

УДК 539.3 : 620.17.254

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВНЕДРЕНИЮ УДАРНИКОВ В ПЕСЧАНЫЙ ГРУНТ

В. Л. Котов, В. В. Баландин, А. М. Брагов,
Е. Ю. Линник, В. В. Баландин

Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород
E-mail: vkotov@inbox.ru

Экспериментально и теоретически исследуется модель локального взаимодействия, описывающая процесс внедрения осесимметричных ударников в песчаный грунт с постоянной скоростью. Рассмотрены два подхода к определению параметров квадратичной модели локального взаимодействия. Первый подход основан на использовании решения задачи о расширении сферической полости с учетом динамической сжимаемости и сопротивления сдвигу грунтовой среды. Во втором подходе параметры модели определяются на основе экспериментальной зависимости силы сопротивления внедрению конических ударников в песчаный грунт от скорости удара. Показано, что результаты экспериментов, двумерных численных расчетов и расчетов по модели локального взаимодействия, основанной на решении задачи о расширении сферической полости и используемой для определения максимума силы сопротивления при внедрении конических и сферических ударников, хорошо согласуются.

Ключевые слова: квадратичная модель локального взаимодействия, трение, конический ударник, сила сопротивления внедрению, проникание, песчаный грунт, модель Григоряна, ударная адиабата, расширение сферической полости.

Введение. Многообразие природных грунтов и недостаточное количество экспериментальных данных обусловили развитие упрощенных подходов [1–3] к моделированию нестационарных процессов проникания в грунтовые среды. В частности, методы локального взаимодействия, получившие развитие в задачах аэродинамики [4, 5], находят применение при исследовании движения тел в плотных средах [6–11]. Согласно гипотезе локального взаимодействия, предложенной И. Ньютоном, местный коэффициент давления зависит только от ориентации элемента тела и не зависит от формы участков тела, расположенных перед этим элементом [4]. Таким образом, характеристики движения тела (сопротивление, глубина проникания) определяются его геометрией. Однако область применимости этой идеализированной модели течения исследована недостаточно. Анализ современных физических и математических моделей движения ударников в грунтовых средах [11] показывает, что большинство существующих методов оценки параметров моделей локального

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашения 14.В37.21.1137, 14.132.21.1361), Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2843.2012.8), а также Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 13-08-00531-а, 12-05-1075-а, 12-08-33106-мол.а-вед, 12-01-00805-а).

© Котов В. Л., Баландин В. В., Брагов А. М., Линник Е. Ю., Баландин В. В., 2013

взаимодействия основано на использовании гипотезы несжимаемости среды [6, 12, 13]. Методы, учитывающие нелинейные свойства грунта и применяемые при расчете параметров проникания тел в мягкий грунт, в настоящее время развиты недостаточно.

В данной работе параметры квадратичной модели локального взаимодействия определяются на основе решения задачи о расширении сферической полости с учетом динамической сжимаемости и сопротивления сдвигу грунтовой среды, а также зависимости силы сопротивления внедрению конических ударников от скорости удара, полученной в экспериментах.

1. Постановка задачи проникания в мягкий грунт. В цилиндрической системе координат rOz (Oz — ось симметрии) математическая модель динамического деформирования грунтовой среды Григоряна [14] формируется в виде системы дифференциальных уравнений, содержащей законы сохранения массы, импульса и максимальной плотности, достигнутой в процессе активного нагружения грунта, а также уравнения теории пластического течения с условием пластичности Мизеса:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho(u_{r,r} + u_{z,z}) &= -\frac{\rho u_r}{r}, & \rho \frac{du_r}{dt} - \sigma_{rr,r} - \sigma_{rz,z} &= \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}, \\ \rho \frac{du_z}{dt} - \sigma_{rz,r} - \sigma_{zz,z} &= \frac{\sigma_{rz}}{r}, & \frac{d\rho_*}{dt} &= \frac{d\rho}{dt} H(\rho - \rho_*) H\left(\frac{d\rho}{dt}\right), \\ D_J s_{ij} + \lambda s_{ij} &= 2G e_{ij} \quad (i, j = r, z), & s_{ij} s_{ij} &\leq \frac{2}{3} \sigma_T^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t — время; ρ, ρ_* — текущая и максимальная плотности, достигнутые в процессе нагружения; $u_i, \sigma_{ij}, s_{ij}, e_{ij}$ — компоненты вектора скорости, тензора напряжений Коши и девиаторов тензоров напряжений и скоростей деформаций соответственно; H — функция Хевисайда; D_J — производная Яумана; d/dt — полная производная по времени; G — модуль сдвига; σ_T — предел текучести; по повторяющимся индексам проводится суммирование; $\lambda = 0$ в случае упругого деформирования, $\lambda > 0$ в случае реализации условия пластичности.

Система дифференциальных уравнений (1) замыкается конечными соотношениями, определяющими давление p и условие пластичности грунтовой среды:

$$p = f_1(\rho, \rho_*) H(\rho_* - \rho) H(\rho_0 - \rho), \quad \sigma_T = f_2(p). \quad (2)$$

Здесь ρ_0 — начальная плотность.

Система уравнений (1), (2) динамического деформирования грунтовой среды дополняется начальными и краевыми условиями. Как показывают эксперименты [1, 3, 15], в процессе проникания затупленных (в частности, сферических) тел при скорости удара более 100 м/с происходит разрушение частиц песка. Затем раздробленные частицы песка компактируются на головной части ударников, образуя присоединенный конус. Следы взаимодействия грунта с цилиндрической поверхностью ударника и примыкающей к ней частью полусферы отсутствуют, что свидетельствует о кавитационном характере процесса обтекания используемых ударников сухим песком. Поэтому в расчетах используется алгоритм, в котором выполняются условия “непроницаемости” ударника в направлении нормали и скольжения частиц по касательной с сухим трением в соответствии со смешанной моделью трения [16]

$$u'_s = u''_s, \quad q'_s = -q''_s, \quad q_s = q'_s = \begin{cases} q_s, & |q_s| \leq k_{\text{ТР}} |q_\xi|, \\ k_{\text{ТР}} |q_\xi| \text{ sign}(q_s), & |q_s| > k_{\text{ТР}} |q_\xi|, \end{cases} \quad (3)$$

где u_α, q_α — компоненты векторов скорости перемещений и контактного давления в местном координатном базисе ($\alpha = s, \xi$); s, ξ — направления касательной и нормали; $k_{\text{ТР}}$ —

коэффициент трения скольжения; штрихи обозначают соответствующие величины по разные стороны от поверхности контакта ударник — грунт.

На головной части ударника, контактирующей с грунтовой средой, принималось условие (3), на свободных поверхностях грунта и ударника нормальные и касательные напряжения задавались равными нулю. Внешние границы расчетной области грунта считались жесткими и соответствовали геометрии контейнера, используемого в эксперименте [17–19]. В начальный момент времени напряжения и скорость частиц грунта равны нулю. Ударник считался жестким, движущимся с постоянной скоростью, равной скорости удара.

Уравнения (1), (2) решались численно с использованием методики [20, 21], основанной на модифицированной схеме Годунова и реализованной в пакете прикладных программ “Динамика-2” [22]. Результаты проведенных ранее численных расчетов процессов удара и проникания осесимметричных ударников в мягкие грунтовые среды [3, 18, 23, 24] хорошо согласуются с экспериментальными данными, что свидетельствует о достоверности выбранной модели грунта [14] и эффективности применяемых математического аппарата и численного метода.

2. Уравнение состояния песчаного грунта. Конкретизируем вид функций f_1 и f_2 в модели грунтовой среды Григоряна (1), (2). Сжимаемость грунта характеризуется ударной адиабатой, описываемой линейной зависимостью [25, 26] скорости ударной волны c от массовой скорости v за ее фронтом:

$$c = A + \lambda v. \quad (4)$$

Здесь значение константы A приближенно равно значению скорости распространения плоской волны сжатия в грунте при малых давлениях; величина λ характеризует предельную сжимаемость грунта.

Из зависимости (4) и условий Гюгонио для ударной волны следует известная связь напряжения σ (считается, что при сжатии $\sigma > 0$) и объемной деформации θ [25]

$$\sigma(\theta) = \frac{\rho_0 A^2 \theta}{(1 - \lambda \theta)^2}, \quad \theta = 1 - \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (5)$$

Зависимость (5) справедлива в условиях одноосного деформирования, реализующегося в плосковолновых экспериментах.

Соппротивление среды сдвигу определяется дробно-рациональной зависимостью [27] предела текучести от давления

$$f_2(p) \equiv \sigma_0 + \frac{kp}{1 + kp/\Delta\sigma}, \quad \Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_0, \quad (6)$$

где σ_0 , σ_{\max} — сцепление и предельное значение предела текучести; коэффициент k характеризует внутреннее трение грунта.

В области пластического течения напряжение определяется по формуле $\sigma = p + (2/3)f_2(p)$. Таким образом, с учетом (6) для определения давления имеем квадратное уравнение

$$kp^2 + a_1 p + a_0 = 0, \quad (7)$$

где

$$a_1 = (1 + 2k/3) \Delta\sigma + (2\sigma_0/3 - \sigma)/k, \quad a_0 = (2\sigma_0/3 - \sigma) \Delta\sigma.$$

С помощью соотношения (7) можно получить значения давлений, соответствующие известным напряжениям (5) и условию текучести (6), в свою очередь зависящему от давления. Преобразование (7) к виду, аналогичному (4), с помощью формул

$$u_p = \sqrt{p\theta/\rho_0}, \quad c_p = u_p/\theta \quad (8)$$

и последующая линейная аппроксимация зависимости $c_p(u_p)$

$$c_p = a + bu_p \quad (9)$$

позволяют использовать функцию вида (5), описывающую ударную адиабату, для описания зависимости давления от объемной деформации:

$$p = f_1(\theta) \equiv \rho_0 a^2 \theta / (1 - b\theta)^2. \quad (10)$$

Неизвестные параметры a , b в (9), (10) определяются методом наименьших квадратов.

3. Модель локального взаимодействия. В основе моделей локального взаимодействия лежит предположение, что каждый элемент поверхности тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела. Нормальное напряжение на поверхности контакта определяется ориентацией элементарной площадки поверхности тела относительно направления скорости невозмущенного потока среды. Как правило, нормальное напряжение представляется в виде квадратичной зависимости

$$\sigma_n / \rho_0 = \alpha u^2 + \beta u + \gamma, \quad (11)$$

где u — нормальная компонента вектора скорости внедрения; α , β , γ — постоянные коэффициенты, зависящие от физико-механических свойств среды, формы ударника и других составляющих. Для определения напряжений, действующих на поверхности контакта тела и среды, обычно используется двучленная ($\beta = 0$) модель взаимодействия [5, 7, 8, 11, 13], содержащая динамическую составляющую, зависящую от квадрата скорости, и постоянное слагаемое, характеризующее прочность среды. В случае песчаных грунтов значение коэффициента γ мало ($\gamma \approx 0$), но влияние внутреннего трения является существенным [2, 3].

Касательные напряжения на поверхности движущегося в среде тела определим в соответствии с моделью трения Кулона

$$\sigma_\tau = k_{\text{тр}} \sigma_n. \quad (12)$$

Для определения параметров α , β модели локального взаимодействия (11) в соответствии с известным подходом [6, 9–13] используем решение задачи о расширении сферической полости. В отличие от большинства решений, приведенных в работах, в которых среда предполагается несжимаемой, аналитическое решение [28, 29], полученное в предположении несжимаемости среды за фронтом ударной волны, учитывает динамическую сжимаемость и сопротивление сдвигу грунта в рамках модели Григоряна.

При рассмотрении одномерной задачи о расширении сферической полости из точки в безграничной среде [6, 9, 10] будем считать, что граница полости и поверхность раздела пластической и упругой зон перемещаются со скоростями u , c соответственно. Движение грунтовой среды в области пластического течения описывается уравнениями неразрывности и изменения количества движения, которые следуют из общих уравнений (1) и в эйлеровых переменных в случае сферической симметрии имеют вид

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + 2 \frac{u_r}{r} \right) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_r \frac{\partial \rho}{\partial r}, \quad \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = - \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right), \quad (13)$$

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = f_2(\theta).$$

Здесь радиальная компонента σ_{rr} тензора напряжений Коши, которая при сжатии считается положительной, определяется уравнениями ударной адиабаты (4), (5); функция f_2 в условии пластичности задается в соответствии с (6).

На границе расширяющейся полости радиусом R_0 задается скорость u , внешняя поверхность сферического слоя R_∞ свободна от напряжений [6]:

$$u_r|_{r=R_0} = u, \quad \sigma_{rr}|_{r=R_\infty} = 0, \quad R_0|_{t=0} = 0.$$

Следуя [10], введем безразмерные переменные

$$U = u_r/c, \quad \xi = r/(ct).$$

Подставляя безразмерные переменные в систему уравнений (13), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных U и θ :

$$U' + 2 \frac{U}{\xi} = \frac{\xi - U}{1 - \theta} \theta', \quad \tilde{K} \theta' + 2 \frac{\tilde{f}_2(\theta)}{\xi} = \frac{\xi - U}{1 - \theta} U'. \quad (14)$$

Здесь $\tilde{K} = (\rho_0 c^2)^{-1} \partial \sigma_{rr} / \partial \theta$; $\tilde{f}_2(\theta) = f_2(\theta) / (\rho_0 c^2)$; штрих обозначает дифференцирование по ξ .

При $c/A < 1$ и $\xi = 1$ в качестве граничного условия используется решение задачи теории упругости [9, 30], а при $c/A > 1$ (в случае сверхзвукового движения) применяются соотношения Гюгонио на ударной волне

$$U|_{\xi=1} = \theta|_{\xi=1} = \vartheta, \quad (15)$$

где ϑ определяется из решения уравнения $\sigma_{rr}(\vartheta) = \rho_0 c^2 \vartheta$. Значения предела текучести $\tilde{f}_2(\theta)$ вычисляются на основе (5)–(7).

Краевая задача для нелинейной системы (14), (15) при изменении ξ от единицы (граница области пластического течения) до значения $\varepsilon = u/c$ (граница полости) решалась с использованием метода стрельбы и метода Рунге — Кутты четвертого порядка точности, в котором неизвестная скорость c определялась итерационно [28–30], до тех пор пока не было выполнено условие

$$U|_{\xi=\varepsilon} = \varepsilon \quad (16)$$

с заданной точностью $|U - \varepsilon| \leq 0,0001$.

При больших скоростях расширения полости и высоких давлениях величина θ меняется незначительно. В [9–11, 28–32] получено приближенное решение рассматриваемой задачи в предположении несжимаемости среды: $\partial \theta / \partial \xi = 0$. С учетом этого предположения система (14) относительно безразмерных скорости U и напряжения $S = \sigma_{rr} / (\rho_{UV} c^2)$ (ρ_{UV} — плотность в ударной волне) имеет вид

$$U' + 2U/\xi = 0, \quad S' + 2\tilde{f}_2/\xi = (\xi - U)U'. \quad (17)$$

С учетом (4) граничные условия записываются в виде

$$U|_{\xi=1} = \frac{1 - A/c}{\lambda}, \quad S|_{\xi=1} = U - U^2, \quad U|_{\xi=\varepsilon} = \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{u}{c}.$$

При решении задачи о расширении полости условие несжимаемости среды использовалось и ранее [31, 32], в частности в качестве нулевого приближения [9, 10, 30]. В данной работе, в отличие от опубликованных ранее, вводится предположение о несжимаемости среды за фронтом ударной волны. Таким образом, постоянная ρ_{UV} определяется при текущих значениях скорости u расширения полости.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (17) разделяется на два независимых уравнения. Решение первого уравнения с учетом граничного условия (16) записывается в виде $U = \varepsilon^3 / \xi^2$. Решение второго уравнения определяется выбранным условием пластичности (6) и при линейной зависимости предела текучести от давления (напряжения) $f_2(p) \equiv \sigma_0 + kp$ может быть получено аналитически [28, 29]. В этом случае напряжение на границе полости, расширяющейся со скоростью u , определяется выражениями

$$\sigma = \sigma_\tau + \rho_{UV} u^2 C,$$

$$\sigma_{\tau} = \begin{cases} -2\sigma_0 \ln \varepsilon, & \mu = 0, \\ -2\sigma_0(1 - \varepsilon^{-1}), & \mu = 0,5, \\ -\sigma_0(1 - \varepsilon^{-2\mu})/\mu, & \mu \neq 0, \mu \neq 0,5, \end{cases} \quad (18)$$

$$C = \begin{cases} \frac{3}{2} - \varepsilon - \frac{\varepsilon^4}{2}, & \mu = 0, \\ \frac{1}{3} - 2 \ln \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3}, & \mu = 0,5, \\ \frac{3}{(\mu - 2)(2\mu - 1)} + \frac{2\mu + 1}{2\mu - 1} \varepsilon^{1-2\mu} - \frac{\mu - 1}{\mu - 2} \varepsilon^{4-2\mu}, & \mu \neq 0, \mu \neq 0,5; \end{cases}$$

$$\rho_{УВ} = \rho_0/(1 - \varepsilon^3), \quad c = \lambda^{1/3}u + A/3. \quad (19)$$

Здесь $\mu = k/(1 + 2k/3)$ — постоянный коэффициент внутреннего трения в зависимости предела текучести от напряжения.

Проведенное в работах [28, 29] сравнение результатов расчетов по формулам (18), (19) с результатами численных расчетов напряжения σ на границе полости показало, что в допустимых согласно [33] диапазонах значений коэффициента внутреннего трения грунта $0 \leq k \leq 1,5$ и скоростей расширения полости $u \geq A/3$ погрешность не превышает 5 % и с увеличением скорости уменьшается.

Ниже приведены результаты расчетов расширения полости в песчаном грунте. Входящие в уравнение ударной адиабаты (4) параметры $A = 455$ м/с, $\lambda = 2,3$, $\rho_0 = 1720$ кг/м³, соответствующие сухой песчаной смеси, получены с использованием экспериментальных данных [26] в диапазоне скоростей $50 \div 350$ м/с. В [18] с использованием экспериментально-расчетного метода [34] для такого же грунта получены следующие значения параметров в условии текучести (6): $\sigma_0 = 0,01$ МПа, $k = 1,14$, $\sigma_{\max} = 275$ МПа. По формулам (7)–(10) определены значения параметров a , b : $a = 343$ м/с, $b = 2,5$.

На рис. 1, 2 приведены зависимости безразмерного напряжения на границе полости и скорости пластической волны от скорости расширения полости, отнесенной к $A/3$. Светлые точки соответствуют численному решению краевой задачи (14)–(16) с использованием граничного условия [9, 30], темные точки — решению при $c/A > 1$ с учетом возникновения ударной волны [12]. При значениях скорости $u \approx A/3$ указанные решения практически совпадают. Сплошные линии на рис. 1 соответствуют аналитическому решению (18) при значениях коэффициента внутреннего трения $k = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$. Сплошной линией на рис. 2 показана линейная зависимость (19) скорости пластической ударной волны от скорости расширения полости.

Следует отметить, что при $u \geq A/3$ напряжения определяются квадратичной зависимостью $\sigma/\rho_0 = (\alpha u + \beta)u$, при меньших скоростях зависимость имеет более сложный характер. Для использования полученных результатов в модели локального взаимодействия необходимо скорость расширения полости u в формулах (18), (19) принять равной нормальной компоненте вектора скорости в модели (11). Параметры модели определялись в результате аппроксимации аналитического решения (18) методом наименьших квадратов. В диапазоне скоростей расширения полости $u = 40 \div 250$ м/с получены значения параметров модели $\alpha = 1,2$, $\beta = 190$ м/с, при $u = 200 \div 1000$ м/с — значения $\alpha = 0,9$, $\beta = 260$ м/с.

4. Определение параметров модели локального взаимодействия по экспериментальным данным. Альтернативный способ определения параметров модели локального взаимодействия основан на использовании экспериментальной зависимости силы сопротивления внедрению конических ударников от скорости удара. В ходе таких экспе-

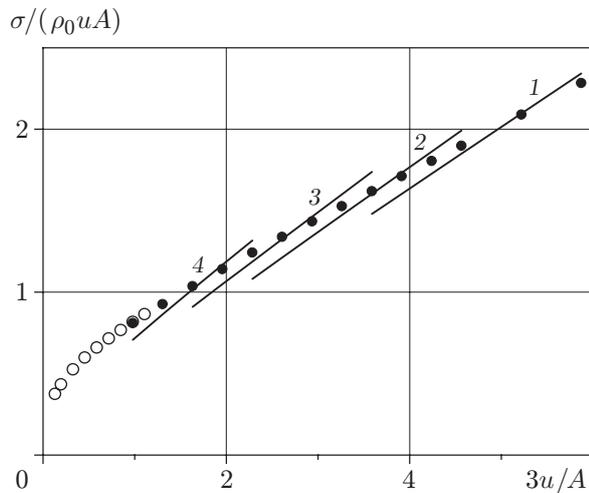


Рис. 1

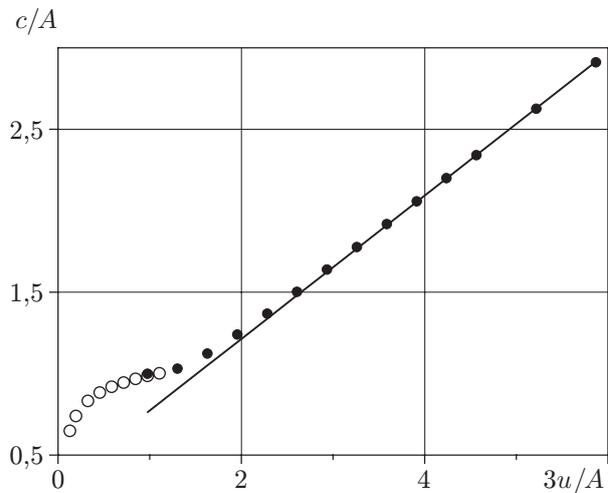


Рис. 2

Рис. 1. Зависимость безразмерного напряжения на границе полости от скорости расширения полости, отнесенной к $A/3$:

1–4 — аналитическое решение (18) (1 — $k = 0,2$, 2 — $k = 0,3$, 3 — $k = 0,4$, 4 — $k = 0,5$); светлые точки — численное решение краевой задачи (14)–(16), темные — решение при $c/A > 1$ с учетом возникновения ударной волны

Рис. 2. Зависимость скорости пластической волны от скорости расширения полости, отнесенной к $A/3$:

сплошная линия — линейная зависимость (19); остальные обозначения те же, что на рис. 1

риментов определяются максимальные значения силы сопротивления внедрению со скоростью, близкой к постоянной и равной скорости удара.

На рис. 3 представлены полученные в экспериментах [15, 19] безразмерные зависимости максимума силы сопротивления от скорости удара (величина F отнесена к $F_0 = \rho_0 V_0 A S$, величина V_0 — к $A/3$).

В экспериментах использовались ударники с углом раствора при вершине конической части $2\eta = 40, 60, 80, 100, 140, 180^\circ$. При $2\eta = 180^\circ$ экспериментальные данные, соответствующие ударнику с плоским торцом, получены с использованием известной ударной адиабаты [26]. Штриховые линии на рис. 3 соответствуют линейной аппроксимации результатов экспериментов для конических ударников с углом раствора $2\eta = 60, 80, 100^\circ$. Зависимости, полученные для песчаного грунта, оказываются близки к квадратичному закону проникания в форме закона Резаля и могут быть представлены в виде $F = \rho_0(A_1 V_0 + B_1)V_0 S$, где S — площадь миделя поперечного сечения конического ударника.

С использованием модели локального взаимодействия (11), (12) выражение для силы сопротивления внедрению конического ударника с учетом трения Кулона может быть представлено в виде

$$F = (1 + k_{\text{тр}} \operatorname{ctg} \eta) \sigma_n S, \quad \sigma_n = \rho_0(\alpha u + \beta)u, \quad u = V_0 \sin \eta. \quad (20)$$

На рис. 4 приведены зависимости нормированных в соответствии с (20) сил сопротивления внедрению конических ударников в песчаный грунт от нормальной скорости удара $F_* = (1 + k_{\text{тр}} \operatorname{ctg} \eta) \rho_0 u A S$. Значение постоянного коэффициента трения принято равным $k_{\text{тр}} = 0,45$. Из рис. 4 следует, что для конических ударников с углом раствора менее 80° зависимость силы сопротивления от нормальной компоненты скорости может быть пред-

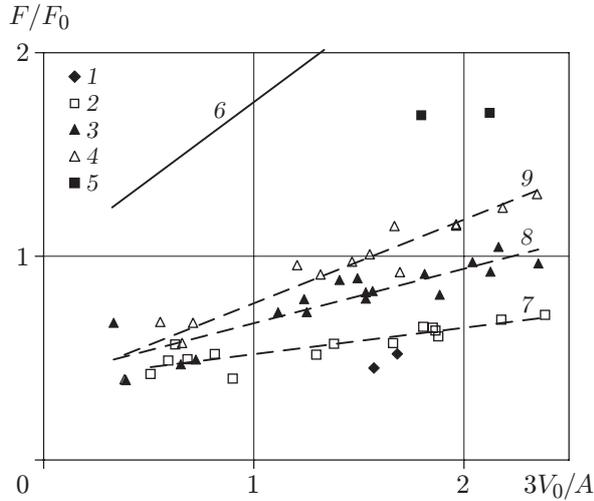


Рис. 3

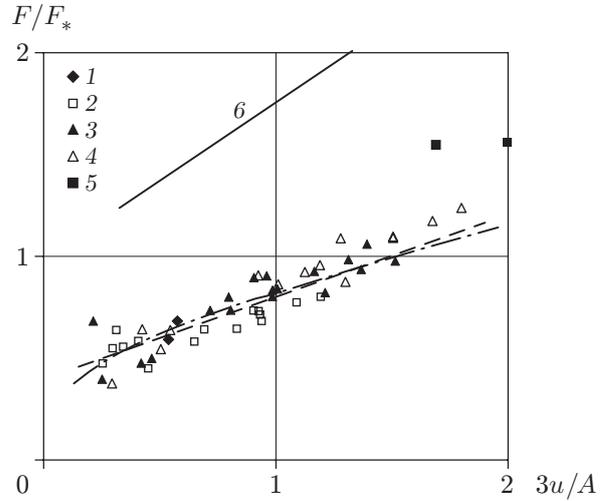


Рис. 4

Рис. 3. Экспериментальные зависимости безразмерной максимальной силы сопротивления внедрению конических ударников в песчаный грунт от скорости удара:

1 — $2\eta = 40^\circ$, 2 — $2\eta = 60^\circ$, 3 — $2\eta = 80^\circ$, 4 — $2\eta = 100^\circ$, 5 — $2\eta = 140^\circ$, 6 — $2\eta = 180^\circ$ (ударник с плоским торцом), 7–9 — линейная аппроксимация экспериментальных данных (7 — $2\eta = 60^\circ$, 8 — $2\eta = 80^\circ$, 9 — $2\eta = 100^\circ$)

Рис. 4. Зависимости нормированных максимальных сил сопротивления внедрению конических ударников в песчаный грунт от нормальной компоненты скорости, отнесенной к $A/3$:

штриховая линия — единая кривая для конических ударников при $2\eta < 80^\circ$; штрихпунктирная линия — решение задачи о расширении сферической полости с учетом нелинейных свойств грунта; остальные обозначения те же, что на рис. 3

ставлена единой кривой (штриховая линия). При этом погрешность не превышает разброса экспериментальных данных.

Таким образом, представленные результаты можно использовать для определения параметров квадратичной модели локального взаимодействия. В диапазоне значений нормальной компоненты вектора скорости $u = 40 \div 250$ м/с получены значения $\alpha = 1,21$, $\beta = 182$ м/с, достаточно близкие к значениям, полученным при решении задачи о расширении сферической полости с учетом нелинейных свойств грунта (штрихпунктирная кривая на рис. 4). Это свидетельствует о применимости разработанной модели локального взаимодействия при определении максимального значения силы сопротивления внедрению в песчаный грунт конических ударников с углом раствора менее 80° .

5. Использование модели локального взаимодействия при определении силы сопротивления внедрению сферических ударников. Сила, действующая на сферический ударник при его проникании в грунт с постоянной скоростью V_0 , определяется путем интегрирования выражений (11), (12) по контактной поверхности и связана с формой и скоростью внедрения ударника соотношением [35]

$$F = -2S \int_{-1}^z (\sigma_n z + \sigma_\tau \sqrt{1-z^2}) dz = 2S \int_0^\varphi (\sigma_n \cos \varphi + \sigma_\tau \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi,$$

$$S = \pi R^2, \quad u = -Vz, \quad z = -1 + V_0 t/R = \cos \varphi, \quad -1 \leq z \leq 0,$$

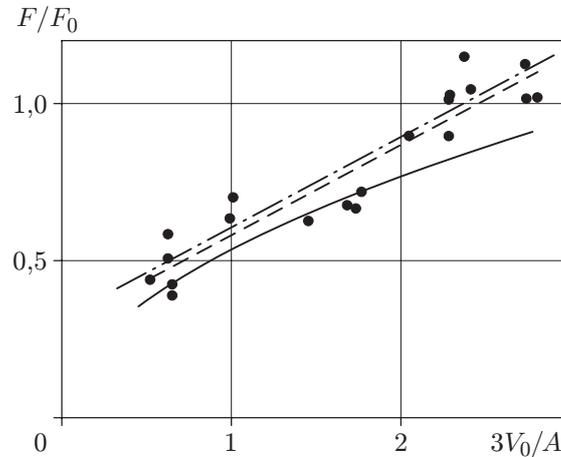


Рис. 5. Зависимости максимальной силы сопротивления внедрению сферы от скорости удара:

точки — экспериментальная зависимость силы сопротивления внедрению конических ударников в песчаный грунт от скорости удара; штриховая линия — линейная аппроксимация экспериментальных данных; сплошная линия — результаты численных расчетов в осесимметричном случае [24]; штрихпунктирная линия — результаты расчетов, полученные с использованием модели локального взаимодействия на основе решения задачи о расширении сферической полости и формулы (22) при $\varphi^* = 65^\circ$

где S — площадь миделя поперечного сечения сферического ударника; z — текущая глубина проникания, отнесенная к радиусу ударника R ; φ — соответствующий глубине z угол, отсчитываемый от вершины сферического ударника в направлении свободной поверхности.

В случае когда значение коэффициента γ в (11) мало ($\gamma \approx 0$), зависимость силы сопротивления внедрению от скорости удара принимает вид [33] закона проникания в форме закона Резаля

$$F = AV_0^2 + BV_0, \quad A = \alpha(A_1 + k_{\text{тр}}A_2)\rho_0S, \quad B = \beta(B_1 + k_{\text{тр}}B_2)\rho_0S, \\ A_1 = (1 - \cos^4 \varphi)/2, \quad A_2 = (\varphi - 2 \sin \varphi \cos^3 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi)/4, \quad (21) \\ B_1 = 2(1 - \cos^3 \varphi)/3, \quad B_2 = 2 \sin^3 \varphi/3.$$

Подставляя в (21) значения φ , равные углу отрыва потока φ^* , с использованием модели локального взаимодействия с учетом поверхностного трения получим максимальные значения силы сопротивления внедрению.

На рис. 5 приведены зависимости безразмерной максимальной силы сопротивления внедрению сферы в песчаный грунт от скорости удара. Значения силы сопротивления внедрению, полученные с использованием модели локального взаимодействия на основе экспериментальных данных, незначительно отличаются от аналогичных значений, полученных в рамках модели локального взаимодействия на основе решения задачи о расширении полости, и на рис. 5 не приводятся.

Заключение. С использованием экспериментальных зависимостей силы сопротивления внедрению конических ударников в песчаный грунт от скорости удара, двумерных численных расчетов и расчетов по модели локального взаимодействия на основе квадратичной зависимости нормального напряжения на поверхности тела от скорости и модели трения Кулона проведено исследование процесса внедрения осесимметричных ударников в песчаный грунт с постоянной скоростью. Подтверждено соответствие двух подходов к

определению параметров модели, основанных на использовании решения задачи о расширении сферической полости с учетом динамической сжимаемости и сопротивления сдвигу грунтовой среды и экспериментальных зависимостей силы сопротивления внедрению конических ударников в песчаный грунт от скорости удара. Показано, что результаты экспериментов, двумерных численных расчетов и расчетов по модели локального взаимодействия, используемой для определения максимума силы сопротивления при внедрении сферических и конических ударников с углом раствора менее 80° , хорошо согласуются.

В то же время заметим, что при проникании с постоянной скоростью затупленных, в частности сферических, ударников и конических ударников с углом раствора более 80° силы сопротивления внедрению после достижения максимального значения достаточно быстро уменьшаются до установления некоторых значений, близких к постоянным. Силы сопротивления, соответствующие данной квазистационарной стадии внедрения, преимущественно определяют параметры процесса глубокого проникания тела конечной массы в грунт. С увеличением угла раствора и скорости удара экспериментально наблюдаемое различие максимального и квазистационарного значений силы возрастает. Эти значения могут различаться в 1,5–2 раза. Для таких тел результаты расчетов по модели локального взаимодействия могут иметь значительную погрешность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомоян А. Я. Проникание. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1974.
2. Рахматуллин Х. А. Вопросы динамики грунтов / Х. А. Рахматуллин, А. Я. Сагомоян, Н. А. Алексеев. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1964.
3. Баженов В. Г. Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред / В. Г. Баженов, В. Л. Котов. М.: Физматлит, 2011.
4. Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969.
5. Крайко А. Н. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным / А. Н. Крайко, Д. Е. Пудовиков, Г. Е. Якунина. М.: Янус-К, 2001.
6. Фомин В. М. Высокоскоростное взаимодействие тел / В. М. Фомин, А. И. Гулидов, Г. А. Сапожников и др. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
7. Остапенко Н. А. Тела вращения минимального сопротивления при движении в плотных средах // Успехи механики. 2002. № 2. С. 105–149.
8. Якунина Г. Е. Особенности высокоскоростного движения тел в плотных средах // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 3. С. 429–449.
9. Forrestal M. J., Luk V. K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid // J. Appl. Mech. 1988. V. 55, N 2. P. 275–279.
10. Forrestal M. J., Tzou D. Y. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets // Intern. J. Solids Structures. 1997. V. 34. P. 4127–4146.
11. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Ballistic impact: recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics — A review // Appl. Mech. Rev. 2005. V. 58. P. 355–371.
12. Баженов В. Г., Котов В. Л. Решение задач о наклонном проникании осесимметричных ударников в мягкие грунтовые среды на основе моделей локального взаимодействия // Прикл. математика и механика. 2010. Т. 74, вып. 3. С. 391–402.
13. Аптуков В. Н. Прикладная теория проникания / В. Н. Аптуков, Р. Т. Мурзакаев, А. В. Фонарев. М.: Наука, 1992.
14. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 6. С. 1057–1072.

15. **Баженов В. Г., Баландин В. В., Брагов А. М. и др.** Экспериментально-теоретическое исследование процессов взаимодействия ударников различной формы с преградой из песка // Прикладные задачи высокоскоростного удара: Сб. науч. ст. / Под ред. Ю. Н. Бухарева. Саров: Всерос. науч.-исслед. ин-т эксперим. физики, 2011. С. 120–132.
16. **Григорян С. С.** Новый закон трения и механизм крупномасштабных горных обвалов и оползней // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244, № 4. С. 846–849.
17. **Баландин В. В., Брагов А. М.** Экспериментальная методика измерения сил сопротивления при взаимодействии ударника с грунтовой средой // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Всесоюз. межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 1991. С. 101–104.
18. **Баженов В. Г., Брагов А. М., Котов В. Л.** Экспериментально-теоретическое исследование процессов проникания жестких ударников и идентификация свойств грунтовых сред // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 6. С. 115–125.
19. **Брагов А. М., Баландин В. В., Котов В. Л. и др.** Экспериментально-теоретическое исследование движения сферического тела в песчаном грунте // Тр. 18-го Междунар. симп. “Динамические и технологические проблемы конструкций и сплошных сред”. М.: ТР-принт, 2012. Т. 1. С. 32–33.
20. **Баженов В. Г., Козлов Е. А., Крылов С. В.** Численное моделирование нелинейных двумерных задач ударного взаимодействия деформируемых сред и конструкций на основе метода С. К. Годунова // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Исследование и оптимизация конструкций: Всесоюз. межвуз. сб. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1990. С. 99–106.
21. **Баженов В. Г., Котов В. Л.** Модификация численной схемы Годунова для решения задач импульсного нагружения мягких грунтов // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 139–149.
22. **Баженов В. Г., Зефирова С. В., Кочетков А. В. и др.** Пакет программ “Динамика-2” для решения плоских и осесимметричных нелинейных задач нестационарного взаимодействия конструкций со сжимаемыми средами // Мат. моделирование. 2000. Т. 12, № 6. С. 67–72.
23. **Баженов В. Г., Котов В. Л., Крылов С. В. и др.** Экспериментально-теоретический анализ нестационарных процессов взаимодействия деформируемых ударников с грунтовой средой // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 6. С. 190–198.
24. **Баженов В. Г., Брагов А. М., Котов В. Л., Кочетков А. В.** Исследование удара и проникания тел вращения в мягкий грунт // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 6. С. 686–697.
25. **Лагунов В. А., Степанов В. А.** Измерение динамической сжимаемости песка при высоких давлениях // ПМТФ. 1963. № 1. С. 88–96.
26. **Брагов А. М., Баландин В. В., Ломунов А. К., Филиппов А. Р.** Методика определения ударной адиабаты мягких грунтов по результатам обращенных экспериментов // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, вып. 11. С. 52–55.
27. **Замышляев Б. В.** Модели динамического деформирования и разрушения грунтовых сред / Б. В. Замышляев, Л. С. Евтерев. М.: Наука, 1990.
28. **Котов В. Л., Линник Е. Ю., Макарова А. А., Тарасова А. А.** Анализ приближенных решений задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 2011. Вып. 73. С. 58–63.
29. **Линник Е. Ю., Гоник Е. Г., Тарасова А. А., Котов В. Л.** Решение задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 2012. Вып. 74. С. 49–58.
30. **Forrestal M. J., Tzou D. Y., Askari E., Longcope D. B.** Penetration into ductile metal targets with rigid spherical-nose rods // Intern. J. Impact Engng. 1995. V. 16, N 5/6. P. 699–710.

31. **Бабаков В. А., Шабунин Е. В.** Об одном методе расчета пневмопробойника в деформируемой среде // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1987. № 1. С. 105–110.
32. **Бабаков В. А., Зиновьев А. Д.** Масштабный эффект в задаче о пробивании пластины жестким ударником // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1993. № 5. С. 18–21.
33. **Григорян С. С., Черноусько Ф. Л.** Одномерные квазистатические движения грунта // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25, вып. 1. С. 86–100.
34. **Баженов В. Г., Котов В. Л.** Метод идентификации упругопластических свойств грунтовых сред при внедрении ударников // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 4. С. 184–190.
35. **Котов В. Л., Баландин В. В., Линник Е. Ю., Баландин В. В.** О применимости модели локального взаимодействия для определения сил сопротивления внедрению сферы в нелинейно-сжимаемый грунт // Вычисл. механика сплошных сред. 2012. Т. 5, № 4. С. 135–142.

Поступила в редакцию 11/1 2013 г.
