

УДК 532.528

ВЛИЯНИЕ ПЛАВЛЕНИЯ НА МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ ПО СЖИМАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ С УЧЕТОМ ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

К. Дас, А. Саркар*

Колледж А. Б. Н. Сила, 736101 Куч-Бихар, Индия

* Колледж Рамнагара, 741502 Надия, Индия

E-mails: kd.kgec@gmail.com, amitfor.math@gmail.com

Исследовано влияние плавления на стационарное течение электропроводящей микрополярной жидкости в пограничном слое по горизонтально сжимаемой пластине при наличии точки торможения и теплопереноса, однородного поперечного магнитного поля и теплового излучения. С использованием преобразований подобия получены автомодельные обыкновенные дифференциальные уравнения, которые решены численно. Показано, что полученные результаты хорошо согласуются с известными данными. Приведены результаты численных расчетов скорости и температуры, поверхностного трения и скорости теплопереноса.

Ключевые слова: микрополярная жидкость, плавление, магнитогиродинамика, тепловое излучение, сжимаемая пластина.

DOI: 10.15372/PMTF20160412

Введение. Известно, что неньютоновские жидкости (некоторые смазки, краски, жидкие кристаллы, коллоидные растворы, суспензии, полимеры и т. д.) не описываются моделями ньютоновской жидкости. В работах [1, 2] предложена теория микрополярных жидкостей с учетом микровращений. В последнее время появилось большое количество работ, посвященных исследованию течений жидкости с учетом момента количества движения [3–11].

Задача о пограничном слое жидкости, находящейся на растягиваемой пластине, рассматривалась с использованием различных моделей неньютоновских жидкостей. В то же время остается недостаточно изученной задача о течении неньютоновской жидкости по сжимаемой пластине. В [12] впервые исследовано течение на сжимаемой пластине при наличии нестационарной точки торможения. С помощью преобразования подобия из уравнений Навье — Стокса получена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые затем решались численно. Рассматривалась как плоская, так и осесимметричная постановка. В [13] доказаны существование и единственность решения задачи о стационарном течении вязкой жидкости по сжимаемой пластине при некоторых значениях параметра отсоса. Течение жидкости по сжимаемой пластине рассматривалось также в [14–17]. В работе [18] исследовано нестационарное течение по сжимаемой пластине при наличии точки торможения и теплопереноса. Течения на сжимаемой пластине при наличии

точки торможения применяются при охлаждении металлических пластин, в производстве твердых упаковок, широко распространенных наряду с пленочными.

Проводящие электричество жидкости также имеют различные приложения, например в металлургии и металлообработке, при отделении расплавленного металла от немаetalлических включений в магнитном поле. Изменение фазового состояния жидкости имеет большое значение при литье, сварке, очистке металлов плавкой, а также при формировании ледяных слоев в океане или на поверхности летательного аппарата. В работе [19] исследован теплоперенос от плоской пластины при плавлении в случае стационарного ламинарного течения. В [20, 21] изучался процесс плавления на вертикальной плоской пластине, находящейся в пористой среде, в случае как естественной, так и вынужденной конвекции. В [22] рассматривалось влияние плавления на конвективный теплообмен между вертикальной пластиной и пропитанной жидкостью пористой средой. В [23] исследованы стационарное течение пограничного слоя и теплообмен между жидкостью и плавящейся движущейся поверхностью. В работе [24] изучено стационарное течение микрополярной жидкости в пограничном слое на горизонтальной пластине, растягиваемой (сжимаемой) по линейному закону, при наличии точки торможения.

Следует отметить, что в большинстве указанных выше работ влияние теплового излучения на поток и теплоперенос не учитывалось. Однако в тех случаях, когда технологические процессы происходят при высоких температурах, тепловым излучением нельзя пренебрегать. Особенно важно учитывать тепловое излучение при конструировании ядерных установок, газовых турбин, двигателей самолетов, спутников и космических кораблей. В работе [25] показано, что в оптически тонком пределе жидкость не поглощает собственное излучение, но поглощает излучение, приходящее извне. В [26] исследовано стационарное течение вязкой жидкости через пористую среду, ограниченную пористой пластиной, при постоянной скорости отсоса и при наличии теплового излучения. В [27] рассматривалась неустановившаяся задача о свободной конвекции в абсорбирующей излучающей жидкости на движущейся вертикальной проницаемой пластине с учетом теплового излучения. В [28] изучено смешанно-конвективное течение микрополярной жидкости через движущуюся с постоянной скоростью полубесконечную пористую пластину при различной скорости отсоса, направленной перпендикулярно пластине, при наличии теплового излучения и с учетом вязкой диссипации. Влияние теплового излучения на магнитогидродинамическое (МГД) течение на плоской пластине при наличии условия прилипания исследовано в [29]. В работе [30] рассмотрена двумерная задача о смешанной конвекции в пограничном слое МГД-жидкости (при наличии точки торможения), текущей через пористую среду, ограниченную вертикальной растягиваемой пластиной, с учетом теплового излучения. В [31] изучено влияние теплового излучения на вязкий МГД-поток и теплоперенос в случае нелинейно сжимаемой пористой пластины. Влияние вдува и отсоса на стационарный пограничный слой при наличии точки торможения и на теплоперенос к сжимаемой пластине с учетом теплового излучения исследовалось в работе [32].

Следует отметить, что влияние плавления на течение в пограничном слое неньютоновской жидкости на сжимаемой пластине при наличии магнитного поля и теплового излучения ранее не исследовалось. В настоящей работе изучается МГД-течение микрополярной жидкости на сжимаемой пластине при наличии точки торможения и с учетом теплового излучения. Задача решается численно с помощью программного комплекса Mathematica 7.0. Для учета теплового излучения была выбрана модель, предложенная в [25], поскольку она проста и при анализе оптически тонкой среды в ней используется линейная зависимость теплового излучения от температуры. В данной работе исследуется также влияние различных физических параметров на скорость и температуру, а также на локальный коэффициент трения и локальное число Нуссельта.

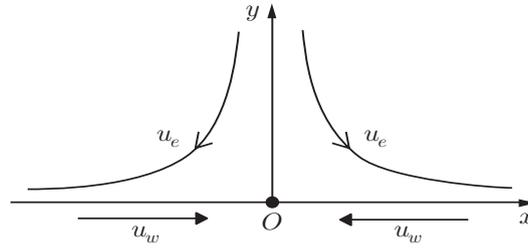


Рис. 1. Схема задачи

1. Математическая постановка задачи. Рассматривается стационарное двумерное течение в ламинарном пограничном слое при наличии точки торможения, а также теплоперенос в несжимаемой электропроводящей микрополярной жидкости, натекающей на горизонтальную сжимаемую по линейному закону пластину, которая расплавляется с постоянной скоростью (рис. 1). Внешнее однородное магнитное поле с индукцией B_0 направлено вдоль оси y . Магнитное число Рейнольдса потока достаточно мало, поэтому индуцированным магнитным полем можно пренебречь. Скорость внешнего потока определяется выражением $u_e(x) = ax$, а скорость сжимаемой пластины — выражением $u_w(x) = cx$ ($c < 0$ — константа; x — координата, изменяющаяся вдоль сжимаемой пластины). Температура плавящейся поверхности равна T_m . Жидкая фаза формируется на некотором расстоянии от пластины при постоянной температуре T_∞ , превышающей температуру T_m . Температура твердой фазы T_s на некотором расстоянии от поверхности постоянна, причем $T_s < T_m$. Вязкая диссипация, выделение тепла и абсорбция полагаются пренебрежимо малыми.

С учетом принятых выше предположений уравнения пограничного слоя имеют вид [19, 23, 24]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\mu + \varkappa}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\varkappa}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} (u - u_e),$$

$$\rho j \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \varkappa \left(2\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial q_r}{\partial y},$$

где u, v — компоненты скорости вдоль осей x, y соответственно; \varkappa — вихревая вязкость; φ — компонента завихренности, нормальная к плоскости xy ; γ — спиновая градиентная вязкость; σ — электрическая проводимость жидкости; j — плотность количества движения при микроротации; T — температура жидкости в пограничном слое; α — температуропроводность жидкости; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении p ; ρ — плотность жидкости; q_r — поток теплового излучения; μ — динамическая вязкость.

Граничные условия для уравнений (1), (2) записываются в виде [19, 22, 23]

$$\begin{aligned} y = 0: \quad u = u_w(x) = cx, \quad \varphi = -n \frac{\partial u}{\partial y}, \quad T = T_m, \\ y \rightarrow \infty: \quad u = u_e(x) = ax, \quad \varphi = 0, \quad T = T_\infty; \end{aligned} \quad (3)$$

$$k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = \rho [\lambda + c_s (T_m - T_s)] v(x, 0), \quad (4)$$

где k — теплопроводность; λ — скрытая теплота образования жидкости; c_s — теплоемкость материала пластины. Из уравнения (4) следует, что теплота, подводимая к плавящейся поверхности, представляет собой теплоту плавления и теплоту, необходимую для нагрева пластины до температуры ее плавления T_m [19]. Для исследования влияния различных условий на поверхности в граничных условиях (3) выбрана линейная зависимость между компонентой завихренности φ и поверхностным напряжением $\partial u / \partial y$. В (3) значения параметра микроротации n находятся в диапазоне от 0 до 1. При $n = 0$ $\varphi = 0$, что означает отсутствие вращения микроэлементов вблизи стенки [8]. При $n = 0,5$ антисимметричная часть тензора напряжений равна нулю. Это означает, что скорость вращения частиц равна скорости жидкости вблизи стенки [5]. Значение $n = 1$ может быть использовано при моделировании турбулентного потока внутри пограничных слоев микроротации [33].

Поток теплового излучения определяется с использованием приближения Росселанда:

$$q_r = - \frac{4\sigma^*}{3k^*} \frac{\partial T^4}{\partial y}.$$

Здесь σ^* — постоянная Стефана — Больцмана; k^* — средний коэффициент абсорбции. Полагая, что T^4 можно разложить в ряд Тейлора в окрестности T_∞ , и пренебрегая членами более высокого порядка, получаем

$$T^4 = 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4.$$

Тогда

$$\frac{\partial q_r}{\partial y} = - \frac{16T_\infty^3 \sigma^*}{3k^*} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Систему уравнений (1), (2) можно преобразовать в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, используя преобразования подобия [19, 23, 24]

$$\eta = y \sqrt{\frac{a}{\nu}}, \quad \varphi(x, y) = ax \sqrt{\frac{a}{\nu}} \omega(\eta), \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_m}{T_\infty - T_m}, \quad \psi(x, y) = \sqrt{a\nu} x f(\eta), \quad (5)$$

где η — переменная подобия; ν — кинематическая вязкость; $f(\eta)$ — безразмерная функция тока; $\omega(\eta)$ — безразмерная микроротация; $\theta(\eta)$ — безразмерная температура. Функция тока ψ определяется выражениями $u = \partial \psi / \partial y$ и $v = -\partial \psi / \partial x$, удовлетворяющими уравнению (1).

Подставляя (5) в уравнения (2), получаем автомодельные уравнения

$$\begin{aligned} (1 + R)f''' + ff'' + 1 - f'^2 + R\omega' - \text{Ha}^2(f' - 1) &= 0, \\ (1 + R/2)\omega'' - R(2\omega + f'') - f'\omega + f\omega' &= 0, \\ (1 + N)\theta'' + \text{Pr}(f\theta' - \theta f') &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $R = \kappa/\mu$ — параметр вихревой вязкости; $\text{Ha} = B_0 \sqrt{\sigma/(\rho a)}$ — число Гартмана (параметр магнитного поля); $N = 16T_\infty^3 \sigma^*/(3k^* \kappa)$ — параметр теплового излучения; $\text{Pr} = \nu/\alpha$ — число Прандтля.

Граничные условия (3), (4) принимают вид

$$\begin{aligned} f'(0) = \varepsilon, \quad \omega(0) = -nf''(0), \quad \theta(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \\ \omega(\infty) = 0, \quad \theta(\infty) = 1, \quad \text{Pr} f(0) + M\theta'(0) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\varepsilon = c/a < 0$ — параметр сжатия пластины; M — безразмерный параметр плавления:

$$M = \frac{c_p(T_\infty - T_m)}{\lambda + c_s(T_m - T_s)}.$$

Следует отметить, что параметр плавления M представляет собой комбинацию чисел Стефана $c_p(T_\infty - T_m)/\lambda$ и $c_s(T_m - T_s)/\lambda$ для жидкой и твердой фаз соответственно. Представляют интерес следующие параметры задачи: коэффициент поверхностного трения C_f , характеризующий скорость сдвиговых деформаций, и локальное число Нуссельта Nu , определяющее скорость теплопереноса.

Выражение для сдвигового напряжения на стенке имеет вид

$$\tau_w = (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} + \kappa(\omega) \Big|_{y=0}.$$

Тогда локальный коэффициент поверхностного трения на поверхности может быть выражен следующим образом:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2} = \text{Re}_x^{-1/2} [1 + (1 - n)R] f''(0).$$

Количество теплоты, переданной через единицу площади поверхности, равно

$$q_w = -\kappa_\infty \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} - \frac{4\sigma^*}{3k^*} \left(\frac{\partial T^4}{\partial y} \right) \Big|_{y=0},$$

поэтому выражение для скорости теплопереноса может быть записано в виде

$$Nu = -\text{Re}_x^{1/2} (1 + N) \theta'(0),$$

где $\text{Re}_x = x u_e(x)/\nu$ — локальное число Рейнольдса.

Следует отметить, что в отсутствие параметра магнитного поля Na и параметра теплового излучения N рассматриваемая задача сводится к задаче, описанной в [24].

2. Метод решения. Система нелинейных дифференциальных уравнений решалась численно в программном комплексе Mathematica 7.0 с использованием конечно-разностного метода. Выбор сетки и контроль ошибки вычислений основаны на невязке непрерывного решения. Рассматриваемая система не может быть решена не только для пластины бесконечной длины, но и для пластины конечной большой длины. Поэтому для верификации непрерывности решения при приближении к бесконечности решалась последовательность задач для пластин с увеличивающейся длиной. График каждого последующего решения накладывался на графики предыдущих решений, что упрощало их сравнение. В численных расчетах условие на бесконечности задавалось для большого, но конечного значения η , при котором отсутствуют значительные вариации скорости, микроротации, температуры и других параметров.

3. Численный эксперимент. В данной работе с помощью программного комплекса Mathematica 7.0 численно исследовано влияние плавления на стационарное двумерное МГД-течение в пограничном слое несжимаемой электропроводящей микрополярной жидкости с учетом теплового излучения вблизи точки торможения на горизонтальной сжимаемой пластине. Решения данной задачи зависят от параметра вихревой вязкости R , числа Гартмана Na , числа Прандтля Pr , параметра сжатия пластины ε , параметра плавления M и параметра теплового излучения N . Поскольку экспериментальные значения этих параметров неизвестны, в численных расчетах использовались те же значения, что и в проведенных ранее исследованиях. В данной работе число варьируемых величин было ограничено четырьмя: Na , ε , M , N .

Таблица 1

Значения $f''(0)$ при $Ha = 0$, $N = 0$ и различных значениях ε , M , R

ε	M	R	$f''(0)$		
			Данные [14]	Данные [24]	Данные настоящей работы
0	0	0	1,232 588	1,232 588	1,232 587
0	0	1,0	—	1,006 406	1,006 400
0	1	1,0	—	0,879 324	0,879 324
-0,25	0	0	1,402 240	1,402 240	1,402 243
-0,25	1	0,5	—	1,081 368	1,081 368
-0,50	0	0	1,495 670	1,495 670	1,495 674
-0,50	1	0,5	—	1,157 496	1,157 496

Таблица 2

Значения C_f и Nu при различных значениях ε , M , N , Ha

ε	M	N	Ha	C_f	Nu
0	1	0,5	1,0	2,138 99	-0,191 475
-0,4	1	0,5	1,0	2,736 67	-0,161 724
-0,8	1	0,5	1,0	3,147 85	-0,129 993
-0,5	0	0,5	1,0	2,943 70	-0,174 682
-0,5	1	0,5	1,0	2,858 42	-0,153 993
-0,5	2	0,5	1,0	2,791 56	-0,138 643
-0,5	1	0	1,0	2,870 43	-0,088 053
-0,5	1	0,5	1,0	2,858 42	-0,153 993
-0,5	1	1,0	1,0	2,849 70	-0,226 597
-0,5	1	0,5	0	-0,044 24	-0,002 460
-0,5	1	0,5	1,0	2,858 42	-0,153 993
-0,5	1	0,5	1,5	3,616 83	-0,163 304

Если параметр магнитного поля и параметр теплового излучения равны нулю, то безразмерные уравнения (6) с граничными условиями (7) совпадают с соответствующими уравнениями и граничными условиями в работе [24]. Для оценки точности использованного метода вычислялись значения коэффициента поверхностного трения $f''(0)$ и локального числа Нуссельта $-\theta'(0)$ при различных значениях ε , M , R . В табл. 1 приведены значения $f''(0)$, полученные в данной работе и в расчетах [14, 24]. Эти значения хорошо согласуются.

4. Результаты численных расчетов и их обсуждение. Влияние параметров плавления, магнитного поля, сжатия и теплового излучения на скорость и температуру показано на рис. 2–8, значения локального коэффициента поверхностного трения и числа Нуссельта приведены в табл. 2. В настоящей работе численные расчеты проводились при $Pr = 0,71$, $n = 0,5$, $R = 1$.

4.1. *Влияние параметра плавления M .* На рис. 2,а показана зависимость продольной компоненты скорости f' от параметра подобия η при различных значениях параметра плавления M . Видно, что с увеличением параметра плавления M вблизи сжимаемой поверхности скорость жидкости уменьшается, и при этом асимптотически удовлетворяет условиям на входе в расчетную область (7). Это подтверждает достоверность полученных результатов. Увеличение M приводит к уменьшению толщины пограничного слоя. На рис. 2,б показано влияние параметра плавления M на распределение температуры. С увеличением M уменьшается температура $\theta(\eta)$ вдоль пограничного слоя и как следствие толщина теплового пограничного слоя. Таким образом, с увеличением параметра плавления

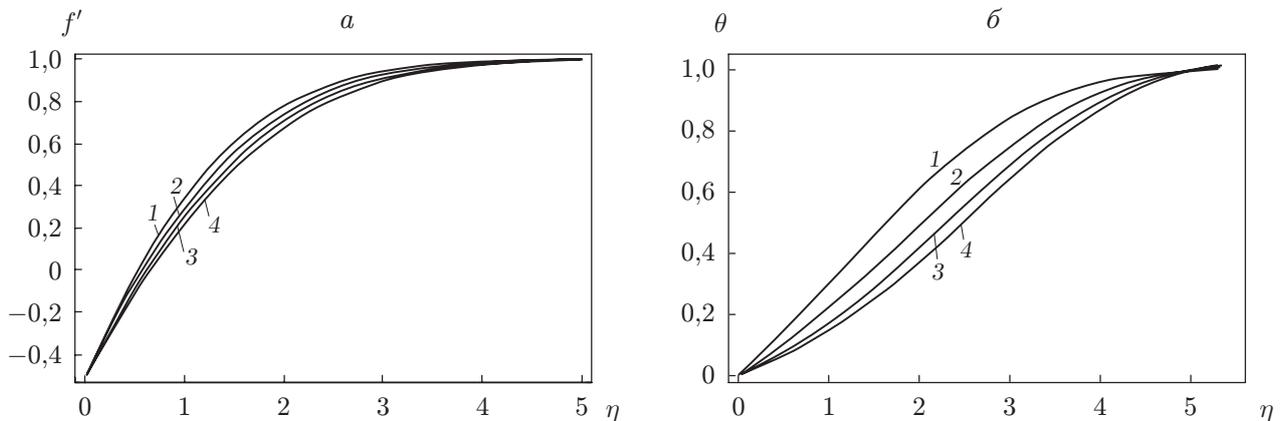


Рис. 2. Профили скорости (а) и температуры (б) при $Na = 1,0$, $\varepsilon = -0,5$, $N = 0,5$ и различных значениях M :
 1 — $M = 0$, 2 — $M = 1$, 3 — $M = 2$, 4 — $M = 3$

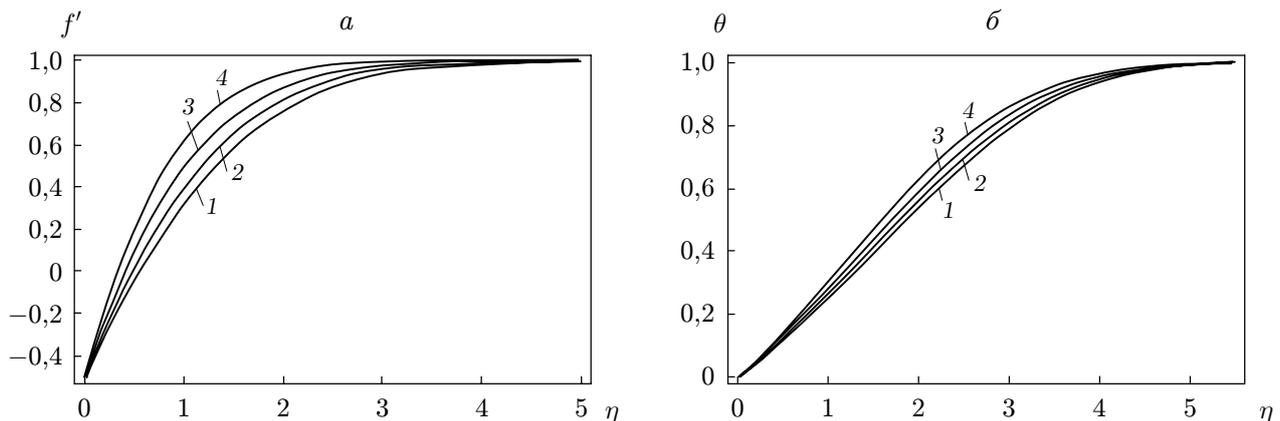


Рис. 3. Профили скорости (а) и температуры (б) при $M = 1,0$, $\varepsilon = -0,5$, $N = 0,5$ и различных значениях Na :
 1 — $Na = 0$, 2 — $Na = 0,5$, 3 — $Na = 1,0$, 4 — $Na = 1,5$

ния M скорость теплопереноса увеличивается. При увеличении M коэффициент поверхностного трения C_f уменьшается (см. табл. 2). Число Нуссельта является отрицательным при всех значениях M , что соответствует направлению теплового потока от жидкости к твердой стенке. Это очевидно, поскольку температура жидкости больше температуры стенки. Также следует отметить, что согласно данным табл. 2 скорость теплопереноса в отсутствие плавления больше, чем при его наличии.

4.2. *Влияние параметра магнитного поля Na .* На рис. 3,а показано влияние параметра магнитного поля Na на скорость проводящей жидкости. С увеличением Na в области, занимаемой пограничным слоем, скорость жидкости возрастает и при этом асимптотически приближается к значениям на входе в расчетную область. При наличии магнитного поля количество движения в пограничном слое увеличивается. На рис. 3,б приведено распределение температуры при различных значениях Na . Температура жидкости минимальна в пограничном слое и с увеличением координаты η увеличивается, приближаясь к значению, соответствующему набегающему потоку. При наличии теплового излучения с

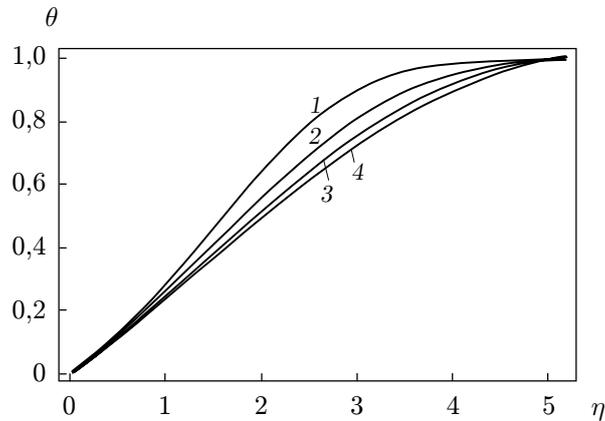


Рис. 4. Профили температуры при $Na = 1,0$, $\varepsilon = -0,5$, $M = 1,0$ и различных значениях N :

1 — $N = 0$, 2 — $N = 1$, 3 — $N = 2$, 4 — $N = 3$

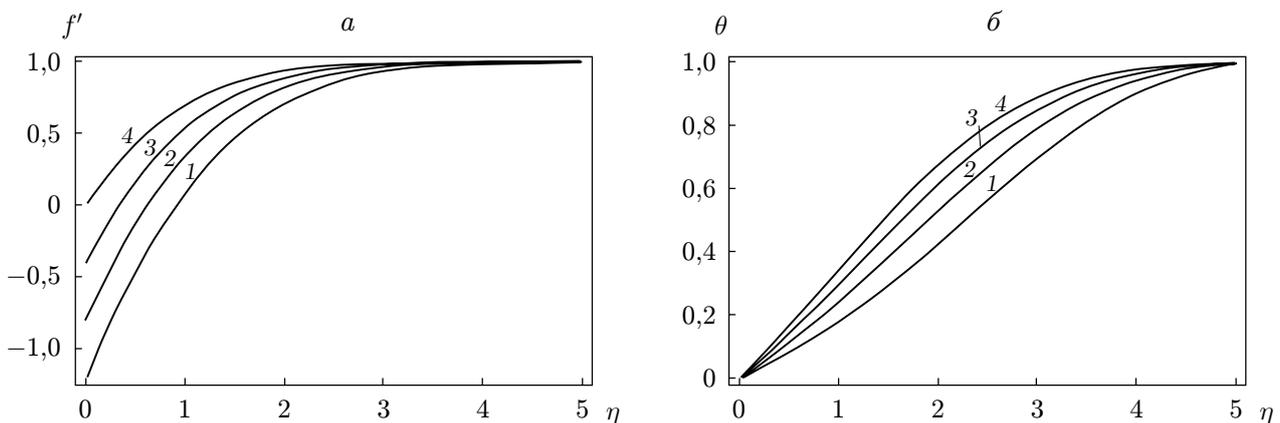


Рис. 5. Профили скорости (а) и температуры (б) при $Na = 1,0$, $M = 1,0$, $N = 0,5$ и различных значениях ε :

1 — $\varepsilon = -1,2$, 2 — $\varepsilon = -0,8$, 3 — $\varepsilon = -0,4$, 4 — $\varepsilon = 0$

увеличением Na температура незначительно увеличивается, в результате увеличивается толщина теплового пограничного слоя.

При наличии теплового излучения с увеличением параметра магнитного поля Na скорость теплопереноса уменьшается, в то время как коэффициент поверхностного трения возрастает (см. табл. 2). Следует отметить, что при наличии магнитного поля значения числа Нуссельта увеличиваются.

4.3. *Влияние параметра теплового излучения N .* На рис. 4 показано влияние параметра теплового излучения N на температуру электропроводящей жидкости при наличии магнитного поля. С увеличением координаты η температура увеличивается при фиксированном значении N . При фиксированном значении $\eta \neq 0$ значения температуры поперек пограничного слоя уменьшаются с увеличением N , поэтому толщина теплового пограничного слоя также уменьшается.

Из табл. 2 следует, что увеличение значения N приводит к незначительному уменьшению коэффициента поверхностного трения и увеличению значения температурного градиента на поверхности. При наличии теплового излучения скорость теплопереноса увеличивается.

4.4. *Влияние параметра сжатия пластины ε .* На рис. 5 приведены зависимости продольной скорости f' и температуры θ от координаты η при различных значениях параметра сжатия пластины ε . Видно, что с увеличением ε скорость в пограничном слое уменьшается, приближаясь асимптотически к значению на бесконечности. Таким образом, с увеличением параметра сжатия толщина пограничного слоя уменьшается.

Из табл. 2 следует, что с увеличением параметра сжатия ε независимо от значения M коэффициент поверхностного трения C_f увеличивается, а локальное число Нуссельта уменьшается. Поэтому с увеличением параметра сжатия пластины ε скорость теплопереноса на границе жидкость — твердое тело уменьшается.

Заключение. В работе исследованы процесс плавления в стационарном пограничном МГД-слое при наличии точки торможения и теплоперенос в течении микрополярной жидкости на горизонтальной сжимаемой пластине. Проведено исследование влияния различных параметров на течение жидкости и характеристики теплопереноса. Результаты исследования позволяют сделать следующие выводы.

При увеличении параметра плавления и параметра сжатия скорость течения жидкости уменьшается, а при увеличении параметра магнитного поля — увеличивается.

Температура жидкости и толщина теплового пограничного слоя увеличиваются при увеличении параметра теплового излучения и параметра магнитного поля, однако при увеличении параметров плавления и сжатия толщина теплового пограничного слоя уменьшается.

При увеличении параметра плавления и параметра теплового излучения коэффициент поверхностного трения уменьшается, а при увеличении параметра магнитного поля и параметра сжатия — увеличивается.

С увеличением параметров плавления и сжатия скорость теплопереноса на границе жидкость — твердое тело уменьшается, а с увеличением параметров теплового излучения и магнитного поля — увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Eringen A. C.** Theory of micropolar fluids // J. Math. Mech. 1964. V. 16. P. 1–18.
2. **Eringen A. C.** Theory of thermomicropolar fluids // J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 138. P. 480–496.
3. **Ariman T., Turk M. A., Sylvester N. D.** Microcontinuum fluid mechanics: A review // Intern. J. Engng Sci. 1973. V. 11. P. 905–930.
4. **Ariman T., Turk M. A., Sylvester N. D.** Appls of micro fluid mechs: A review // Intern. J. Engng Sci. 1974. V. 12. P. 9273–9293.
5. **Ahmadi G.** Self-similar solution of incompressible micropolar boundary layer flow over a semi-infinite plate // Intern. J. Engng Sci. 1976. V. 14. P. 639–646.
6. **Qukaszewicz G.** Micropolar fluids: Theory and application. Basel: Birkhäuser, 1999.
7. **Guram G. S., Smith C.** Stagnation flows of micropolar fluids with strong and weak interactions // Comput. Math. Appl. 1980. V. 6. P. 213–233.
8. **Jena S. K., Mathur M. N.** Similarity solution for laminar free convection flow of thermomicropolar fluid past a non-isothermal vertical flat plate // Intern. J. Engng Sci. 1981. V. 19. P. 1431–1439.
9. **Lok Y. Y., Pop I., Chamkha J.** Non-orthogonal stagnation point flow of a micropolar fluid // Intern. J. Engng Sci. 2007. V. 45. P. 173–184.
10. **Ishak A., Nazar R., Pop I.** Magnetohydrodynamic (MHD) flow of a micropolar fluid towards a stagnation point on a vertical surface // Comput. Math. Appl. 2008. V. 56. P. 3188–3194.

11. **Ashraf M., Ashraf M. M.** MHD stagnation point flow of a micropolar fluid towards a heated surface // *Appl. Math. Mech. (English Ed.)* 2011. V. 32. P. 45–54.
12. **Wang C. Y.** Liquid film on an unsteady stretching sheet // *Quart. Appl. Math.* 1990. V. 48. P. 601–610.
13. **Miklavcic M., Wang C. Y.** Viscous flow due to a shrinking sheet // *Quart. Appl. Math.* 2006. V. 64. P. 283–290.
14. **Wang C. Y.** Stagnation flow towards a shrinking sheet // *Intern. J. Nonlinear Mech.* 2008. V. 43. P. 377–382.
15. **Hayat T., Abbas Z., Javed T., Sanjib M.** Three dimensional rotating flow induced by a shrinking sheet for suction // *Chaos Solitons Fractals*. 2009. V. 39. P. 1615–1626.
16. **Yao B., Chen J.** A new analytical solution branch for the Blasius equation with a shrinking sheet // *Appl. Math. Comput.* 2009. V. 215. P. 1146–1153.
17. **Ishak A., Lok Y. Y., Pop I.** Stagnation point flow over a shrinking sheet in a micropolar fluid // *Chem. Engng Comm.* 2010. V. 197. P. 1417–1427.
18. **Fan T., Xu H., Pop I.** Unsteady stagnation flow and heat transfer towards a shrinking sheet // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer*. 2010. V. 37. P. 1440–1446.
19. **Epstein M., Cho D. H.** Melting heat transfer in steady laminar flow over a flat plate // *J. Heat Transfer*. 1976. V. 98. P. 531–533.
20. **Kazmierczak M., Poulidakos D., Sadowski D.** Melting of a vertical plate in porous medium controlled by forced convection of a dissimilar fluid // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer*. 1987. V. 14. P. 507–517.
21. **Kazmierczak M., Poulidakos D., Pop I.** Melting from a flat plate in a porous medium in the presence of steady convection // *Numer. Heat Transfer*. 1986. V. 10. P. 571–581.
22. **Cheng W. T., Lin C. H.** Transient mixed convection heat transfer with melting effect from the vertical plate in a liquid saturated porous medium // *Intern. J. Engng Sci.* 2006. V. 44. P. 1023–1036.
23. **Ishak A., Nazar R., Bachok N., Pop I.** Melting heat transfer in steady laminar flow over a moving surface // *Heat Mass Transfer*. 2010. V. 46. P. 463–468.
24. **Yacob N. A., Ishak A., Pop I.** Melting heat transfer in boundary layer stagnation-point flow towards a stretching/shrinking sheet in a micropolar fluid // *Comput. Fluids*. 2011. V. 47. P. 16–21.
25. **Cogley A. C., Vincenty W. E., Gilles S. E.** Differential approximation for radiation in a non-gray gas near equilibrium // *AIAA J.* 1968. V. 6. P. 551–553.
26. **Raptis A.** Radiation and free convection flow through a porous medium // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer*. 1998. V. 25. P. 289–295.
27. **Makinde O. D.** Free convection flow with thermal radiation and mass transfer past a moving vertical porous plate // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer*. 2005. V. 32. P. 1411–1419.
28. **Ibrahim F. S., Elaiw A. M., Bakr A. A.** Influence of viscous dissipation and radiation on unsteady MHD mixed convection flow of micropolar fluids // *Appl. Math. Inform. Sci.* 2008. V. 2. P. 143–162.
29. **Das K.** Impact of thermal radiation on MHD slip flow over a flat plate with variable fluid properties // *Heat Mass Transfer*. 2011. V. 48. P. 767–778.
30. **Hayat T., Abbas Z., Pop I., Asghar S.** Effects of radiation and magnetic field on the mixed convection stagnation-point flow over a vertical stretching sheet in a porous medium // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 2010. V. 53. P. 466–474.
31. **Shit G. C., Haldar R.** Effects of thermal radiation on MHD viscous fluid flow and heat transfer over nonlinear shrinking porous sheet // *Appl. Math. Mech. (English Ed.)* 2011. V. 32. P. 677–688.

-
32. **Bhattacharyya K., Layek G. C.** Effects of suction/blowing on steady boundary layer stagnation-point flow and heat transfer towards a shrinking sheet with thermal radiation // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54. P. 302–307.
 33. **Peddison J., McNitt R. P.** Boundary layer theory for micropolar fluid // Recent Adv. Engng Sci. 1970. V. 5. P. 405–426.

*Поступила в редакцию 23/XII 2013 г.,
в окончательном варианте — 21/VII 2014 г.*
