

ДИНАМИКА УДАРНЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ
ПУЗЫРЬКИ ГАЗАС. С. Кутателадзе, В. Е. Накоряков,
В. В. Соболев, И. Р. Шрейбер

(Новосибирск)

Приведены результаты численного решения уравнения Кортевега — де Фриза — Бюргерса, описывающего процесс распространения и установления стационарной структуры ударной волны в газожидкостной среде.

Получены данные о временах установления стационарной структуры ударной волны, скорости распространения, амплитудных осцилляций во фронте ударной волны.

На основе полученных результатов обсуждены эксперименты по изучению ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа.

1. Волны сжатия конечной амплитуды в газожидкостных средах экспериментально и теоретически исследовались в [1-12].

В [5,8] показано, что при определенных соотношениях между эффективной вязкостью смеси, интенсивностью возмущения и радиусом пузырька в жидкости с пузырьками газа возможно формирование слабой ударной волны с осцилляторной структурой. Случай сильных ударных волн в такой среде рассмотрен в [10].

В [6,8] расчет осцилляторной структуры стационарной ударной волны выполнен на основе уравнений для гомогенной односкоростной модели в предположении адиабатичности процесса внутри пузырьков суспензии, в [11] приведены результаты расчета стационарной волны на основе двухскоростной модели среды в предположении неполитропности процесса.

В [4,5] показано, что эволюция длинноволновых возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа, может быть рассмотрена на основе уравнения Бюргерса — Кортевега — де Фриза (БКФ), являющегося модельным уравнением для описания процесса распространения волн конечной амплитуды в среде со слабой дисперсией и диссипацией [13]

$$(1.1) \quad u_t + uu_x - \eta u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0$$

Здесь t — время; x — координата; u — возмущение скорости смеси; η — коэффициент эффективной вязкости смеси; $\beta = R_0^2 c_0 / 6 \alpha_0 (1 - \alpha_0)$; $(\beta c_0^2)^{-1/2}$ — длина дисперсии; R_0 — радиус равновесного пузырька; $c_0 = = P^{1/2} [\rho_1 \alpha_0 (1 - \alpha_0)]^{-1/2}$ — низкочастотная аппроксимация скорости звука в газожидкостной среде; ρ_1 — плотность жидкости; α_0 — начальное объемное газосодержание смеси.

Уравнение (1.1) записано в системе отсчета, движущейся со скоростью c_0 . В случае, когда диссипация обусловлена только вязкими потерями на границе пузырек — жидкость, коэффициент эффективной вязкости смеси имеет вид

$$(1.2) \quad \eta = 2 \nu / 3 \alpha_0$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости. В [9] содержится замечание относительно коэффициента (1.2): реальный коэффициент диссипации в смеси на два порядка превышает коэффициент, вычисленный по

формуле (1.2). Коэффициент η может быть вычислен более точно, исходя из результатов [14]

$$\eta = \delta \omega R_0^2 / 6 \alpha_0 (1 - \alpha_0)$$

где δ — декремент затухания, который может быть представлен в виде суммы декрементов, обусловленных термической диссипацией, потерями на звуковое излучение и рассчитанных в [14], ω — частота пульсаций пузырька, которая для слабых ударных волн близка к резонансной частоте пузырька, вычисленной по равновесным значениям давления и радиуса.

Вклад в диссипацию потерь, обусловленных тепловыми эффектами и излучением, может быть существенным.

Стационарные решения уравнения (1.1) вида $u = u(x - Vt)$, описывающие структуру фронта, получаются интегрированием обыкновенного дифференциального уравнения

$$(1.3) \quad \beta u''' - \eta u'' + u'(u - V) = 0$$

где $V = \Delta u / 2$, Δu — скачок скорости в ударной волне.

Критерий существования ударных волн с осциллирующей структурой, следующий из уравнения (1.3), имеет вид [13]

$$(1.4) \quad \eta (2 \beta \Delta u)^{-1/2} < 1$$

Критерий (1.4) может не выполняться в процессе установления стационарного фронта. Возможность возникновения ударной волны с осциллирующей структурой в газожидкостной смеси была подтверждена экспериментально в [4, 6-8, 10, 12].

В [11] высказано предположение, что для достижения стационарной структуры ударной волны требуются времена намного больше тех, которые реализованы в указанных экспериментах.

В данной работе исследуется процесс установления ударной волны и проводится сравнение с имеющимися экспериментальными результатами.

2. Процесс установления ударной волны изучался на основе задачи о распаде произвольного разрыва с помощью численного интегрирования уравнения (1.1).

Начальное условие для уравнения (1.1) выбиралось в виде «ступеньки» формы

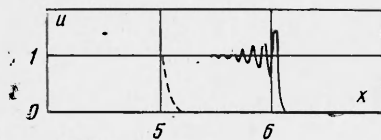
$$(2.1) \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 \text{ м/сек, } x \leq x_0 \\ u(x, 0) &= u_0 \exp[-(x - x_0)^2 / e^2], \quad x > x_0 \end{aligned}$$

Наклон фронта разрыва мог регулироваться изменением параметра. Координаты и форма ступеньки показаны пунктиром на фиг. 1. Кроме того, проводились численные эксперименты с финитными начальными распределениями вида

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 \exp[-(x - x_1)^2 / e_1^2], \quad 0 \leq x \leq x_1 \\ u(x, 0) &= u_0, \quad x_1 < x \leq x_0 \\ u(x, 0) &= u_0 \exp[-(x - x_0)^2 / e_2^2], \quad x > x_0 \end{aligned}$$

Начальное возмущение (2.1) приблизительно соответствует условиям экспериментов [8], а распределение вида (2.2) — экспериментам [4, 6, 7], где камера высокого давления имела ограниченный объем.

Коэффициенты дисперсии и диссипации принимались равными $\beta = 10^{-4} \text{ м}^3/\text{сек}$, $\eta = 10^{-3} \text{ м}^2/\text{сек}$. Эти значения коэффициентов примерно соот-



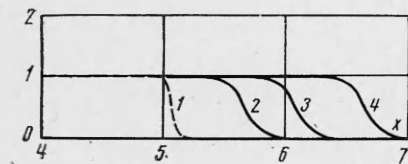
Фиг. 1

ветствуют условиям экспериментов в [4,6-8] ($u_0 = 1$ м/сек, $l = 0.08$ м, $l_1 = 0.04$ м, $l_2 = 0.4$ м).

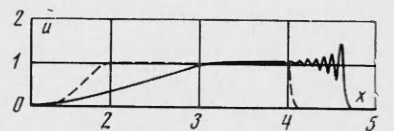
Для удобства сопоставления с результатами экспериментов результаты счета приводятся в размерном виде.

Уравнение (1.1) аппроксимировалось явной трехслойной конечно-разностной схемой второго порядка по координате и времени. Шаги интегрирования принимались равными: по координате $h = 0.01$ м, по времени $\tau = 0.8 \cdot 10^{-3}$ сек.

На фиг. 1 приведены результаты численного интегрирования уравнения (1.1) с начальным условием (2.1); профиль возмущения показан при $t = 2$ сек. При выбранных значениях параметров при высоте ступеньки $u_0 = 1$ м/сек приблизительно через 1.2 сек устанавливалась стационарная удар-



Фиг. 2



Фиг. 3

ная волна осцилляторной структуры. Скорость стационарной ударной волны в системе отсчета, движущейся со скоростью c_0 , равна $0.5 u_0$, что находится в согласии с результатами исследования уравнения (1.3) в [13,15]. Расстояние $x = (c_0 + 0.5 u_0) t$, на котором устанавливается стационарная структура ударной волны, измеряется десятками метров.

Можно согласиться с авторами [11], что во всех выполненных до настоящего времени экспериментах исследовались нестационарные ударные волны.

Из результатов численного интегрирования уравнения (1.1) видно, что осцилляции, возникающие во фронте ударной волны в процессе эволюции начального разрыва, имеют большие амплитуды, чем в момент установления стационарного профиля.

При распространении ударной волны происходит сглаживание осцилляций и в момент установления стационарной структуры наибольшая амплитуда первой осцилляции превышает величину начального возмущения и равна $u_{\max} = 1.42 u_0$.

Для проверки выполнения критерия существования осцилляторной структуры в ударной волне (1.4) был проведен численный эксперимент при $\beta = 10^{-4}$ м³/сек и $\eta = 3 \cdot 10^{-2}$ м²/сек. При таком высоком значении коэффициента вязкости соотношение (1.4) заведомо не выполняется.

Результаты численного решения уравнения (1.1) приведены на фиг. 2 (кривые 1—4 соответствуют $t = 0, 1.2, 2, 3.2$ сек). Видно, что происходит формирование ударного профиля монотонной структуры. Критерий (1.4) дает правильное представление о соотношении величин параметров, характеризующих установление осцилляторной структуры ударной волны.

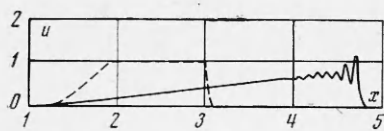
Рассмотрим теперь эволюцию начального распределения вида (2.2).

Длина импульса на участке плато бралась равной $\Delta x = (x_0 - x_1) = 2$ м, $\Delta x = (x_0 - x_1) = 1$ м. Начальную стадию эволюции возмущения (2.2) можно предсказать, исходя из результатов предыдущей задачи. В процессе распространения происходит формирование стационарной осцилляторной структуры ударной волны на переднем фронте, наклон заднего фронта и взаимодействие переднего фронта с волной разрежения, в результате чего формируется характерный фронт ударной волны, образующейся

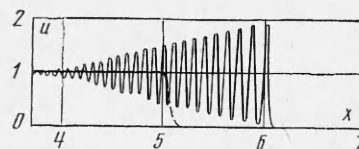
из возмущения конечной протяженности — «треугольник» с осцилляциями.

Эволюция начального распределения (2.2) при $\Delta x = 2$ м показана на фиг. 3 (штриховая линия соответствует $t = 0$, сплошная — $t = 1.2$ сек). В момент времени $t = 1.2$ сек передний фронт волны уже сформирован, но в отличие от случая, приведенного на фиг. 1, форма волны не является окончательной.

В случае $\Delta x = 1$ м при $t = 3.6$ сек (фиг. 4, сплошная линия) формируется треугольный профиль, который может быть принят за установившуюся



Фиг. 4



Фиг. 5

ся структуру ударной волны (штриховой линией на фиг. 4 показано начальное распределение). В силу ограниченности энергии, вложенной в начальное возмущение, и наличия диссипации в среде ударная волна затухает — амплитуда переднего фронта уменьшается. В рассматриваемой системе сохраняется общий импульс, поэтому «площадь» возмущения остается постоянной, а профиль ударной волны расплывается. Характер затухания ударной волны показан на фиг. 4.

В [3] рассматриваются ударные волны в газожидкостной среде в бездиссипативной постановке, на основе уравнения Кортевега — де Фриза (КФ), что соответствует уравнению (1.1) при $\eta = 0$.

На фиг. 5 представлены результаты численного решения (1.1) при $\eta = 0$ (здесь $t = 1.6$ сек). Видно, что при достаточно больших временах возмущение представляет собой расширяющуюся область, занятую осцилляциями, установление стационарной структуры конечной протяженности с определенным числом осцилляций не имеет места.

С течением времени происходит формирование переднего солитона, амплитуда которого достигает удвоенной высоты начального возмущения. Скорость его распространения в системе отсчета, движущейся с c_0 , равна $2u_0/3$.

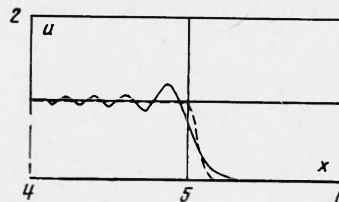
Результаты численного анализа эволюции ступеньки (2.1) находятся в соответствии с аналитическими результатами [16, 17], полученными при $l = 0$.

Следует констатировать, что рассмотренные структуры ударных волн на основе невязкого уравнения (1.1) не дают реального представления о процессе. В еще большей степени это относится к использованию линейного уравнения (1.1), на котором практически построен анализ структуры ударных волн в [3, 8]. В этом случае скорость распространения возмущения равна c_0 , а максимальная амплитуда осцилляций во фронте получается равной $u_{\max} = 1.2 u_0$ м/сек при $\beta = 10^{-4}$ м³/см² (см. фиг. 6, на которой сплошная линия соответствует $t = 2$ сек, штриховая — $t = 0$). Величина $u_{\max}$ существенно зависит от l .

Проведенные исследования показали, что образование стационарных ударных волн в газожидкостной среде с четко выраженным фронтом, имеющим осциллирующий характер или монотонную структуру, возможно только при наличии диссипации в рассматриваемой модели. Начальные возмущения вида ступеньки (2.1) обеспечивают приток энергии, компенсирующий действие диссипативных эффектов, что приводит в конечном

счете к установлению стационарной структуры фронта ударной волны. В случае начальных возмущений, ограниченных по координате, например типа (2.2), начиная с некоторого момента времени волна затухает. При достаточной протяженности начального возмущения в процессе эволюции возможно образование стационарной структуры ударного фронта в течение некоторого промежутка времени до тех пор, пока волна разрежения не приблизится к переднему фронту (фиг. 3, 4). Затем волна разрежения начинает сглаживать передний фронт — образуется типичная треугольная форма ударной волны, которая затухает с течением времени.

Расчеты и экспериментальные исследования структуры ударной волны, проведенные в [6, 7], соответствуют временам, когда волна разрежения находится далеко от переднего фронта, но наблюдавшиеся осцилляции во фронте ударной волны не являются установившимися вследствие малой протяженности экспериментального участка. Ни в одном из экспериментов по исследованию осцилляторной структуры ударной волны [8, 12] не наблюдались стационарные ударные волны. По-видимому, имеющиеся экспериментальные данные по структуре ударных волн необходимо сравнивать с результатами, полученными на основе решений нестационарных уравнений.



Фиг. 6

Поступила 15 IV 1974г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cambell I. J., Pitcher A. S. Shock waves in a liquid containing gas bubbles. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1958, vol. 243, No. 1235.
2. Van Wijngaarden L. On equations of motion for mixtures of fluid and gas bubbles. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, No. 3.
3. Van Wijngaarden L. On the structure of shock waves in liquid-bubble mixtures. Appl. Sci. Res., 1970, vol. 22, No. 5.
4. Бурдуков А. П., Накоряков В. Е., Покусав Б. Г., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Некоторые вопросы газодинамики гомогенной модели двухфазной среды. В сб. «Численные методы механики сплошной среды», т. 5, № 2. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1971.
5. Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Длинноволновые возмущения в газожидкостной смеси. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
6. Бурдуков А. П., Кузнецов В. В., Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е., Покусав Б. Г., Шрейбер И. Р. Ударная волна в газожидкостной среде. ПМТФ, 1973, № 3.
7. Кутателадзе С. С., Бурдуков А. П., Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусав Б. Г., Шрейбер И. Р. О структуре слабой ударной волны в газожидкостной среде. Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 2.
8. Noordzij L. Shock waves in bubble-liquid mixtures. Phys. Commun., 1971, vol. 3, No. 1.
9. Бетчелор Г. К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1968, № 3.
10. Кедринский В. К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа. ПМТФ, 1968, № 4.
11. Нигматуллин Р. И., Хабеев Н. С., Шагапов В. Ш. Об ударных волнах в жидкости с пузырьками газа. Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 4.
12. Гельфанд Б. Е., Губин С. А., Когарко Б. С., Когарко С. М. Исследование волн сжатия в смеси жидкости с пузырьками газа. Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 5.
13. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
14. Devin Ch. Survey of thermal radiation and viscous damping of pulsating air bubbles in water. J. Acoust. Soc. Amer., 1959, vol. 31, No. 12.
15. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. В сб. «Вопросы теории плазмы», т. 4. М., Атомиздат, 1964.
16. Гуревич А. В., Питаевский Л. П. Распад начального разрыва в уравнении Кортевега — де Вриза. Письма в ЖЭТФ, 1973, т. 17, вып. 5.
17. Гуревич А. В., Питаевский Л. П. Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны. ЖЭТФ, 1973, т. 65, вып. 2.