

УДК 539.4

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ЛЕДЯНЫХ ПЛАСТИН КРИВОЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ, УСИЛЕННЫХ ЖЕСТКОЙ ВСТАВКОЙ

Ю. В. Немировский, Т. П. Романова

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск
E-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Разработана методика определения несущей способности ледяных нагружаемых площадок, которые моделируются идеальной жесткопластической пластиной, расположенной на несжимаемом основании. На пластину, имеющую свободно опертый или защемленный произвольный гладкий криволинейный контур, действует нагрузка, равномерно распределенная по усиленной локальной центральной области произвольной формы. Получено аналитическое выражение для предельной нагрузки. В качестве примера рассмотрена пластина в форме эллипса.

Ключевые слова: ледяная пластина, жесткопластическая модель, криволинейный контур, жесткая вставка, несжимаемое основание, предельная нагрузка, разносопротивляющийся материал.

Введение. Наиболее экономичным и эффективным способом промышленного освоения отдаленных северных и северо-восточных районов России является создание ледовых строительных площадок, дорог, переправ, временных вертолетных стоянок [1]. Ежегодно в Российской Федерации создается до 1000 объектов такого типа.

В настоящее время учет влияния пластических деформаций льда является обязательным при проведении расчетов ледовых площадок. Одним из способов увеличения грузоподъемности естественного ледяного покрова является усиление его путем намораживания дополнительной полосы льда, при этом прикладываемая нагрузка равномерно распределяется по усиленной области [1, 2]. В данной работе приводится методика определения предельной нагрузки, действующей на усиленные ледяные площадки криволинейной формы, которые, как и в [3], моделируются идеальной жесткопластической пластиной, расположенной на несжимаемом основании. Усиленная часть пластины считается жесткой вставкой, которая не деформируется и имеет произвольную гладкую границу. На свободно опертую или защемленную по внешнему контуру пластину действует нагрузка, равномерно распределенная по жесткой вставке. В случае отсутствия жесткой области для свободно опертой круглой пластины при осесимметричном нагружении точное решение для идеального жесткопластического материала построено в [3], для упругого материала — в [4]. Случай пластин постоянной толщины с произвольным контуром, не содержащих жесткую область и нагружаемых по некоторой произвольной области, рассмотрен в работе [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00121-а).

© Немировский Ю. В., Романова Т. П., 2013

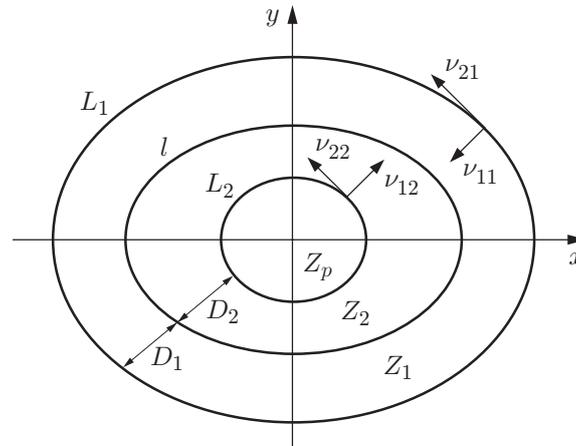


Рис. 1. Схема произвольной криволинейной пластины с жесткой вставкой

В работе [6] построено точное решение для круглой пластины с круглой жесткой вставкой, расположенной на несжимаемом основании.

1. Схема деформирования пластины. Рассмотрим тонкую идеальную жесткопластическую пластину с произвольным гладким выпуклым свободно опертым или защемленным контуром L_1 (рис. 1). Пластина находится на несжимаемом основании. В центральной части пластины имеется жесткая вставка Z_p с произвольным гладким контуром L_2 . На пластину действует равномерно распределенная по жесткой области Z_p нагрузка P , направление действия которой считается положительным.

Уравнения внешнего контура L_1 и внутреннего контура L_2 пластины запишем в параметрической форме

$$x = x_i(\varphi_i), \quad y = y_i(\varphi_i) \quad (i = 1, 2, 0 \leq \varphi_i \leq 2\pi).$$

Здесь индекс $i = 1$ соответствует внешнему контуру L_1 , $i = 2$ — внутреннему L_2 . Радиусы кривизн контуров L_i равны

$$R_i(\varphi_i) = L_{ia}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial \varphi_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial \varphi_i^2} - \frac{\partial y_i}{\partial \varphi_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \varphi_i^2} \right)^{-1}, \quad L_{ia}(\varphi_i) = \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial \varphi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial \varphi_i} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (i = 1, 2). \quad (1)$$

Считается, что пластина симметрична относительно оси x .

Введем две криволинейные ортогональные системы координат (ν_{1i}, ν_{2i}) , $i = 1, 2$ (см. рис. 1), связанные с декартовой системой (x, y) соотношениями

$$x = x_i(\nu_{2i}) + \frac{(-1)^i \nu_{1i} y_i'(\nu_{2i})}{L_{ia}(\nu_{2i})}, \quad y = y_i(\nu_{2i}) - \frac{(-1)^i \nu_{1i} x_i'(\nu_{2i})}{L_{ia}(\nu_{2i})}, \quad (2)$$

где $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial \nu_{2i}$. Радиусы кривизн линий $\nu_{1i} = \text{const}$, находящихся внутри пластины на расстоянии ν_{1i} от контура L_i , равны $\rho_{1i} = R_i(\nu_{2i}) + (-1)^i \nu_{1i}$. Прямые линии $\nu_{2i} = \text{const}$ перпендикулярны контуру L_i (радиус кривизны равен $\rho_{2i} = \infty$). В этом случае уравнение контура пластины L_i имеет вид $\nu_{1i} = 0$ ($0 \leq \nu_{2i} \leq 2\pi$). Элемент площади в координатах (ν_{1i}, ν_{2i}) определяется выражением $dS_i = L_{ia} [1 + (-1)^i \nu_{1i}/R_i] d\nu_{1i} d\nu_{2i}$.

В соответствии с предельной схемой деформирования круглой шарнирно опертой пластины при осесимметричном нагружении в точном решении жесткая область движется поступательно в направлении действия нагрузки, при этом возникают две шарнирные окружности, которые расположены на небольшом расстоянии друг от друга и при увеличении области нагружения практически сливаются [6]. Поскольку пластина находится на несжимаемом основании, часть ее вблизи внешнего контура движется вверх. Поэтому при

Условие, в соответствии с которым точка $(x_{ih}(\nu_{2i}), y_{ih}(\nu_{2i}))$ ($i = 1, 2$) находится на нормали к контуру L_i , имеет вид

$$x'_i(\nu_{2i})[x_{ih}(\nu_{2i}) - x_i(\nu_{2i})] + y'_i(\nu_{2i})[y_{ih}(\nu_{2i}) - y_i(\nu_{2i})] = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (9)$$

где

$$x_{1h}(\nu_{21}) = x_{2h}(\nu_{22}), \quad y_{1h}(\nu_{21}) = y_{2h}(\nu_{22}). \quad (10)$$

Таким образом, с помощью системы (3), (9), (10) можно определить положение линии l (см. (4)) в зависимости от значения D_2 . Иными словами, при заданной функции $D_2(\nu_{22})$ по значению ν_{21} из шести алгебраических уравнений (3), (9), (10) определяются шесть величин: ν_{22} , D_1 , x_{ih} , y_{ih} ($i = 1, 2$). Поэтому при дальнейшем анализе будем считать величину D_1 известной функцией от аргументов D_2 , ν_{21} .

2. Определение предельной нагрузки. Принцип виртуальной мощности для рассматриваемой пластины имеет вид [7]

$$A = N; \quad (11)$$

$$A = \iint_S (P - Q)u^* ds; \quad (12)$$

$$N = \sum_m \int_{l_m} M_m[\theta^*]_{l_m} dl_m + M_0 \iint_S (|\varkappa_1^*| + |\varkappa_2^*|) ds. \quad (13)$$

Здесь A , N — мощность внешних и внутренних сил соответственно; Q — равномерно действующая сила сопротивления основания; S — площадь пластины; u — скорость прогиба; ds — элемент площади; m — количество линий разрыва поля скоростей; l_m — линии разрыва угловых скоростей поворота включая контур пластины; $[\theta]_{l_m}$, M_m — разрыв угловой скорости и изгибающий момент на линии l_m ; dl_m — элемент линии l_m ; \varkappa_1 , \varkappa_2 — главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины. Верхний индекс “*” обозначает допустимые скорости.

Условие несжимаемости основания имеет вид

$$\iint_S u^* ds = 0. \quad (14)$$

С учетом (14) выражение (12) для A принимает вид

$$A = P \iint_{Z_p} u^* ds - Q \iint_S u^* ds = P \iint_{Z_p} u^* ds = Pw_0 S_p, \quad (15)$$

где S_p — площадь жесткой области Z_p .

Мощность внутренних сил (13) можно представить в виде суммы

$$N = \sum_{j=1}^5 N_j, \quad (16)$$

где N_1 , N_2 , N_3 , N_4 , N_5 — мощность внутренних сил на линиях L_1 , L_2 , l и внутри областей Z_1 , Z_2 соответственно:

$$N_1 = (1 - \eta)M_0 \oint_{L_1} [\theta^*]_{L_1} dL_1, \quad N_2 = M_0 \oint_{L_2} [\theta^*]_{L_2} dL_2;$$

$$N_3 = M_0 \int_l [\theta^*]_l dl; \quad (17)$$

$$N_4 = M_0 \iint_{Z_1} (|\varkappa_1^*|_1 + |\varkappa_2^*|_1) dS_1, \quad N_5 = M_0 \iint_{Z_2} (|\varkappa_1^*|_2 + |\varkappa_2^*|_2) dS_2.$$

Так как разрыв $[\theta^*]_{L_i}$ угловой скорости на контуре L_i ($i = 1, 2$) равен скорости α_i угла поворота плоскости пластины вокруг L_i , а главные кривизны $(\varkappa_1)_i$, $(\varkappa_2)_i$ в областях Z_i равны

$$(\varkappa_1)_i = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu_{1i}^2} = 0, \quad (\varkappa_2)_1 = \frac{1}{\rho_{11}} \frac{\partial u}{\partial \nu_{11}} = \frac{-\alpha_1}{R_1 - \nu_{11}}, \quad (\varkappa_2)_2 = \frac{1}{\rho_{12}} \frac{\partial u}{\partial \nu_{12}} = \frac{-\alpha_2}{R_2 + \nu_{12}},$$

то, учитывая (8) и выражение $\int_0^{2\pi} \frac{L_{ia}}{R_i} d\nu_{2i} = 2\pi$ ($i = 1, 2$) [5], получаем

$$N_1 = (1 - \eta) M_0 \int_0^{2\pi} \alpha_1 L_{1a} d\nu_{21} = (1 - \eta) M_0 w_1 \int_0^{2\pi} \frac{L_{1a}}{D_1} d\nu_{21},$$

$$N_2 = M_0 \int_0^{2\pi} \alpha_2 L_{2a} d\nu_{22} = M_0 w_2 \int_0^{2\pi} \frac{L_{2a}}{D_2} d\nu_{22},$$

$$N_4 = M_0 \iint_{Z_1} \frac{\alpha_1 L_{1a}}{R_1 - \nu_{11}} \left(1 - \frac{\nu_{11}}{R_1}\right) d\nu_{11} d\nu_{21} = M_0 w_1 \int_0^{2\pi} \frac{L_{1a}}{R_1} d\nu_{21} = 2\pi M_0 w_1,$$

$$N_5 = M_0 \iint_{Z_2} \frac{\alpha_2 L_{2a}}{R_2 - \nu_{12}} \left(1 - \frac{\nu_{12}}{R_2}\right) d\nu_{12} d\nu_{22} = M_0 w_2 \int_0^{2\pi} \frac{L_{2a}}{R_2} d\nu_{22} = 2\pi M_0 w_2.$$

Мощность внутренних сил на линии l (17) вычисляется так же, как в работе [8]:

$$\begin{aligned} N_3 &= M_0 \left[\int_0^{2\pi} \alpha_1 L_{1a} \left(1 - \frac{D_1}{R_1}\right) d\nu_{21} + \int_0^{2\pi} \alpha_2 L_{2a} \left(1 + \frac{D_2}{R_2}\right) d\nu_{22} \right] = \\ &= M_0 \left[w_1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{L_{1a}}{D_1} d\nu_{21} - 2\pi \right) + w_2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{L_{2a}}{D_2} d\nu_{22} + 2\pi \right) \right]. \end{aligned}$$

Тогда полная мощность внутренних сил (16) равна

$$N = M_0 \left[(2 - \eta) \int_0^{2\pi} \alpha_1 L_{1a} d\nu_{21} + 2 \int_0^{2\pi} \alpha_2 L_{2a} \left(1 + \frac{D_2}{R_2}\right) d\nu_{22} \right]. \quad (18)$$

Подставляя выражения (15), (18) в (11), получаем равенство

$$Pw_0S_p = M_0 \left[(2 - \eta) w_1 \int_0^{2\pi} \frac{L_{1a}}{D_1} d\nu_{21} + 2 w_2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{L_{2a}}{D_2} d\nu_{22} + 2\pi \right) \right]. \quad (19)$$

С учетом (5), (7), (8) из условия несжимаемости основания (15) следует соотношение

$$w_0 = w_2 \frac{\int_0^{2\pi} L_{1a} D_1 \left(3 - \frac{2D_1}{R_1}\right) d\nu_{21} + \int_0^{2\pi} L_{2a} D_2 \left(3 + \frac{2D_2}{R_2}\right) d\nu_{22}}{6S_p + \int_0^{2\pi} L_{1a} D_1 \left(3 - \frac{2D_1}{R_1}\right) d\nu_{21} + 3 \int_0^{2\pi} L_{2a} D_2 \left(2 + \frac{D_2}{R_2}\right) d\nu_{22}}. \quad (20)$$

Из (7), (19), (20) получаем равенство

$$P = \frac{M_0/S_p}{\int_0^{2\pi} L_{1a} D_1 \left(3 - \frac{2D_1}{R_1}\right) d\nu_{21} + \int_0^{2\pi} L_{2a} D_2 \left(3 + \frac{2D_2}{R_2}\right) d\nu_{22}} \times \\ \times \left\{ (2 - \eta) \left[6S_p + \int_0^{2\pi} L_{2a} D_2 \left(3 + \frac{D_2}{R_2}\right) d\nu_{22} \right] \int_0^{2\pi} \frac{L_{1a}}{D_1} d\nu_{21} + \right. \\ \left. + 2 \left[6S_p + \int_0^{2\pi} L_{1a} D_1 \left(3 - \frac{2D_1}{R_1}\right) d\nu_{21} + 3 \int_0^{2\pi} L_{2a} D_2 \left(2 + \frac{D_2}{R_2}\right) d\nu_{22} \right] \left(\int_0^{2\pi} \frac{L_{2a}}{D_2} d\nu_{22} + 2\pi \right) \right\}. \quad (21)$$

Поскольку D_1 — известная функция аргументов ν_{21} , D_2 , нагрузка P в выражении (20) является функцией только аргумента D_2 . Пусть

$$D_2 = d_2 \psi(\nu_{22}), \quad (22)$$

где $\psi(\nu_{22})$ — заданная функция; коэффициент d_2 не зависит от ν_{22} . Тогда (21) принимает вид

$$P(d_2) = \frac{M_0/S_p}{\int_0^{2\pi} L_{1a} D_1 \left(3 - \frac{2D_1}{R_1}\right) d\nu_{21} + d_2 \left(3 \int_0^{2\pi} L_{2a} \psi d\nu_{22} + 2d_2 \int_0^{2\pi} \frac{L_{2a} \psi^2}{R_2} d\nu_{22} \right)} \times \\ \times \left\{ (2 - \eta) \left[6S_p + d_2 \left(3 \int_0^{2\pi} L_{2a} \psi d\nu_{22} + d_2 \int_0^{2\pi} \frac{L_{2a} \psi^2}{R_2} d\nu_{22} \right) \right] \int_0^{2\pi} \frac{L_{1a}}{D_1} d\nu_{21} + \right. \\ \left. + 2 \left[6S_p + \int_0^{2\pi} L_{1a} D_1 \left(3 - \frac{2D_1}{R_1}\right) d\nu_{21} + 3d_2 \left(2 \int_0^{2\pi} L_{2a} \psi d\nu_{22} + d_2 \int_0^{2\pi} \frac{L_{2a} \psi^2}{R_2} d\nu_{22} \right) \right] \right\} \times \\ \times \left(\frac{1}{d_2} \int_0^{2\pi} \frac{L_{2a}}{\psi} d\nu_{22} + 2\pi \right), \quad (23)$$

а предельная нагрузка определяется как $P_0 = \min_{d_2} P(d_2)$.

Функции $\psi(\nu_{22})$ выбираются в зависимости от конкретных форм обоих контуров L_1 и L_2 с использованием свободных параметров. Для разных функций $\psi(\nu_{22})$ имеют место разные схемы предельного деформирования рассматриваемой пластины с различными предельными нагрузками P_{0i} . Поэтому предельную нагрузку определим по формуле $P_0 = \min P_{0i}$, где минимизация осуществляется по выбранным свободным параметрам.

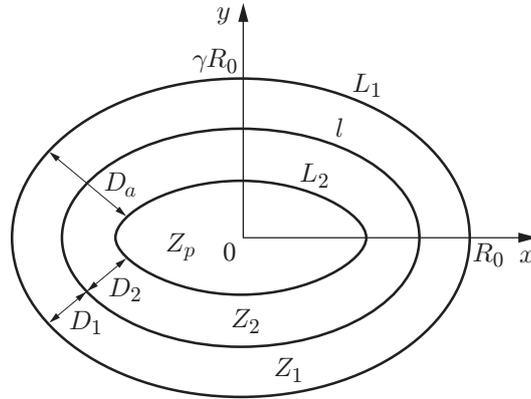


Рис. 3. Схема пластины с контуром в форме эллипса

3. Пример. В качестве примера рассмотрим эллиптическую пластину с полуосями длиной R_0 и γR_0 , нагруженную по жесткой овальной области с контуром L_2 , находящимся на постоянном расстоянии D_a от контура L_1 , где $0 < \gamma \leq 1$, $D_a < \gamma^2 R_0$ (рис. 3). Параметрические уравнения контура L_1 имеют вид $x_1 = R_0 \cos \varphi$, $y_1 = \gamma R_0 \sin \varphi$, поэтому выражения (1) записываются в виде

$$R_1(\varphi) = L_{1a}^3(\varphi)/(\gamma R_0^2), \quad L_{1a}(\varphi) = R_0 \sqrt{\sin^2 \varphi + \gamma^2 \cos^2 \varphi}.$$

В этом случае координатами (ν_{11}, ν_{21}) являются координаты (ν_1, φ) , а соотношения (2) записываются в виде

$$x = R_0 \cos \varphi [1 - \nu_1 \gamma / L_{1a}(\varphi)], \quad y = \gamma R_0 \sin \varphi [\gamma - \nu_1 / L_{1a}(\varphi)].$$

Уравнение контура L_1 в координатах (ν_1, φ) имеет вид $\nu_1 = 0$, а уравнение контура L_2 — $\nu_1 = D_a$. Также справедливы соотношения $R_2(\varphi) = R_1(\varphi) - D_a$, $L_{2a}(\varphi) = L_{1a}(\varphi)[1 - D_a/R_1(\varphi)]$. С учетом приближенной формулы для длины контура эллипса L_1 [9]

$$\int_0^{2\pi} L_{1a} d\varphi \approx 2\pi R_0 \Omega, \quad \Omega = \frac{3(1 + \gamma) - 2\sqrt{\gamma}}{4} \quad (\Omega \leq 1)$$

площадь жесткой области равна

$$S_p = \gamma \pi R_0^2 + \pi D_a^2 - D_a \int_0^{2\pi} L_{1a} d\varphi \approx \pi R_0^2 \left[\gamma + \left(\frac{D_a}{R_0} \right)^2 - 2\Omega \frac{D_a}{R_0} \right].$$

Для рассматриваемой пластины $D_1 + D_2 = D_a$, поэтому в (22) можно принять $\psi \equiv 1$. В этом случае величины D_1, D_2 не зависят от параметра φ . Выражение (23) принимает вид

$$P(D_2) = \frac{M_0 \pi}{S_p} \frac{a_0 + a_1 D_2 + a_2 D_2^2 + a_3 D_2^3 + a_4 D_2^4}{b_1 D_2 + b_2 D_2^2 + b_3 D_2^3}, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= 4D_a(R_0\Omega - D_a)[3S_p/\pi + D_a(3R_0\Omega - 2D_a)], \\ a_1 &= 2[3S_p(4D_a - \eta R_0\Omega)/\pi + 2D_a^2(3R_0\Omega - 2D_a)], \\ a_2 &= -6[2S_p/\pi - (R_0\Omega - D_a)(2D_a - \eta R_0\Omega)], \quad a_3 = 2[8D_a - \eta R_0\Omega(6 + \eta)], \quad a_4 = -4, \\ b_1 &= D_a^2(3R_0\Omega - 2D_a), \quad b_2 = -3D_a(R_0\Omega - D_a), \quad b_3 = -D_a. \end{aligned}$$

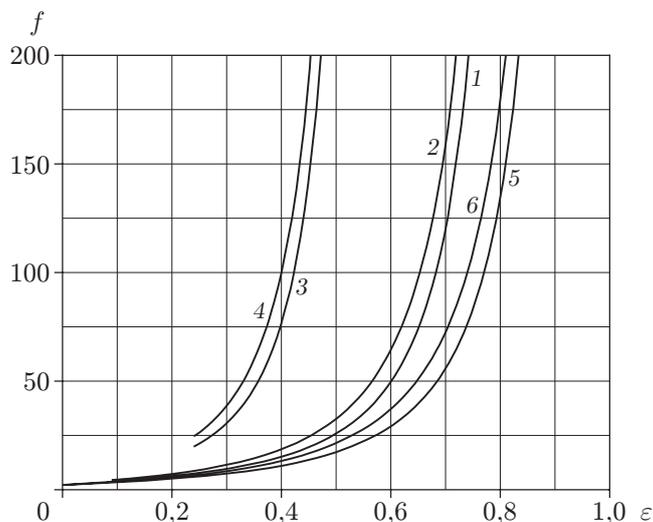


Рис. 4. Зависимость безразмерной полной предельной нагрузки $f = P_0 S_p / (6M_0)$ от величины $\varepsilon = \gamma - D_a/R_0$ для эллиптической пластины:

1, 3, 5 — свободное опирание контура ($\eta = 1$), 2, 4, 6 — защемление контура ($\eta = 0$);
1, 2 — $\gamma = 0,9$, 3, 4 — $\gamma = 0,6$, 5, 6 — $\gamma = 1$ (пластина круглой формы)

Так как $\Omega \leq 1$ при $0 < \gamma \leq 1$ и $D_a \leq 1$, то $b_2^2 - 4b_1b_3 \geq 0$. Обозначим через $D_* = -(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_1b_3}) / (2b_3)$ ($0 < D_* < 1$) значение D , при котором знаменатель в выражении (24) обращается в нуль. Из результатов анализа выражения (24) следует, что в интервале $0 < D < D_*$ функция $P(D_2)$ имеет единственный минимум при $D_2 = D_0$. Значение D_0 определяется из условия $(\partial P / \partial D_2)|_{D_2=D_0} = 0$ и удовлетворяет уравнению

$$D_0(4a_4D_0^3 + 3a_3D_0^2 + 2a_2D_0 + a_1)(b_3D_0^2 + b_2D_0 + b_1) = \\ = (a_0 + a_1D_0 + a_2D_0^2 + a_3D_0^3 + a_4D_0^4)(3b_3D_0^2 + 2b_2D_0 + b_1).$$

Тогда $P_0 = P(D_0)$.

Произведение $P_0 S_p$ представляет собой полную (суммарную) предельную нагрузку, поскольку P_0 является нагрузкой, равномерно распределенной по жесткой криволинейной области площадью S_p [3]. На рис. 4 приведена зависимость безразмерной полной предельной нагрузки $f = P_0 S_p / (6M_0)$ от величины $\varepsilon = \gamma - D_a/R_0$. В случае круглой пластины при $\varepsilon = 0,1$ безразмерная полная предельная нагрузка f на 5 % больше значения f , полученного на основе точного решения, построенного в [6]. При $\varepsilon = 0,5$ различие составляет 3 %; при $\varepsilon > 0,6$ результаты предлагаемого приближенного расчета практически совпадают с точным решением.

Предлагаемая методика позволяет рассчитать несущую способность усиленных криволинейных ледяных площадок на несжимаемом основании и оценить степень ее возможного увеличения при увеличении нагружаемой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бычковский Н. Н.** Ледовые строительные площадки, дороги и переправы / Н. Н. Бычковский, Ю. А. Гурьянов. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2005.
2. **Вербук Н. Ф., Герасимов А. И., Попов С. Н.** Усиление несущей способности ледовых переправ и болотистых грунтов // Безопасность жизнедеятельности. 2010. № 6. С. 21–25.

3. **Hodge P. G., Chang-Kuei Sun.** Yield-point load of a circular plate sealing an incompressible fluid // Intern. J. Mech. Sci. 1967. V. 9, N 7. P. 405–414.
4. **Керр А. Д.** Изгиб круговых пластинок, ограниченных несжимаемой жидкостью // Прикл. механика. Сер. Е. 1965. Т. 32, № 3. С. 264–266.
5. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Несущая способность ледяных пластин произвольного контура, нагружаемых по произвольной области // Тр. 5-го Евраз. симп. по проблемам прочности материалов и машин для регионов холодного климата, Якутск, 1–5 июня 2010 г. Якутск: Ин-т физ.-техн. пробл. Севера СО РАН, 2010. С. 81–91.
6. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Несущая способность усиленных ледяных пластин // Пробл. прочности и пластичности. 2011. Вып. 73. С. 25–35.
7. **Ерхов М. И.** Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978.
8. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Моделирование динамического деформирования жесткопластических двусвязных пластин с произвольными закрепленными криволинейными контурами на вязкоупругом основании // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 2. С. 156–172.
9. **Бронштейн И. Н.** Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. М.: Наука, 1986. С. 202.

*Поступила в редакцию 10/V 2012 г.,
в окончательном варианте — 8/XI 2012 г.*
