

Решение между фронтом ударной волны $\lambda_3 = 1$ и фронтом перемешивания λ_1 описывается формулами (5.6).

На фиг. 4, 5 изображено приближенное решение задачи для поршня с учетом турбулентного перемешивания. Там же для сравнения приведено решение без перемешивания. Рассмотрен случай $N = 0,5$ и 1 , $\gamma = 5/3$. Постоянная $\alpha = 0,133$ взята из работы [1]. Как и для задачи п. 4, влияние перемешивания приводит к другому распределению плотности и к опережению в положении фронта ударной волны.

Автор выражает благодарность В. Г. Яковлеву, построившему примеры п. 4, Р. А. Жилиной и Р. Г. Исламовой, выполнившим численное интегрирование уравнения (6.4).

Поступила 27 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Беленький С. З., Фрадкин Е. С. Теория турбулентного перемешивания.— «Труды ФИАН им. Лебедева», 1965, т. 29, с. 207.
2. Крашенинникова Н. Л. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем.— «Изв. АН СССР. ОНТ», 1955, № 8.
3. Адамский В. В., Попов Н. А. Движение газа под действием давления на поршне, изменяющегося по степенному закону.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 3, с. 564.
4. Неуважаев В. Е. Неадиабатические движения в идеальном газе (автомодельные решения).— «Труды МИ АН СССР», 1973, т. 22, с. 24.
5. Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г. Турбулентное перемешивание границы раздела в численном газодинамическом расчете.— ЖВМ и МФ, 1976, № 2.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.

УДК 532.529.

СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПУЗЫРЬКИ ГАЗА

В. В. Гончаров, К. А. Наугольных, С. А. Рыбак

(Москва)

Задача о распространении волн в жидкости с пузырьками газа, являющейся примером нелинейной диспергирующей среды, обычно рассматривается в приближении слабой нелинейности и дисперсии [1, 2], и только в некоторых частных случаях удается получить решение, соответствующее сильному изменению радиуса пузырька [3]. В отличие от этого в данной работе показано, что для стационарных волн удается найти более широкий класс решений, соответствующих сильно нелинейным пульсациям пузырьков. При этом наряду с решениями солитонного типа, соответствующими ситуации, когда нелинейные и дисперсионные эффекты как бы компенсируют друг друга, появляются и периодические решения.

Одномерные акустические волны в пузырьковой среде можно описать системой линейных акустических уравнений, учитывающих наличие пузырьков газа,

$$(1) \quad \begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \rho_0 \partial v / \partial x &= 0; \quad \partial v / \partial t + (1/\rho_0) \partial p / \partial x = 0; \\ \rho / \rho_0 &= [(1 - z)/\rho_0 c_0^2] p - nV \end{aligned}$$

и нелинейным уравнением Рэлея для колебаний газового пузырька

$$(2) \quad R d^2 R / dt^2 + (3/2)(dR/dt)^2 = (p_0/\rho_0)[(R_0/R)^{3\gamma} - 1] - p/\rho_0.$$

Поскольку $p = p(t, x)$, то $R = \bar{R}(t, x)$ и $dR/dt \simeq \partial R/\partial t$ при условии, что можно пренебречь конвективными нелинейными членами. Здесь ρ_0 , p_0 и c_0 — равновесные значения плотности, давления и скорости звука соответственно в жидкости без пузырьков; R_0 — равновесный радиус пузырька; R — его текущий радиус; γ — показатель адиабаты для газа в пузырьке; n — число пузырьков в единице объема; z — концентрация пузырьков; ρ , p , v и V — изменения плотности, давления, скорости частиц жидкости и объема пузырька соответственно.

Если ввести равновесный объем пузырька $V_0 = (4/3)\pi R_0^3$ ($z = nV_0$, $V_0 + V = (4/3)\pi R^3$), собственную частоту колебаний пузырька $\omega_0^2 = 3\gamma p_0/\rho_0 R_0^2$, а также безразмерные переменные

$$X = p/\rho_0 c_0^2, \quad Y = \frac{V}{V_0}, \quad \tau = \omega_0 t,$$

$$\xi = \frac{\omega_0}{c_0} x, \quad \bar{\rho} = \rho/\rho_0, \quad \bar{v} = v/c_0,$$

то система уравнений (1), (2) приводится к безразмерной форме

$$(3) \quad \partial \bar{\rho} / \partial \tau + \partial \bar{v} / \partial \xi = 0, \quad \partial \bar{v} / \partial \tau + \partial X / \partial \xi = 0, \quad \bar{\rho} = (1 - z)X - zY, \\ \partial^2 Y / \partial \tau^2 = (1/6)(1 + Y)^{-1}(\partial Y / \partial \tau)^2 + (1 + Y)^{1/3}\{(1 + Y)^{-\gamma} - 1\}/\gamma - \delta X\}.$$

Здесь параметр $\delta = \rho_0 c_0^2 / \gamma p_0 = \rho_0 c_0^2 / \rho_b c_b^2 \gg 1$, где c_b и ρ_b — равновесные скорость звука и плотность газа в пузырьке.

Будем далее рассматривать только стационарные решения системы (3) вида $Y = Y(\eta)$, где $\eta = \xi - c\tau$, а c — некоторая постоянная, равная скорости (в единицах c_0) перемещения искомого возмущения в среде. Для стационарных решений из системы (3) следуют уравнения связи

$$(4) \quad X = X(\eta) = X_0 + SY, \quad \bar{v} = \bar{v}(\eta) = \bar{v}_0 + (S/c)Y, \\ \bar{\rho} = \bar{\rho}(\eta) = (1 - z)X_0 + (S/c^2)Y,$$

где $S = zc^2 / [(1 - z)c^2 - 1]$; постоянные же X_0 и \bar{v}_0 можно положить равными нулю, тем самым включив их в равновесные значения p_0 , ρ_0 и v_0 . В этом случае последнее уравнение (3) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно Y

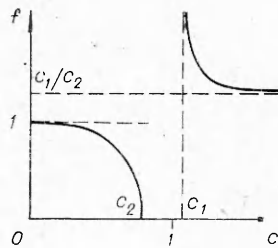
$$(5) \quad d^2 Y / d\eta^2 = (1/6)(1 + Y)^{-1}(dY/d\eta)^2 + [(1 + Y)^{1/3}/c^2]\{(1 + Y)^{-\gamma} - 1\}/\gamma - DY\},$$

где

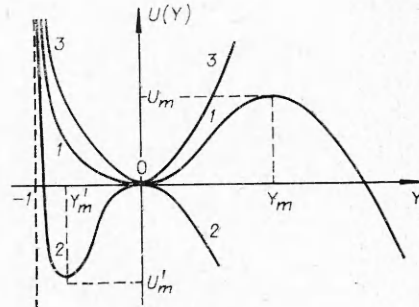
$$D = S\delta = \frac{c^2}{c_2^2} \frac{c_1^2 - c_2^2}{c^2 - c_1^2} = D - 1, \quad D = \frac{c_1^2}{c_2^2} \frac{c^2 - c_2^2}{c^2 - c_1^2}, \\ c_1^2 = (1 - z)^{-1}, \quad c_2^2 = (1 - z + z\delta)^{-1}.$$

Заметим, что из условий $z\delta > 0$ и $z < 1$ следует $c_2^2 < c_1^2$.

Ограниченные решения уравнения (5) при некотором фиксированном значении скорости c приводят к возмущениям, распространяющимся в жидкости без изменения формы. Следует помнить, что уравнение (5) получено из линейных уравнений акустики (1) (учитывалась только не-



Ф и г. 1



Ф и г. 2

линейность колебаний пузырьков). Следовательно, должно быть выполнено условие малости акустического числа Маха $M = \max|\bar{v}|/c \ll 1$, что с учетом (4) дает ограничение на максимальное значение Y

$$(6) \quad \frac{zc_1^2 \max|Y|}{|c^2 - c_1^2|} \ll 1.$$

В линейном приближении решение уравнения (5) имеет вид

$$Y = Ae^{i\kappa\eta} = Ae^{i(\kappa z - t\omega)}, \quad \kappa = D/c^2, \quad f = c\kappa.$$

Требование ограниченности Y приводит к условию $\kappa^2 \geq 0$, откуда получаем две области допустимых значений скорости c : $c^2 > c_1^2$ и $c^2 < c_2^2$. Дисперсионное уравнение линейных акустических волн в пузырьковой среде

запишется в виде $f = \sqrt{D} = \frac{c_1}{c_2} \sqrt{\frac{c^2 - c_2^2}{c^2 - c_1^2}}$. Соответствующие дисперсионные

кривые в координатах c, f приведены на фиг. 1. Очевидно, что скорость c_1 соответствует скорости высокочастотных волн $f \gg 1$ ($\omega \gg \omega_0$), при этом колебания пузырьков не сказываются на распространении волн (опущен член zY в третьем уравнении (3)). Наличие пузырьков проявляется только в изменении равновесной плотности жидкости $\rho_{\text{eff}} = \rho_0(1 - z)$. Скорость c_2 соответствует низкочастотным волнам $f \ll 1$.

Для нахождения ограниченного решения нелинейного уравнения (5) умножим последнее на $2(1 + Y)^{-1/3} dY/d\eta$

$$\frac{d}{d\eta} \left\{ (1 + Y)^{-1/3} \left(\frac{dY}{d\eta} \right)^2 + \int_0^Y \frac{2}{c^2} \left[Dy - \frac{(1 + y)^{-\gamma} - 1}{\gamma} \right] dy \right\} = 0,$$

откуда непосредственно следует первый интеграл уравнения (5)

$$(7) \quad (1 + Y)^{-1/3} (dY/d\eta)^2 + \beta^2 U(Y) = \beta^2 H,$$

где

$$\beta = \sqrt{(1 + \gamma)/3c^2}; \quad \alpha = (1/2)\gamma(\gamma - 1)D;$$

$$U(Y) = [6/\gamma(\gamma^2 - 1)] \{ (1 + Y)^{-(\gamma-1)} - 1 + (\gamma - 1)Y + \alpha Y^2 \}.$$

Уравнение (7) имеет смысл закона сохранения энергии. Действительно, переходя к размерным переменным, получим

$$(1 + Y)^{-1/3} \left(\frac{dY}{d\eta} \right)^2 = \frac{18\omega_0^2}{c^2 V_0 \rho_0} T_K,$$

где $T_K = \rho_0 (V_0 + V)(dR/dt)^2$ — кинетическая энергия отдельного пузырька

ка в жидкости. Тогда величина $U(Y)$ пропорциональна потенциальной энергии, а постоянная H — сохраняющейся полной энергии пузырька. В квадратичном приближении

$$(8) \quad U(Y) = Y^3 - [3/(1 + \gamma)]DY^2, \quad |Y| \ll 1.$$

Общее решение уравнения (7) записывается в неявной форме

$$\beta\eta + \Theta = \pm \int_{Y_1}^Y (1 + y)^{-1/6} (H - U(y))^{-1/2} dy.$$

Здесь Y может принимать значения $Y_1 \leq Y \leq Y_2$, где Y_1 и Y_2 — два конечных корня функции $H - U(Y)$, между которыми $H \geq U(Y)$. Решение $Y = Y(\beta\eta + \Theta)$ является периодическим (в предельном случае кратного корня Y_1 или Y_2 получается солитон) с периодом T , определяемым выражением

$$T = \frac{2}{\beta} \int_{Y_1}^{Y_2} (1 + y)^{-1/6} (H - U(y))^{-1/2} dy.$$

Выясним допустимые значения полной энергии H при фиксированном значении скорости c . Для этого необходимо рассмотреть три возможных интервала изменения скорости c :

$$c^2 < c_2^2; \quad c_2^2 < c^2 < c_1^2; \quad c^2 > c_1^2;$$

соответствующие кривые 1–3 изменения потенциальной энергии $U(Y)$ приведены на фиг. 2; видно, что распространение стационарной волны в пузырьковой среде аналогично колебаниям частицы в потенциальном поле $U(Y)$ с энергией H [4]. В этом случае для существования ограниченных решений $Y(\eta)$ необходимо, чтобы частица находилась в потенциальной яме, т. е. полная энергия частицы была заключена между максимальным и минимальным значениями потенциальной энергии. Следовательно, для трех возможных интервалов изменения скорости c получаем соответственно три области допустимых значений полной энергии пузырька H : $0 \leq H \leq U_m$; $U'_m \leq H \leq 0$; $H > 0$. При этом значения Y_m и Y'_m , а также U_m и U'_m определяются следующими соотношениями;

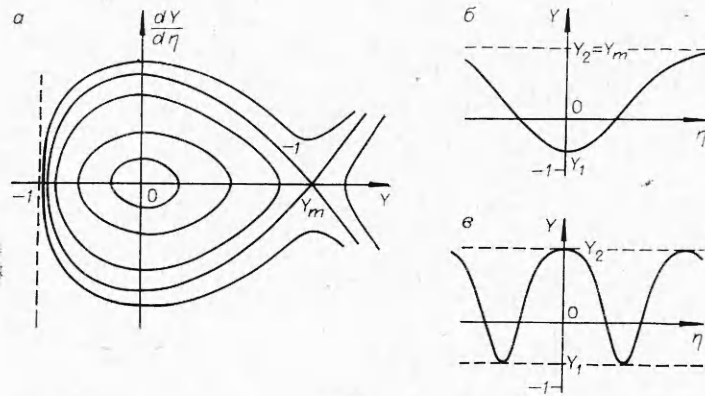
$$(1 + Y_m)^{-\gamma} = 1 + [2\alpha/(\gamma - 1)]Y_m, \quad U_m = U(Y_m),$$

причем Y_m и Y'_m соответствуют ненулевому корню первого уравнения.

Рассмотрим качественно типы решений в каждом интервале изменения скорости c .

1. Пусть $c^2 < c_2^2$. Фазовые траектории уравнения (7) представлены на фиг. 3, а. Кривая 1 ($H = U_m$) является сепаратрисой и соответствует солитону (фиг. 3, б). При изменении полной энергии пузырька H от U_m до 0 фазовые траектории замкнуты (периодическое решение, фиг. 3, в) и стягиваются к центру в точке (0,0). При изменении скорости c от нуля до c_2 точка Y_m стремится к нулю, и все фазовые траектории стягиваются в точку (0,0).

Получим ограничения на область изменения параметров c^2 и H , связанные с линейностью акустических уравнений (условие (6)). Так как $Y_1 \leq Y \leq Y_2$ и $|Y_1| < 1$, то $\max|Y| \leq \max\{1, |Y_2|\}$. Если $|Y_2| \leq 1$, то из условия (6) следует $z + (1 - z)/\delta \ll 1$, последнее неравенство всегда



Ф и г. 3

выполняется, ибо $z \ll 1$ и $\delta \gg 1$. При $|Y_2| > 1$ с учетом соотношения $Y_2 < Y_m$ и оценки $Y_m < -(\gamma - 1)/2\alpha$ получаем

$$(9) \quad c^2 \gg 1/\gamma\delta.$$

В силу того, что $\gamma\delta \gg 1$, условие (9) не допускает рассматривать волны, распространяющиеся с малыми скоростями. Однако условие (9) справедливо только для солитона и для решений, фазовые траектории которых близки к сепаратрисе (кривая 1, фиг. 3, а), ибо именно для таких решений Y_1 такого же порядка, что и Y_m . Если же рассмотреть периодические решения, для которых $Y_2 \ll Y_m$, то при $c^2 < 1/\gamma\delta$ получим, что $Y_2 \simeq (1/6)\gamma(\gamma + 1)H$ и его подстановка в условие (6) приведет к ограничению на полную энергию H :

$$H \ll 6/\gamma(1 + \gamma)z.$$

Случай малых возмущений $|Y| \ll 1$ анализируется с помощью разложения функции $H - U(Y)$ в ряд до членов третьего порядка включительно (8). При этом получаем, что $Y_m = \frac{2}{1+\gamma}D$, $U_m = Y_m^3/2$. В частности, для солитона корни функции $H - U(Y)$ выражены в виде $Y_1 = -Y_m/2$, $Y_2 = Y_m$, а форма солитона

$$Y(\eta) = Y_m - P/\text{ch}(\sqrt{P}(\beta/2)\eta).$$

Амплитуда солитона P и его ширина Δ определяются выражениями

$$P = -\frac{3}{1+\gamma}D = \frac{3}{1+\gamma} \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \frac{c^2 - c_2^2}{c_1^2 - c^2};$$

$$\Delta = \frac{2}{\beta \sqrt{P}} \sqrt{\frac{1 - (c/c_1)^2}{(c_2/c)^2 - 1}}.$$

2. Пусть $c_2^2 \leq c^2 \leq c_1^2$, тогда $U'_m \leq H \leq 0$. В этом случае задачу можно свести к рассмотренной для предыдущего типа, используя следующую подстановку:

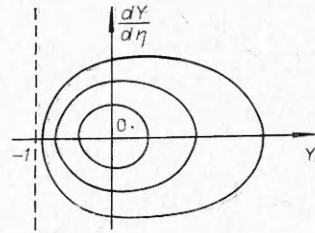
$$y = \frac{Y - Y'_m}{1 + Y'_m}; \quad c_2^2 = \frac{c_2^2}{(1 + Y'_m)^{\gamma+1} + [1 - (1 + Y'_m)^{\gamma+1}](c_2/c_1)^2};$$

$$\tilde{\beta}^2 = (1 + Y'_m)^{-(\gamma+2/3)}\beta^2; \quad \tilde{H} = (H - U'_m)(1 + Y'_m)^{\gamma-1}.$$

При этом как бы происходит переход к новому равновесному состоянию среды

$$\begin{aligned} \tilde{V}_0 &= V_0(1 + Y'_m), \quad \tilde{p}_0 = p_0 + \rho_0 c_0^2 S Y'_m, \\ \tilde{\rho}_0 &= \rho_0 \left(1 + \frac{S}{c} Y'_m\right). \end{aligned}$$

3. Пусть $c^2 > c_1^2$, тогда $H > 0$. Фазовые траектории уравнения (7) при некотором фиксированном значении скорости c изображены на фиг. 4. Точка $(0, 0)$ является центром. Более удаленные от центра кривые (рост амплитуды волны) соответствуют большим значениям полной энергии H . С ростом скорости c фазовые траектории становятся менее вытянутыми в направлении оси OY . Поскольку все фазовые траектории замкнуты, возможны только периодические решения, качественно совпадающие с изображенными на фиг. 3, в. Солитон, распространяющийся со скоростью $c > c_1$, не возникает. Последнее понятно, ибо при $c > c_1$ высокочастотные гармоники распространяются практически с одной скоростью и их нелинейное образование не может быть компенсировано расфазировкой за счет дисперсии, как это осуществлялось в области сильной дисперсии ($c < c_2$).



Ф и г. 4

Для корней Y_1 и Y_2 функции $H - U(Y)$ имеет место следующая оценка:

$$-\sqrt{[(1 + \gamma)/3]H/D} < Y_1 < 0, \quad 0 < Y_2 < \sqrt{[(1 + \gamma)/3]H/D}.$$

При этом из условия (6) получаем ограничение на область изменения параметров c и H , обусловленное линейностью акустических уравнений

$$(10) \quad \frac{\gamma + 1}{3} \left(\frac{c_1}{c}\right)^2 \frac{Hz}{\delta} \ll c_1^2 - c^2.$$

Условие (10) показывает, что при скоростях c , близких к скорости высокочастотных линейных волн c_1 , полная энергия и вместе с ней амплитуда волны должны быть малы. Этого следовало ожидать, так как при $c \rightarrow c_1$ линейные волны распространяются без дисперсии и нелинейность акустических волн проявляется сильнее.

Если ограничиться малыми значениями величины $|Y|$ и для нахождения корней Y_1 и Y_2 функции $H - U(Y)$ воспользоваться приближенным выражением (8), то можно получить нелинейное искажение гармонической волны малой амплитуды. Однако здесь следует проявлять особую осторожность, ибо формальное использование выражения (8) (квадратичное приближение) без учета малости $|Y|$ может привести к существенным искажениям решения. Например, появляется ложный солитон при $H = 3[D/(1 + \gamma)]^3$, но в этом случае $Y_2 = 2D/(1 + \gamma) \gg (2/3)(c_1/c_2)^2 \sim 1$ и выражение (8) становится несправедливым. В заключение, поясняя характер полученных решений, отметим, что избыточное давление p в правой части уравнения (2) может быть выражено с помощью уравнения состояния в виде формулы $p = \rho_0 n V c^2 c_0^2 / [(1 - z)c^2 - 1]$, вытекающей из уравнения (1) для случая стационарной волны. Как видно, в зависимости от соотношения между c^2 и c_1^2 меняется знак p/V , при $c^2 > c_1^2$ с увеличением V избыточное давление p возрастает, а при $c^2 < c_1^2$ увеличению V соответствует отрицательное значение p (давление убывает). Первый случай соответствует пульсациям пузырька на частотах выше резонанса, когда пузырек представляет собой массовый импеданс, а жидкость — упругий; при этом увеличение объема пузырька сопровождается сжатием упру-

гого элемента (ростом давления). В обратном случае, при $c^2 < c_1^2$ упругим элементом является пузырек, его увеличение означает растяжение упругого элемента (т. е. понижение давления). Заметим, что упругость газа в пузырьке, описываемая первым членом в правой части уравнения (2), всегда противодействует расширению, т. е. этот член всегда отрицателен при увеличении V . Поэтому при $c^2 < c_1^2$, когда $(-p) > 0$, члены в правой части уравнения имеют разные знаки и возможна их компенсация, что и соответствует образованию солитона.

Поступила 17 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Длинноволновые возмущения в газожидкостной смеси.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1972, 5.
2. Заболотская Е. А., Солуян С. И. Нелинейное распространение волн в жидкости с равномерно распределенными воздушными пузырьками.— «Акуст. журн.». 1973, т. 19, № 5.
3. Когарко Б. С. Одномерное неустановившееся движение жидкости с возникновением и развитием кавитации.— «Докл. АН СССР», 1964, т. 155, № 4.
4. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. Нелинейные волны.— «Усп. физ. наук», 1971, т. 103, вып. 2.

УДК 536.46

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ЗАЖИГАНИЯ РЕАКЦИОННОСПОСОБНОГО ВЕЩЕСТВА НАГРЕТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Р. С. Буркина, В. Н. Вилюнов

(Томск)

Благодаря аррениусовской зависимости скорости химической реакции от температуры в постановке многих задач макрокинетики присутствуют несколько длин релаксаций (обычно две), отношение которых образует малый параметр (например, отношение зон химической реакции и прогрева). Задачи такого класса относятся к задачам особых возмущений, для решения которых наиболее пригоден метод сращиваемых асимптотических разложений (САР).

С помощью метода САР найдено решение ряда стационарных задач медленного горения и детонации (см. [1] и библиографию к ней). Для задач макрокинетики, сформулированных в рамках дифференциальных уравнений с частными производными * опыт применения САР еще весьма ограничен [1—3].

В данной работе найдены верхняя и нижняя оценки времени прогрева в тепловой теории зажигания нагретой поверхностью; дано сравнение аналитических формул с численным счетом на ЭВМ; установлен асимптотический характер формулы Я. Б. Зельдовича [4]; показана расходимость (при стремлении температурного напора θ_0 к бесконечности) результатов [5, 6].

* Берман В. С. Некоторые вопросы теории распространения зоны с экзотермическими химическими реакциями в газовых и конденсированных средах. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. М., ИИМ АН СССР, 1974.