Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 3

ДВОЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ОБОЛОЧКИ

УДК 539.3

Л. Г. Головина, Л. И. Шкутин

**Вычислительный центр СО РАН,
660036 Красноярск**

Для моделирования конечных деформаций оболочки применена двойная аппроксимация поля перемещений в поперечном направлении. Одна из них (линейная) использована для вычисления тангенциальных производных поля, другая (квадратичная) — для нормальной производной. В результате градиент поля аппроксимирован линейной функцией поперечной координаты, а тензор Грина конечных деформаций — квадратичной. Двумерная модель деформации оболочки, согласованная с двойной аппроксимацией, содержит в качестве внутренних кинематических переменных три искомых вектора. Но только два из них (коэффициенты линейной аппроксимации) являются параметрами кинематических граничных условий. Они дают шесть скалярных степеней свободы поперечному волокну оболочки. Построенная модель определяет все компоненты объемного тензора конечных деформаций и может быть рекомендована для численного анализа деформационных проблем оболочек, неоднородных и слоистых по толщине.

Теория оболочек, базирующаяся на линейной аппроксимации поля перемещений по нормальной координате, противоречива. Она вносит неустранимую погрешность в физические (определяющие) уравнения материала оболочки, величина которой зависит от степени анизотропии и неоднородности материала. В [1, 2] сделана попытка уменьшить погрешность с помощью дополнительного скалярного параметра, корректирующего линейную аппроксимацию поля перемещений. Концепция двойной аппроксимации, реализованная ниже, сформировалась под влиянием публикаций [3, 4]. Она корректирует и обобщает результаты [1, 2].

1. Деформация оболочки как тела Коши. Пусть оболочкообразное тело в своем начальном (ненапряженном) состоянии занимает область — объем G. Материал оболочки распределен вдоль базовой поверхности A. К ней привязана криволинейная система координат t_I с локальным базисом $\mathbf{a}_I$, в котором $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ — тангенциальные векторы, $\mathbf{a}_3$ — нормальный орт. Позиционный вектор $\mathbf{g}(t_I)$ произвольной точки оболочки задается равенством $\mathbf{g} = \mathbf{a} + t_3\mathbf{a}_3$, где $\mathbf{a}(t_i)$ — позиционный вектор точки базовой поверхности. Здесь и в дальнейшем прописные латинские индексы принимают значения 1, 2 и 3, строчные — 1 и 2; используется тензорное правило суммирования; ∂_I и ∇_I — операторы частного и ковариантного дифференцирования по координате t_I; возможная зависимость от времени явно не указывается.

Формула

$$\partial_I\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}_I = \mathbf{a}_I + t_3\mathbf{b}_I$$

вводит начальный базис координатной сетки в произвольной точке оболочки. По определению базиса справедливы равенства $\mathbf{a}_i \equiv \partial_i\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_3 \equiv 0$, $\mathbf{b}_i \equiv \partial_i\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_3 \equiv 0$, $\mathbf{b}_3 \equiv 0$.

Поверхность, ограничивающая оболочку, обычно состоит из двух внешних поверхностей A_n и кромочной поверхности A_3, которая ортогональна базовой вдоль ее граничного контура C. Поверхности A и A_n задаются равенствами $t_3 = 0$ и $t_3 = h_n$, так что $h_1 \leqslant t_3 \leqslant h_2$ (h_1 и h_2 — функции поверхностной точки или постоянные числа). Каждая поверхность A_N ориентируется нормальным ортом $\mathbf{e}_N$.

Дифференциалы объема и поверхностей определяются равенствами $dG \equiv J dt_3 dA$, $dA \equiv a dt_1 dt_2$, $dA_n \equiv j_n dA$, $dA_3 \equiv j_3 dt_3 dC$, в которых $aJ(\mathbf{g})$ — якобиан криволинейной системы относительно декартовой; $j_N(\mathbf{g} \in A_N)$ — метрические параметры поверхностей (j_n не зависит от t_3).

Деформация оболочки преобразует начальный позиционный вектор в мгновенный вектор $\mathbf{g}^+ = \mathbf{g} + \mathbf{w}$, где $\mathbf{w}(\mathbf{g})$ — вектор конечного перемещения произвольной материальной точки оболочки. Начальный базис $\mathbf{g}_I$ преобразуется в мгновенный базис

$$\mathbf{g}_I^+ \equiv \partial_I \mathbf{g}^+ = \mathbf{g}_I + \mathbf{w}_I, \quad \mathbf{w}_I \equiv \partial_I \mathbf{w}. \tag{1.1}$$

Векторы $\mathbf{w}_I(\mathbf{g})$ образуют тензор-градиент поля перемещений.

В процессе деформации оболочка подвержена внешним механическим воздействиям — поверхностным и объемным силовым полям. Объемное поле внешних сил задано вектором плотности $\mathbf{f}(\mathbf{g})$ на единицу начального объема. Поверхностное поле расчленяется на три поля, заданных на кромочной и внешних поверхностях векторами плотности $\mathbf{f}_N(\mathbf{g} \in A_N)$ на единицу начальной площади. Деформация оболочки как тела Коши порождает объемное поле внутренних напряжений, которое представим контравариантными векторами Пиолы $\mathbf{z}^I(\mathbf{g})$.

Баланс внешних и внутренних сил, действующих на оболочку, может быть выражен уравнением виртуальной работы («слабая» формулировка):

$$\int_A \int_{h_1}^{h_2} (\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{w} - \delta z) J dt_3 dA + \int_A \mathbf{f}_n \cdot \delta\mathbf{w}_{(n)} j_n dA + \int_C \int_{h_1}^{h_2} \mathbf{f}_3 \cdot \delta\mathbf{w} j_3 dt_3 dC = 0. \tag{1.2}$$

Здесь $\delta\mathbf{w}$ — вектор виртуального перемещения; $\delta\mathbf{w}_{(n)}$ — его значение на поверхности A_n; δz — плотность виртуальной энергии деформации на единицу начального объема, определяемая любым из равенств

$$\delta z = \mathbf{z}^I \cdot \delta\mathbf{w}_I = z^{IJ} \delta w_{IJ} = Z^{IJ} \delta W_{IJ}, \tag{1.3}$$

в которых Z^{IJ} и z^{IJ} — компоненты симметричного и несимметричного тензоров напряжений Пиолы:

$$Z^{IJ} \equiv \mathbf{z}^I \cdot \mathbf{g}_+^J, \quad z^{IJ} \equiv \mathbf{z}^I \cdot \mathbf{a}^J; \tag{1.4}$$

w_{IJ} и W_{IJ} — компоненты градиента и тензора деформаций Грина:

$$w_{IJ} \equiv \mathbf{w}_I \cdot \mathbf{a}_J, \quad W_{IJ} \equiv \mathbf{g}_I^+ \cdot \mathbf{g}_J^+ - \mathbf{g}_I \cdot \mathbf{g}_J. \tag{1.5}$$

Вариационное уравнение (1.2) должно быть дополнено определяющими уравнениями (ограничениями) материала. В частности, чисто механические упругие и упругопластические деформации многих материалов подчиняются инкрементальным определяющим зависимостям вида

$$\delta Z^{IJ} = E^{IJKL} \delta W_{KL}. \tag{1.6}$$

Их коэффициенты могут содержать информацию о предыстории нагружения тела.

Система уравнений (1.1)–(1.6) дает слабую формулировку проблемы конечной деформации оболочки как тела Коши.

2. Приближенная модель деформации оболочки. При построении приближенной модели конечной деформации оболочки используется двойная аппроксимация поля перемещений:

$$\mathbf{w} \simeq \mathbf{w}^{(1)} \equiv \mathbf{u} + t_3\mathbf{v}; \tag{2.1}$$

$$\mathbf{w} \simeq \mathbf{w}^{(2)} \equiv \mathbf{u} + t_3\mathbf{u}_3 + (1/2)(t_3)^2\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{u}_3 \equiv \mathbf{v}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{a})$, $\mathbf{v}(\mathbf{a})$ и $\mathbf{v}_3(\mathbf{a})$ — искомые кинематические векторы, определенные на базовой поверхности оболочки. Аппроксимация (2.1) соответствует гипотезе прямых нормалей и применяется при вычислении виртуального перемещения

$$\delta\mathbf{w} \simeq \delta\mathbf{w}^{(1)} = \delta\mathbf{u} + t_3\delta\mathbf{v} \tag{2.3}$$

и производных векторов

$$\mathbf{w}_i \simeq \partial_i\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{u}_i + t_3\mathbf{v}_i, \quad \mathbf{u}_i \equiv \partial_i\mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_i \equiv \partial_i\mathbf{v}. \tag{2.4}$$

Аппроксимация (2.2) допускает искривление поперечных волокон и используется при вычислении вектора

$$\mathbf{w}_3 \simeq \partial_3\mathbf{w}^{(2)} = \mathbf{u}_3 + t_3\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{u}_3 \equiv \mathbf{v}. \tag{2.5}$$

Подстановка аппроксимаций (2.3)–(2.5) в уравнение виртуальной работы (1.2) приводит к его формулировке в двумерном пространстве базовой поверхности:

$$\int\limits_A (\mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{u} + \mathbf{q}\cdot\delta\mathbf{v} - \delta Z)dA + \int\limits_C (\mathbf{p}_3\cdot\delta\mathbf{u} + \mathbf{q}_3\cdot\delta\mathbf{v})dC = 0. \tag{2.6}$$

Здесь введены обобщенные векторы внешних сил

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{f}_n j_n + \int\limits_{h_1}^{h_2} \mathbf{f}J dt_3, \quad \mathbf{p}_3 \equiv \int\limits_{h_1}^{h_2} \mathbf{f}_3 j_3 dt_3, \quad \mathbf{q} \equiv \mathbf{f}_n j_n h_n + \int\limits_{h_1}^{h_2} \mathbf{f}J t_3 dt_3, \quad \mathbf{q}_3 \equiv \int\limits_{h_1}^{h_2} \mathbf{f}_3 j_3 t_3 dt_3 \tag{2.7}$$

и поверхностная плотность виртуальной энергии деформации

$$\delta Z \equiv \int\limits_{h_1}^{h_2} \delta z J dt_3. \tag{2.8}$$

Применение первого из равенств (1.3) приводит к формуле

$$\delta Z = \mathbf{x}^I\cdot\delta\mathbf{u}_I + \mathbf{y}^I\cdot\delta\mathbf{v}_I, \tag{2.9}$$

в которой векторы

$$\mathbf{x}^I \equiv \int\limits_{h_1}^{h_2} \mathbf{z}^I J dt_3, \quad \mathbf{y}^I \equiv \int\limits_{h_1}^{h_2} \mathbf{z}^I J t_3 dt_3 \tag{2.10}$$

имеют смысл обобщенных внутренних сил — усилий и моментов.

В результате подстановки (2.9) в (2.6) и интегрирования по частям с использованием равенств (2.4) получаем уравнение

$$\int_C [(\mathbf{p}_3 - e_{3i}\mathbf{x}^i) \cdot \delta\mathbf{u} + (\mathbf{q}_3 - e_{3i}\mathbf{y}^i) \cdot \delta\mathbf{v}]\, dC +$$

$$+ \int_A [(\mathbf{p} + \nabla_i \mathbf{x}^i) \cdot \delta\mathbf{u} + (\mathbf{q} - \mathbf{x}^3 + \nabla_i \mathbf{y}^i) \cdot \delta\mathbf{v} - \mathbf{y}^3 \cdot \delta\mathbf{v}_3]\, dA = 0. \tag{2.11}$$

Так как вариации $\delta\mathbf{u}$, $\delta\mathbf{v}$, $\delta\mathbf{v}_3$ независимы, из (2.11) следуют локальные уравнения равновесия

$$\nabla_i \mathbf{x}^i + \mathbf{p} = 0, \quad \nabla_i \mathbf{y}^i - \mathbf{x}^3 + \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{y}^3 = 0, \tag{2.12}$$

определенные на базовой поверхности, и силовые граничные условия

$$e_{3i}\mathbf{x}^i = \mathbf{p}_3, \quad e_{3i}\mathbf{y}^i = \mathbf{q}_3 \tag{2.13}$$

на участке контура, где заданы силы. На закрепленном участке должны быть заданы кинематические векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Систему статических уравнений (2.12) необходимо дополнить определяющими зависимостями, например, вида (1.6). Тогда равенства (2.10) будут иметь смысл определяющих уравнений для обобщенных внутренних сил. Тензор объемных деформаций предварительно должен быть выражен через искомые кинематические параметры базовой поверхности. С этой целью из (1.1), (2.4) и (2.5) определяются векторы

$$\mathbf{g}_I^+ = \mathbf{a}_I^+ + t_3 \mathbf{b}_I^+, \qquad \mathbf{a}_I^+ \equiv \mathbf{a}_I + \mathbf{u}_I, \qquad \mathbf{b}_I^+ \equiv \mathbf{b}_I + \mathbf{v}_I \tag{2.14}$$

и затем из (1.5)

$$W_{IJ} = U_{IJ} + t_3 V_{IJ} + (t_3)^2 V_{IJ}^{(2)}, \quad 2U_{IJ} \equiv \mathbf{a}_I^+ \cdot \mathbf{a}_J^+ - \mathbf{a}_I \cdot \mathbf{a}_J,$$
$$2V_{IJ} \equiv \mathbf{b}_I^+ \cdot \mathbf{a}_J^+ + \mathbf{b}_J^+ \cdot \mathbf{a}_I^+ - \mathbf{b}_I \cdot \mathbf{a}_J - \mathbf{b}_J \cdot \mathbf{a}_I, \quad 2V_{IJ}^{(2)} \equiv \mathbf{b}_I^+ \cdot \mathbf{b}_J^+ - \mathbf{b}_I \cdot \mathbf{b}_J. \tag{2.15}$$

Величины U_{IJ}, V_{IJ} и $V_{IJ}^{(2)}$ представляют собой двумерные параметры деформации оболочки, которые с помощью (2.14) могут быть выражены через поверхностные кинематические векторы u_I и v_I.

Скалярная формулировка полученных зависимостей осуществляется посредством разложения всех кинематических и силовых векторов по начальному базису:

$$\mathbf{u} = u_J \mathbf{a}^J, \quad \mathbf{v} = v_J \mathbf{a}^J, \quad \mathbf{u}_I = u_{IJ} \mathbf{a}^J, \quad \mathbf{v}_I = v_{IJ} \mathbf{a}^J, \quad \mathbf{x}^I = x^{IJ} \mathbf{a}_J,$$
$$\mathbf{p} = p^J \mathbf{a}_J, \quad \mathbf{p}_3 = p_3^J \mathbf{a}_J, \quad \mathbf{y}^I = y^{IJ} \mathbf{a}_J, \quad \mathbf{q} = q^J \mathbf{a}_J, \quad \mathbf{q}_3 = q_3^J \mathbf{a}_J. \tag{2.16}$$

В частности, виртуальное уравнение (2.6) примет вид

$$\int_C (p_3^J \delta u_J + q_3^J \delta v_J)\, dC + \int_A (p^J \delta u_J + q^J \delta v_J - x^{IJ} \delta u_{IJ} - y^{IJ} \delta v_{IJ})\, dA = 0 \tag{2.17}$$

с кинематическими переменными

$$u_{3J} \equiv v_J, \quad u_{iJ} \equiv \mathbf{a}_J \cdot \partial_i \mathbf{u}, \quad v_{iJ} \equiv \mathbf{a}_J \cdot \partial_i \mathbf{v} \tag{2.18}$$

и со статическими переменными x^{IJ}, y^{IJ} — несимметричными усилиями и моментами.

Следующие из (2.10) равенства

$$x^I_{\cdot J} = X^{IM} a^+_{MJ} + Y^{IM} b^+_{MJ}, \quad y^I_{\cdot J} = Y^{IM} a^+_{MJ} + Y^{IM}_{(2)} b^+_{MJ} \tag{2.19}$$

определяют их через симметричные усилия, моменты

$$X^{IJ} \equiv \int\limits_{h_1}^{h_2} Z^{IJ} J dt_3, \quad Y^{IJ} \equiv \int\limits_{h_1}^{h_2} Z^{IJ} J t_3 dt_3, \quad Y^{IJ}_{(2)} \equiv \int\limits_{h_1}^{h_2} Z^{IJ} J (t_3)^2 dt_3 \tag{2.20}$$

и кинематические параметры

$$a^+_{IJ} \equiv \mathbf{a}^+_I \cdot \mathbf{a}_J = a_{IJ} + u_{IJ}, \; a_{IJ} \equiv \mathbf{a}_I \cdot \mathbf{a}_J, \; b^+_{IJ} \equiv \mathbf{b}^+_I \cdot \mathbf{a}_J = b_{IJ} + v_{IJ}, \; b_{IJ} \equiv \mathbf{b}_I \cdot \mathbf{a}_J. \tag{2.21}$$

Равенства (2.19) вместе с (1.6), (2.15), (2.20) и (2.21) формулируют обобщенные определяющие зависимости для несимметричных усилий и моментов.

Система уравнений (2.7), (2.10), (2.12), (2.13) и (2.18) формулирует двумерную задачу деформации оболочки, согласованную с двойной аппроксимацией (2.1) и (2.2) поля перемещений. Слабое уравнение (2.6) с (2.9) или его скалярная формулировка (2.17) более предпочтительны для численного анализа, чем локальные статические уравнения (2.12) и (2.13).

В результате решения двумерной задачи определяются следующие кинематические и статические переменные: векторные поля перемещений u_J, v_J и v_{3J}, тензорные поля деформаций U_{IJ}, V_{IJ}, $V^{(2)}_{IJ}$ и обобщенных напряжений x^{IJ}, y^{IJ}. Конечная же цель проблемы деформации оболочки состоит в определении объемных полей перемещений, деформаций и напряжений. Поля перемещений и деформаций внутри оболочки вычисляются по формулам (2.2) и (2.15), компоненты векторов напряжений $\mathbf{z}^I$ — с помощью локальных определяющих зависимостей вида (1.6) или других. Вектор напряжений $\mathbf{z}^3$ и его компоненты находятся в результате интегрирования статического уравнения Коши

$$\partial_3(J\mathbf{z}^3) = -\partial_i(J\mathbf{z}^i) - J\mathbf{f} \tag{2.22}$$

с уже известными векторами $\mathbf{z}^i$. При интегрировании (2.22) используются силовые условия на одной из внешних поверхностей оболочки, условия на другой выполняются благодаря обобщенным уравнениям (2.12). У слоистых оболочек должны быть выполнены статические условия на межслойных поверхностях.

Модель конечной деформации оболочки с двойной аппроксимацией поля конечных перемещений содержит замкнутую формулировку двумерной краевой задачи и трехмерные зависимости для восстановления объемных полей перемещений, деформаций и напряжений. Последнее из обобщенных статических уравнений (2.12) отсутствует в традиционной формулировке, отвечающей линейной аппроксимации поля перемещений оболочки. Это уравнение с привлечением определяющих зависимостей позволяет исключить вектор перемещения $\mathbf{v}_3$ из числа неизвестных кинематических переменных. Только два вектора перемещения ($\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$) — кинематические параметры обобщенной модели, так как только они являются параметрами кинематических граничных условий. Их компоненты образуют шесть локальных степеней свободы деформируемой оболочки. Построенная обобщенная модель отличается от приведенных в [1, 2], поскольку она вводит дополнительный кинематический вектор $\mathbf{v}_3$ вместо скалярного параметра V_{33}, соответственно предложенная модель содержит дополнительное векторное уравнение $\mathbf{y}^3 = 0$ вместо скалярного равенства $Y^{33} = 0$. Наибольшего отличия сравниваемых моделей следует ожидать у оболочек, неоднородных по толщине и слоистых в особенности.

Авторы выражают благодарность Красноярскому региональному фонду науки за финансовую поддержку данной работы и посвящают ее памяти Геннадия Васильевича Иванова, заведовавшего лабораторией численных методов механики деформируемого твердого тела в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шкутин Л. И.** Нелинейная модель оболочки с депланацией поперечных сечений // Пространственные конструкции в Красноярском крае: Межвуз. сб. Красноярск: КИСИ, 1989. С. 125–131.
2. **Buchter N., Ramm E.** 3D-extension of nonlinear shell equations based on the enhanced assumed strain concept // Modeling of Shells with Nonlinear Behaviour: Extended Abstracts of Evrop. Mech. Colloquium 292. Munich: TU, 1992. Lecture 10.
3. **Иванов Г. В.** Решение плоской смешанной задачи теории упругости в виде рядов по полиномам Лежандра // ПМТФ. 1976. № 6. С. 126–137.
4. **Иванов Г. В.** Решение в виде рядов по полиномам Лежандра осесимметричной смешанной задачи для полого упругого цилиндра // ПМТФ. 1977. № 3. С. 150–156.

Поступила в редакцию 24/III 1995 г.