

УДК 534.113

DOI: 10.15372/PMTF202315269

## ОБ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ В ПОЛЕ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ

М. А. Ильгамов

Институт машиноведения РАН, Москва, Россия

Институт механики и машиностроения Федерального исследовательского центра

“Казанский научный центр РАН”, Казань, Россия

Институт механики Уфимского федерального исследовательского центра РАН,

Уфа, Россия

E-mail: ilgamov@anrb.ru

Построена линейная теория статического цилиндрического изгиба тонкой пластины без использования гипотез Кирхгоффа. Учитываются поперечный сдвиг, обжатие по толщине и возникающая при этом продольная сила. С учетом изменения площадей обеих поверхностей при изгибе определяется поперечная распределенная сила. Предполагается, что среднее давление на пластину на несколько порядков больше, чем перепад давлений. Рассматривается изгиб в условиях плоских деформированного и напряженного состояний.

**Ключевые слова:** упругая пластина, давление, статический изгиб, гипотезы Кирхгоффа

**Введение.** В природе и технике имеются тонкостенные объекты типа балки, пластины, пленки, панели, оболочки, которые находятся в среде с высоким давлением. Среднее давление на их стенки может быть на несколько порядков больше перепада давлений, при котором происходит изгиб. Например, на нижнюю и верхнюю поверхности пластины толщиной  $h$ , находящейся в горизонтальном положении на глубине  $H$  водной среды, действуют давление обжатия  $\gamma H$  ( $\gamma$  — удельный вес воды) и перепад  $\gamma h$  (архимедова сила). Величина  $H$  может на несколько порядков превышать  $h$ . Возникает вопрос о возможности применения теории изгиба тонких пластин, построенной на основе гипотез Кирхгоффа, при высоких давлениях. Как известно, первая из этих гипотез состоит в том, что при изгибе поперечное сечение пластины остается плоским и перпендикулярным ее изогнутой срединной поверхности [1–4]. Это позволяет свести анализ трехмерной деформации тонкого тела к анализу двумерной деформации. В соответствии с законом Гука из этой гипотезы следует равенство нулю деформации поперечного сдвига и соответствующей перерезывающей силы, что противоречит уравнениям равновесия. Вторая гипотеза состоит в том, что нормальные напряжения между слоями, параллельными срединной поверхностью, пренебрежимо малы по сравнению с напряжениями вдоль поверхности пластины.

Анализу точности теорий, основанных на данных гипотезах, посвящено большое количество работ, в частности [5–7]. Уточнение этих теорий необходимо для нетонких пластин и оболочек, особенно из анизотропных и композитных материалов [8]. Например, при построении теории изгиба плит средней толщины последовательно сохраняются величины

---

Работа выполнена в рамках государственного задания РАН.



Рис. 1. Цилиндрический изгиб пластины с изолированными кромками:  
 а — шарнирное закрепление, б — жесткая заделка

порядка  $(h/L)^2$  ( $L$  — длина) [7]. При этом учитываются деформации поперечного сдвига и обжатия по толщине. Погрешность такой теории незначительна при  $h/L < 1/3$ . В целом линейная теория изгиба пластины из изотропных материалов, основанная на гипотезах Кирхгоффа, имеет точность  $h/L$  и применима при  $h/L \leq 10^{-1}$ .

В данной работе изучается влияние на изгиб тонкой пластины высокого давления, действующего на ее поверхности. Устойчивость колонны, балки, находящихся под действием всестороннего давления, изучена в [9] с помощью уравнений, основанных на указанных гипотезах, а в [10, 11] на основе соотношений трехмерной теории упругости без использования этих упрощений. Заметим, что в работах [12–14] рассмотрен изгиб пластины с учетом взаимовлияния среднего давления  $p_m = p_0 + (p_1 + p_2)/2$  и разности площадей поверхностей, возникающей при изгибе под действием перепада давлений  $p_e = p_1 - p_2$  ( $p_1, p_2$  — избыточные давления на поверхностях пластины;  $p_0$  — давление сборки).

С использованием уравнений равновесия пластины

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad \frac{dQ}{dx} + N \frac{d^2w}{dx^2} = -q, \quad q = p_e + p_m h \frac{d^2w}{dx^2}, \quad (1)$$

где  $N, Q$  — продольная и поперечная силы;  $M$  — изгибающий момент;  $w$  — функция прогиба;  $q$  — поперечная распределенная сила, установлено, что влияние высокого давления на изгиб шарнирно закрепленной тонкой пластины с изолированными кромками (рис. 1, а) проявляется в изменении изгибной жесткости  $D(1 + \alpha)$ , где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad \alpha \approx \frac{p_m}{E} \left( \frac{L}{h} \right)^2. \quad (2)$$

В случае стальной пластины с модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, отношением  $L/h = 10^2$  при действии среднего давления  $p_m = 4$  МПа по формуле (2) получаем безразмерный параметр  $\alpha = 0,2$ . Таким образом, при подобных реальных данных среднее давление оказывает существенное влияние на изгиб пластины. Это объясняется тем, что при постоянной длине  $L$  жесткость  $D$  и сила  $p_m h$  уменьшаются с уменьшением толщины пропорционально  $h^3$  и  $h^1$ . Если такое же давление действует на края пластины, свободно перемещающиеся в опорах в продольном направлении, то  $N = -p_m h$  и влияние  $p_m$  на изгиб исчезает. Эти результаты получены с использованием системы уравнений (1) и гипотез Кирхгоффа. Выясним, насколько изменится результат, если не использовать эти гипотезы.

### 1. Учет поперечного сдвига, обжатия и растяжения-сжатия поверхностей.

Тонкая пластина из изотропного материала закреплена на концах  $x = 0, L$  и находится под действием равномерных избыточных давлений  $p_1$  и  $p_2$  (рис. 1). Полагаем, что среднее давление  $p_m$  на несколько порядков превышает перепад давлений  $p_e = p_1 - p_2$ , опоры препятствуют передаче усилий на пластину ( $0 \leq x \leq L$ ) при воздействии давлений на ее кромки. Рассмотрим случай статического линейного цилиндрического изгиба. Давление  $p_e$  и прогиб  $w(x)$  являются положительными (в направлении вверх) величинами.

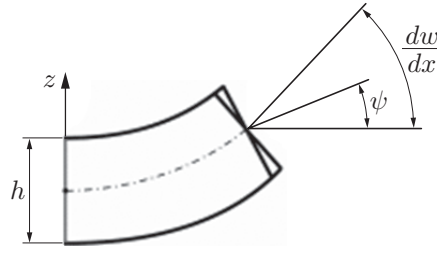


Рис. 2. Углы поворота поперечного сечения пластины при изгибе

Закон Гука имеет вид [1–4]

$$\begin{aligned} E\varepsilon_x &= \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z), & E\varepsilon_y &= \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x), \\ E\varepsilon_z &= \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y), & G\gamma_{xz} &= \tau_{xz}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

уравнения связей деформаций  $\varepsilon_x^0$ ,  $\varepsilon_x$  с перемещениями  $u^0(x)$ ,  $u(x, z)$ ,  $w(x)$  можно записать следующим образом:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x}, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (1.2)$$

Здесь  $\varepsilon_x^0$ ,  $u^0$  — деформации и перемещения срединной поверхности. В силу условий закрепления на кромках ( $x = 0, L$ )  $u^0 = 0$ , а в пластине ( $0 \leq x \leq L$ )  $u^0 = 0$ ,  $\varepsilon_x^0 = 0$ .

Используя определения [1–4]

$$N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad Q = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad (1.3)$$

с учетом (1.1)–(1.3) имеем

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz = \frac{Q}{G}. \quad (1.4)$$

Рассмотрим случай плоского деформированного состояния ( $\varepsilon_y = 0$ ) и обжатия по толщине пластины средним давлением ( $\sigma_z = -p_m$ ). Из (1.1) получаем

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x - p_m), \quad \sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_x - \frac{\nu}{1 - \nu} p_m. \quad (1.5)$$

Предполагается, что деформации пластин являются малыми, поэтому в выражениях (1.3), (1.4) изменение толщины за счет деформации  $\varepsilon_z$  не учитывается.

Будем полагать, что продольное перемещение  $u(x, z)$  изменяется по толщине линейно от значения  $u(x, -h/2)$  до значения  $u(x, h/2)$ , но соответствующее поперечное сечение пластины может быть неперпендикулярным изогнутой срединной поверхности (рис. 2). Такое допущение лежит в основе модели Тимошенко в теории изгиба балки и в модели Рейсснера в теории оболочек. Обозначив соответствующий угол наклона через  $\psi(x)$ , запишем

$$u(x, z) = -z\psi(x). \quad (1.6)$$

Поскольку при относительно малой деформации сдвига деформации растяжения-сжатия слоев, параллельных срединной поверхности, малы, угол  $\psi < \partial w / \partial x$ . Так как величины  $p_m$  и  $\psi$  не зависят от координаты  $z$ , из (1.2), (1.3), (1.5), (1.6) получаем

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \sigma_x = -\frac{Ez \partial \psi}{(1 - \nu^2) \partial x} - \frac{\nu p_m}{1 - \nu}, \quad N = -\frac{\nu p_m h}{1 - \nu}. \quad (1.7)$$

Таким образом, в результате обжатия по толщине  $h$  давлением  $p_m$  появляется продольная сжимающая сила, которая тем больше, чем больше коэффициент Пуассона. Этот результат получен без использования второй гипотезы Кирхгоффа.

Подставляя (1.6) в (1.4) и дифференцируя по  $x$ , имеем

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{1}{Gh} \frac{dQ}{dx}. \quad (1.8)$$

Исключив из (1.8)  $dQ/dx$  с использованием уравнения равновесия (1) и величины  $N$  из (1.7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} &= (1 - \chi\eta) \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{q}{Gh}, & \chi &= \frac{\nu}{1 - \nu}, & \eta &= \frac{p_m}{G}, \\ \varepsilon_x &= -(1 - \chi\eta) \frac{d^2w}{dx^2} z - \frac{qz}{Gh}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

При  $p_m \ll G$ ,  $q \ll G$  из (1.9) находим классическое выражение для продольной деформации при изгибе. В этом случае отсутствует влияние обжатия по толщине, а также внешней поперечной силы  $q$  на деформацию.

Из (1), (1.3), (1.7), (1.9) следует

$$M = -D \left[ (1 - \chi\eta) \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{q}{Gh} \right]; \quad (1.10)$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} - \chi p_m h \frac{d^2w}{dx^2} + q = 0. \quad (1.11)$$

Поперечную распределенную силу  $q$  определяем с учетом изменения площадей поверхностей пластины при изгибе [12–14]:

$$q = p_1[1 + \varepsilon_x(-h/2)] - p_2[1 + \varepsilon_x(h/2)]. \quad (1.12)$$

В соответствии с (1.9), (1.12) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x \left( \mp \frac{h}{2} \right) &= \pm (1 - \chi\eta) \frac{h}{2} \frac{d^2w}{dx^2} \pm \frac{q}{2G}, \\ (1 - \eta)q &= p_e + p_m h (1 - \chi\eta) \frac{d^2w}{dx^2}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Подставляя значение  $q$  из (1.13) в (1.10), (1.11), получаем выражение для изгибающего момента и уравнение равновесия в виде

$$\begin{aligned} M &= -\frac{D}{1 - \chi\eta} \left( (1 - \chi\eta) \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{p_e}{Gh} \right), \\ (1 - \chi\eta) D \frac{d^4w}{dx^4} - p_m h (1 - \chi) \frac{d^2w}{dx^2} &= p_e. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь параметр  $p_m h$  характеризует влияние на изгиб разности деформаций поверхностей пластины;  $p_m h \chi$  — обжатие по толщине;  $\eta$  — отношение среднего давления к поперечному сдвигу;  $\chi\eta$  — величина, учитывающая среднее давление, поперечный сдвиг и обжатие. Оценим значения этих параметров в уравнениях (1.14), принимая максимальное значение среднего давления равным  $p_m = 100$  МПа. Тогда для стальной пластины ( $G = 7 \cdot 10^4$  МПа) отношение  $\eta = p_m/G$  имеет порядок  $10^{-3}$ . Так как  $\chi < 1$ , то уравнения (1.14) принимают вид

$$M = -D \left( \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{p_e}{Gh} \right), \quad D \frac{d^4w}{dx^4} - p_m h (1 - \chi) \frac{d^2w}{dx^2} = p_e, \quad (1.15)$$

где модуль сдвига содержится только в выражении для  $M$ . В случае материалов типа оргстекла ( $G = 10^3$  МПа), термопластов, полиэтилена, капрона ( $G = 100 \div 400$  МПа) все члены в (1.14) нужно сохранить.

Если среднее давление  $p_m$  не учитывается, то уравнение изгиба принимает классический вид, а влияние поперечного сдвига на изгиб учитывается только в выражении для изгибающего момента (1.15) (так же, как в модели Тимошенко в статическом случае [3]). Значения  $K$ ,  $D$ ,  $\chi$  меняются в зависимости от условий закрепления в продольном направлении и вида напряженно-деформированного состояния пластины. В случае плоского напряженного состояния  $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_z = -p_m$  из уравнений (1.3), (1.7), (1.9) получаем

$$\chi = \nu, \quad K = Eh, \quad D = Eh^3/12. \quad (1.16)$$

При этом предполагается, что пластина свободно перемещается вдоль кромок  $x = 0, L$ . Если принять  $\sigma_y = -p_m$ ,  $\sigma_z = -p_m$ , то согласно (1.1)  $\sigma_x = E(\varepsilon_x^0 + \varepsilon_x) - 2\nu p_m$ ,  $\chi = 2\nu$ .

**2. Влияние сдвига, обжатия и деформации поверхностей.** Решение уравнения (1.14) имеет вид

$$w = a \operatorname{sh} \lambda x + b \operatorname{ch} \lambda x + cx + d - (P/(2\lambda^2))x^2, \quad (2.1)$$

$$\lambda^2 = \frac{p_m h(1 - \chi)}{D(1 - \chi\eta)}, \quad P = \frac{p_e}{D(1 - \chi\eta)}.$$

В случае продольного перемещения в опорах сжимающая сила  $N$  определяется по формуле (1.7). В случае шарнирного закрепления в соответствии с (1.14) граничные условия имеют вид

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{p_e}{Gh(1 - \chi\eta)}, \quad x = 0, L. \quad (2.2)$$

Определив  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  с использованием (2.2), получаем выражение для прогиба

$$w = \frac{P(1 - \mu)}{\lambda^4} \left( \frac{\operatorname{sh} \lambda(L - x) + \operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda L} - 1 \right) + \frac{PLx}{2\lambda^2} \left( 1 - \frac{x}{L} \right), \quad \mu = \frac{D\lambda^2}{Gh}. \quad (2.3)$$

Амплитуда прогиба ( $x = L/2$ ) равна

$$W = \frac{P}{\lambda^4} \left( (1 - \mu) \frac{1 - \operatorname{ch}(\lambda L/2)}{\operatorname{ch}(\lambda L/2)} + \frac{\lambda^2 L^2}{8} \right). \quad (2.4)$$

Из (1.10), (2.1), (2.3), (2.4) следует, что параметры  $P$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  учитывают влияние рассматриваемых факторов на прогиб пластины. Если обжатие не учитывается, то  $\chi = 0$ . Тогда параметры  $P$ ,  $\lambda$  упрощаются. При малом значении среднего давления  $p_m$ , учитывая  $\eta \ll 1$ ,  $\lambda L/2 = \xi \ll 1$  и принимая  $\operatorname{ch} \xi = 1 + \xi^2/2 + \xi^4/24$ , из (2.4) получаем

$$W = \frac{5p_e L^4(1 - \nu^2)}{32Eh^3} \left( 1 + \frac{8h^2}{5(1 - \nu)L^2} \right), \quad (2.5)$$

где  $E = 2G(1 + \nu)$ . Второй член в скобках представляет собой поправку в модели Тимошенко, найденную в [3]. Эта поправка пропорциональна  $(h/L)^2$ . Поправка такого же порядка получается при рассмотрении изгиба в трехмерной теории упругости [7].

Из рассматриваемой модели изгиба пластины в поле высоких давлений исключим второй член в (2.5), характеризующий поперечный сдвиг. Так как этот член получен из второго условия (2.2), то при  $L/h > 10$  это условие можно представить в виде  $d^2 w/dx^2 = 0$  ( $x = 0, L$ ). Тогда можно получить более простое решение уравнения (1.14), в котором сохраняется влияние на изгиб поперечного сдвига, зависящего от среднего давления (член

с параметром  $\chi\eta$ ). Запишем решение в виде функции  $w = W \sin(\pi x/L)$ , удовлетворяющей граничным условиям. Подставляя эту функцию в уравнение (1.14), умножая на нее и интегрируя результат по  $x$  от 0 до  $L$ , получаем амплитуду прогиба ( $x = L/2$ )

$$W = \frac{W_*}{1 + \alpha}, \quad W_* = \frac{4p_e L^4}{\pi^5 D}, \quad \alpha = \frac{p_m h L^2 (1 - \chi)}{\pi^2 D} - \frac{p_m \chi}{G}. \quad (2.6)$$

Здесь  $W_*$  — известное значение амплитуды прогиба [1–3] при  $p_m = 0$ ;  $\alpha$  — параметр среднего давления, в котором в отличие от (2) содержится величина  $\chi$ . В выражении для  $\alpha$  последний член характеризует влияние на изгиб поперечного сдвига под действием среднего давления. Этот сдвиг вызывает увеличение прогиба, так же как и “классический” поперечный сдвиг, который учитывается в последних членах в выражении для изгибающего момента (1.14) и в решении (2.5). С учетом связи  $E = 2G(1 + \nu)$  выражение для параметра  $\alpha$  можно представить в виде

$$\alpha = \frac{p_m}{G} \left[ \frac{6(1 - \nu)(1 - \chi)}{\pi^2} \left( \frac{L}{h} \right)^2 - \chi \right]. \quad (2.7)$$

Поскольку  $\chi \leq 1$  и выше было принято  $L/h \geq 10$ , второй член в (2.7) можно опустить. Это означает, что поперечный сдвиг, обусловленный обжатием по толщине под действием среднего давления, также является несущественным. Тогда, полагая  $12\pi^{-2}(1 - \nu^2) \approx 1$ , выражение (2.7) можно представить в виде

$$\alpha \approx \frac{p_m}{E} \left( \frac{L}{h} \right)^2 (1 - \chi), \quad \chi = \frac{\nu}{1 - \nu}. \quad (2.8)$$

**3. Изгиб пластины в водной среде.** Рассмотрим изгиб тонкой пластины в условиях плоского напряженного состояния под действием собственного веса в зависимости от глубины  $H$  погружения в воду. Тогда  $p_e = -(\gamma_0 - \gamma)h$ ,  $p_m = p_0 + \gamma H$ , где  $\gamma_0$ ,  $\gamma$  — удельный вес пластины и воды соответственно;  $p_0 = 0,1$  МПа — атмосферное давление. Поскольку архимедова сила  $\gamma h$  не зависит от глубины, давление  $p_e$  при всех значениях глубины остается постоянным, возрастает только среднее давление  $p_m$ .

В (2.7), (2.8) полагаем  $\chi = 2\nu$ ,  $E = 7 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu = 0,3$ ,  $\gamma_0 = 2,7 \cdot 10^{-4}$  МПа,  $L = 1,5$  м,  $h = 0,007$  м. С учетом  $\gamma = g\rho$  ( $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup> — плотность воды;  $g = 10$  м/с<sup>2</sup> — ускорение свободного падения) имеем  $\gamma h = 70$  кг/(м·с<sup>2</sup>) =  $7 \cdot 10^{-5}$  МПа, поэтому  $p_e = -11,9 \times 10^{-5}$  МПа. В соответствии с (2.6) имеем  $W_* \approx 3,9 \cdot 10^{-3}$  м. Среднее давление равно  $p_m = 0,1 + 10^{-2}H$  ( $H$  — глубина водной среды, м). Согласно (2.8)  $\alpha = 0,65(0,1 + 10^{-2}H)(1 - \chi)$ . Запишем (2.6) в виде

$$\frac{W}{W_*} = \frac{1}{1 + 0,65(0,1 + 10^{-2}H)(1 - \chi)}. \quad (3.1)$$

На рис. 3 представлена зависимость (3.1).

В теории изгиба, основанной на гипотезах Кирхгоффа, не учитывается обжатие, поэтому прогиб не зависит от среднего давления (линия 1 на рис. 3). В рассматриваемом случае  $L/h = 214$ , поэтому поперечным сдвигом можно пренебречь.

Учет только обжатия средним давлением (без учета разности деформаций поверхностей) и соответственно сохранение в выражении  $1 - \chi$  в (3.1) только члена  $-\chi = -2\nu = -0,6$  приводит к увеличению изгиба с увеличением глубины  $H$  (кривая 2 на рис. 3). При  $H = 156$  м, что соответствует значению среднего давления  $p_m = \pi^2 D / (hL^2)$  в (2.6), (2.7), прогиб  $W/W_*$  неограниченно возрастает. Возрастание зависимости (3.1) с увеличением  $p_m$  и  $H$  объясняется тем, что при принятых условиях  $u^0 = 0$  ( $x = 0, L$ ) обжатие по толщине приводит к появлению продольной сжимающей силы. При условии свободного продольного перемещения в опорах ( $N = 0$ ) продольная сжимающая сила не возникает. В этом случае

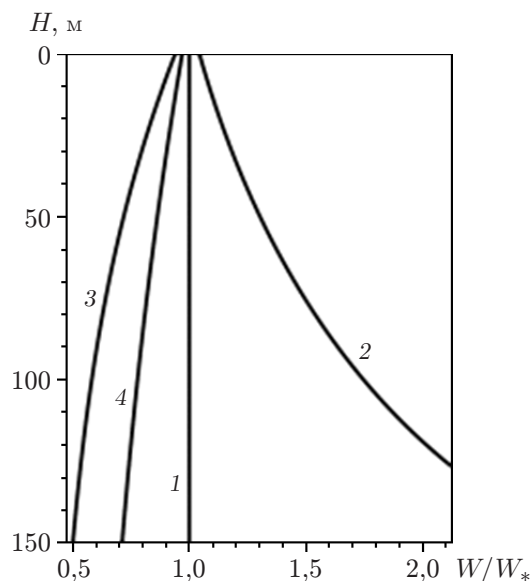


Рис. 3. Зависимость безразмерной амплитуды прогиба пластины от глубины  $H$  погружения в воду:

1 — без учета обжатия, 2 — без учета деформации растяжения-сжатия и с учетом обжатия, 3 — с учетом деформации растяжения-сжатия и учета обжатия, 4 — с учетом деформации растяжения-сжатия и обжатия пластины

кривая 2 совпадает с вертикальной линией 1. Таким образом, учет только обжатия без учета деформации растяжения-сжатия поверхностей пластины и без уточнения условий продольных перемещений в опорах является недостаточным.

Решение с учетом деформации растяжения-сжатия поверхностей и без учета обжатия (в выражении  $1 - \chi$  в (3.1) сохраняется только первый член) показано кривой 3 на рис. 3. В [12–14] поперечная распределенная сила  $q$  (1.13) уточняется в рамках гипотез Кирхгофа. Из проведенного анализа следует, что подход, используемый в работах [12–14], является недостаточным и необходимо одновременно учитывать обжатие. Кривая 4 построена для случая, когда в (3.1) сохраняются все члены. В этом случае учтены и деформации растяжения-сжатия, и обжатие пластины.

**Закключение.** Для задачи о статическом цилиндрическом изгибе пластины в поле высоких давлений проанализировано влияние поперечного сдвига, обжатия и разности деформаций растяжения-сжатия поверхностей на изгиб пластины.

При изгибе пластины в поле высоких давлений помимо известной деформации поперечного сдвига возникает деформация сдвига, обусловленная влиянием среднего давления. Влияние указанных деформаций может быть существенным в случае больших давлений на обе поверхности пластины из материалов с малым модулем сдвига. Оба вида сдвига приводят к увеличению прогиба по сравнению со случаем, когда они не учитываются. Заметим, что в первом случае поправка вводится не в уравнение равновесия, а в граничные условия для изгибающего момента.

Обжатие по толщине приводит к появлению продольной сжимающей силы. Таким образом, влияние обжатия на изгиб определяется этой силой, значение которой зависит от граничных условий для продольного перемещения. Наиболее существенное влияние обжатия по толщине проявляется в случае абсолютно жестких опор в продольном направлении, наименьшее (нулевое) — при свободном перемещении (в данной работе рассмотрены только эти предельные случаи). Кроме того, влияние обжатия тем больше, чем больше

коэффициент Пуассона материала. Обжатие пластины приводит к более существенному увеличению прогиба по сравнению с прогибом в классическом решении.

С уменьшением толщины пластины при неизменных других параметрах изгибная жесткость уменьшается пропорционально  $h^3$ , поперечный сдвиг —  $h^2$ , обжатие по толщине и деформация растяжения-сжатия поверхностей —  $h^1$ .

Приведенные выше оценки соответствуют случаю, когда имеются давление на обе поверхности пластины и условия продольной жесткости опор. Если опоры допускают свободное скольжение пластины, то при обжатии продольные сжимающие силы не возникают. При воздействии давления на одну поверхность его среднее значение не может быть больше перепада давления, при котором происходит изгиб (отсутствует поле высоких давлений). Если при этом отношение  $L/h > 10$ , то деформациями поперечного сдвига и обжатием по толщине пластины из изотропного материала можно пренебречь. Тогда справедливой является классическая теория изгиба, основанная на гипотезах Кирхгоффа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Ляв А.** Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
2. **Галеркин Б. Г.** Упругие тонкие плиты. Л.; М.: Госстройиздат, 1933.
3. **Тимошенко С. П.** Пластины и оболочки. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
4. **Shen H. Sh.** Postbuckling behavior of plates and shells. Shanghai: Shanghai Jiao Tong Univ., 2017.
5. **Новожилов В. В., Финкельштейн Р. М.** О погрешности гипотез Кирхгоффа в теории оболочек // Прикл. математика и механика. 1943. Т. 7, вып. 5. С. 45–51.
6. **Муштари Х. М.** Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгоффа — Лява // Прикл. математика и механика. 1947. Т. 11, вып. 5. С. 517–520.
7. **Муштари Х. М.** Теория изгиба плит средней толщины // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1959. № 2. С. 107–113.
8. **Васильев В. В.** Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988.
9. **Peterson J. P.** Axially loaded columns subjected to lateral pressure // AIAA J. 1963. V. 1, N 6. P. 1458–1459.
10. **Ишлинский А. Ю.** Исследование устойчивости упругих систем с точки зрения математической теории упругости // Укр. мат. журн. 1954. Т. 6, № 2. С. 140–146.
11. **Kerr A. D., Tang S.** The effect of lateral hydrostatic pressure on instability of elastic solids, particularly beams and plates // J. Appl. Mech. 1966. V. 33. P. 617–622.
12. **Ильгамов М. А.** Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // Докл. АН. 2017. Т. 476, № 4. С. 402–405. DOI: 10.7868/S086956521728009X.
13. **Ильгамов М. А.** Обобщение уравнения изгиба тонкой пластины под действием давления газа // Прикл. математика и механика. 2019. Т. 83, № 1. С. 134–146. DOI: 10.1134/S0032823519010041.
14. **Ильгамов М. А.** Влияние поверхностных эффектов на изгиб и колебания нанопленок // Физика твердого тела. 2019. Т. 61, вып. 10. С. 1825–1830. DOI: 10.21883/FTT.2019.10.48255.381.

*Поступила в редакцию 28/II 2023 г.,  
после доработки — 3/V 2023 г.  
Принята к публикации 26/VI 2023 г.*