных возмущений и на новые классы течений известного критерия Рэлея [1] о «центробежной» устойчивости вращающихся потоков относительно вращательно-симметричных возмущений. Условия второго типа в этом же смысле обобщают другой, также принадлежащий Рэлею результат, согласно которому плоскопараллельное течение жидкости устойчиво при отсутствии точки перегиба в профиле скорости [1]. Нелинейный вариант последнего утверждения для класса плоских движений впервые получен в [2]. Для систематизации материалов в работе существенно использована аналогия между эффектами плотностной стратификации и вращения в форме [3].