РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2007, том 43, № 2

УДК 519.63 + 519.68

ИТЕРАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НАВЬЕ – СТОКСА МЕТОДОМ ПОЛУСОПРЯЖЕННЫХ НЕВЯЗОК *

Я. Л. Гурьева

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск

E-mail: yana@lapasrv.sscc.ru

Метод полусопряженных невязок применяется для решения трехмерной задачи Навье – Стокса на вложенных сетках. Описан трехуровневый итерационный алгоритм решения задачи. Приведены результаты численных экспериментов на последовательности сеток для различных чисел Рейнольдса на примере одной тестовой задачи, показывающие эффективность предлагаемого подхода.

Введение. Предлагаемая работа является продолжением [1, 2]. Ее цель – показать применение итерационного алгоритма полусопряженных невязок для решения уравнения относительно давления в алгоритме Узавы.

Постановка задачи. Для стационарной системы трехмерных уравнений Навье – Стокса

$$L(\mathbf{u})u+\frac{\partial p}{\partial x}=f_x;\quad L(\mathbf{u})\mathrm{v}+\frac{\partial p}{\partial y}=f_y;\quad L(\mathbf{u})w+\frac{\partial p}{\partial z}=f_z;\quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0;$$
$$L(\mathbf{u})=L^c(\mathbf{u})-\lambda\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right);\quad L^c(\mathbf{u})q=\frac{\partial(uq)}{\partial x}+\frac{\partial(\mathrm{v}q)}{\partial y}+\frac{\partial(wq)}{\partial z}\tag{1}$$

рассматривается краевая задача в трехмерной ограниченной области Ω, составленной из параллелепипедов. Здесь неизвестными являются компоненты вектора скорости $\mathbf{u}=(u,\mathrm{v},w)$ и давление p, а функции f_x, f_y, f_z правых частей уравнений считаются заданными. На внешней границе $\partial\Omega$ расчетной области ставятся условия Дирихле для компонент вектора скорости

$$\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega}=\mathbf{u}_D.\tag{2}$$

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00487) и NWO-RFBR (грант № 047.016.008).

Задача состоит в нахождении вектора $\mathbf{u}=(u, \text{v}, w)$, удовлетворяющего уравнениям (1) и граничным условиям (2) при известных значениях функций f_x, f_y, f_z в расчетной области Ω.

Численные методы. Для дискретизации уравнений движения в области строится параллелепипедальная неравномерная сетка, на которой проводится конечно-объемная экспоненциальная аппроксимация [1]. Эта аппроксимация используется для получения результирующей матрицы системы при рассматриваемых в работе небольших числах Рейнольдса и выбрана потому, что такие аппроксимации приводят к монотонным схемам второго порядка на равномерных сетках. Отметим, что для каждой из трех неизвестных компонент вектора скорости используется своя сетка, сдвинутая на полшага относительно сетки для неизвестного давления. Такие сетки называются разнесенными, а сам подход широко применяется для повышения порядка аппроксимации.

Результирующая матрица уравнений движения является блочно-диагональной (3×3), а каждый блок – семидиагональной несимметричной матрицей. В целом после дискретизации система (1) может быть записана в известном блочном виде:

$$A(\mathbf{u})\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^h(\mathbf{u}) & B\\ B^t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{f}\\ 0\end{pmatrix},$$

где B – разностный оператор градиента, а B^t – разностная дивергенция. Решению подобного рода систем посвящено большое количество работ (см., например, [3] и библиографию в ней). В данной работе используется алгоритм Узавы, в котором система решается за два последовательных шага:

$$\mathbf{u}=(A^h)^{-1}(\mathbf{f}-Bp), \tag{3}$$

$$A^p p\equiv B^t(A^h)^{-1}Bp=B^t(A^h)^{-1}\mathbf{f}\equiv g. \tag{4}$$

Система с матрицей A^h линеаризованная. Скорости вычисляются релаксационной процедурой

$$A^h(\mathbf{u}^m)\hat{\mathbf{u}}^{m+1}=\mathbf{f}-Bp,\quad \mathbf{u}^{m+1}=\omega\hat{\mathbf{u}}^{m+1}+(1-\omega)\mathbf{u}^m,\quad m=0,1,\ldots.$$

Предлагаемый вычислительный процесс можно выразить следующим псевдокодом [1]:

```
Задать начальные значения u_0, p_0;
do while (e_vel > ε_vel)
   вычисление A^h
      do while (e_p > ε_p)
         расчет давления p по алгоритму Узавы (4)
      end do
   релаксация u
end do
```

Если в [1] обращение матрицы A^h осуществлялось итерационным методом бисопряженных невязок (BiCR) [2], а шаг для давления при фиксированных скоростях был реализован в виде итерационного процесса по методу минимальных невязок (MR) (обозначим этот подход MR+BiCR), то в данной работе предлагается применение итерационного алгоритма полусопряженных невязок (SCR) для обоих случаев. Основанием для выбора метода SCR является то, что реализация алгоритма BiCR требует на итерации два умножения матрицы на вектор, в то время как реализация алгоритма SCR – одного подобного умножения, представляя собой, таким образом, более экономичную по арифметическим затратам процедуру, хотя при этом необходимы дополнительные затраты памяти. Поэтому в случае, когда число итераций обоих методов не очень велико, программа для метода SCR будет работать быстрее. Кроме того, метод SCR осуществляет глобальную минимизацию в подпространствах Крылова, в то время как метод MR – локальную минимизацию вектора невязки, а метод BiCR не связан с минимизацией вообще.

Критерии остановки итерационных процессов в приведенном псевдокоде следующие: величины ε_{vel} и ε_p являются заданными, а величины e_{vel} и e_p вычисляются на каждом шаге итерационного процесса по формулам

$$e_{vel} = \left(\sum_{ijk} (\mathbf{u}^h_{ijk} - \mathbf{u}_{ex}(x_i, y_j, z_k))^2 \Big/ \sum_{ijk} \mathbf{u}^2_{ex}(x_i, y_j, z_k)^2 \right)^{1/2},$$

$$e_p = ((r_n, r_n) / (g, g))^{1/2},$$

где $\mathbf{u}_{ex}(x_i, y_j, z_k)$ – значение точного решения для компонент вектора скорости в узле сетки с координатами (x_i, y_j, z_k); $\mathbf{u}^h_{ijk}$ – вычисленное сеточное значение в этом же узле сетки; r_n – невязка итерационного процесса относительно давления на n-й итерации; g – правая часть на шаге давления (4).

Алгоритм полусопряженных невязок применяется для итерационного решения системы линейных уравнений

$$Au = f, \quad u, f \in R^N, \tag{5}$$

с вещественной несимметричной квадратной матрицей размера $N \times N$. Алгоритм обобщенных сопряженных невязок (GCR) изложен в [4], а его вариант – в работе [5]. В. П. Ильиным предлагается устойчивая модификация алгоритма, который кратко можно описать следующим образом.

Система (5) решается итерационным процессом вида

$$\begin{aligned} &r_0 = f - Au_0; \quad p_0 = r_0; \\ &u_n = u_{n-1} + \alpha_{n-1} p_{n-1}; \\ &r_n = r_{n-1} - \alpha_{n-1} A p_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{6}$$

Итерационный процесс продолжается вплоть до выполнения заданного условия остановки. Здесь p_n суть некоторые линейно независимые векторы, выбираемые из условия обобщенной сопряженности (ортогональности).

Приведем первые три итерации алгоритма, использованные в программной реализации решения задачи (1), (2).

До итераций вычисляются

$$r_0 = f - Au_0, \quad p_0 = r_0, \quad \rho_0 = (Ap_0, Ap_0), \quad \alpha_0 = (r_0, Ar_0)/\rho_0.$$

Итерация 1:

$$\begin{aligned}
&u_1 = u_0 + \alpha_0 p_0, \quad r_1 = r_0 - \alpha_0 Ap_0,\\
&r_{10} = r_1, \quad \beta_{10} = -(Ap_0, Ar_{10})/\rho_0,\\
&r_{11} = r_{10} + \beta_{10} p_0, \quad p_1 = r_{11}, \quad \rho_1 = (Ap_1, Ap_1), \quad \alpha_1 = (r_1, Ar_1)/\rho_1.
\end{aligned}$$

Итерация 2:

$$\begin{aligned}
&u_2 = u_1 + \alpha_1 p_1, \quad r_2 = r_1 - \alpha_1 Ap_1,\\
&r_{20} = r_2, \quad \beta_{20} = -(Ap_0, Ar_{20})/\rho_0,\\
&r_{21} = r_{20} + \beta_{20} p_0, \quad \beta_{21} = -(Ap_1, Ar_{21})/\rho_1,\\
&r_{22} = r_{21} + \beta_{21} p_1, \quad p_2 = r_{22}, \quad \rho_2 = (Ap_2, Ap_2), \quad \alpha_2 = (r_2, Ar_2)/\rho_2.
\end{aligned}$$

Итерация 3:

$$\begin{aligned}
&u_3 = u_2 + \alpha_2 p_2, \quad r_3 = r_2 - \alpha_2 Ap_2,\\
&r_{30} = r_3, \quad \beta_{30} = -(Ap_0, Ar_{30})/\rho_0,\\
&r_{31} = r_{30} + \beta_{30} p_0, \quad \beta_{31} = -(Ap_1, Ar_{31})/\rho_1,\\
&r_{32} = r_{31} + \beta_{31} p_1, \quad \beta_{32} = -(Ap_2, Ar_{32})/\rho_2,\\
&r_{33} = r_{32} + \beta_{32} p_2, \quad p_3 = r_{33}, \quad \rho_3 = (Ap_3, Ap_3), \quad \alpha_3 = (r_3, Ar_3)/\rho_3.
\end{aligned}$$

Особенностью данного алгоритма является то, что для выполнения расчетов на n-й итерации требуются векторы $p_0, \ldots, p_{n-1}$ и $Ap_0, \ldots, Ap_{n-1}$, которые приходится накапливать и сохранять в процессе вычисления.

Известные модификации алгоритма основаны на уменьшении числа сохраняемых величин, так как при большой размерности системы (5) критическим становится объем памяти для хранения необходимых векторов. Первый подход – алгоритм с перезапусками, когда на некоторой n-й итерации невязка вычисляется не из рекуррентных соотношений (6), а из самого уравнения (5): $r_n = f - Au_n$, и процесс запускается с начала. Второй подход основан на выполнении условия ортогональности вектора p_n не всем векторам p_i, $i = 0, \ldots, n-1$, а только заданному числу k последних векторов p_i, $i = n-k, \ldots, n-1$. Именно эти две модификации алгоритма были реализованы в программе расчета задачи (1), (2).

Результаты вычислительных экспериментов. Целью вычислительного эксперимента является проверка сходимости применяемых алгоритмов и исследование поведения ошибки на тесте с известным аналитическим решением.

Рассматривался тест, имеющий аналитическое решение

$$\begin{aligned}
&u = \sin^2 \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \sin 2\pi z, \quad \mathrm{v} = \sin \pi x \cdot \sin^2 \pi y \cdot \sin 2\pi z,\\
&w = -(\sin 2\pi x \cdot \sin \pi y + \sin \pi x \cdot \sin 2\pi y) \sin^2 \pi z,
\end{aligned}$$

при любом постоянном давлении (для определенности бралось значение, равное 10) и нулевой объемной силе (т. е. в расчетах правые части уравнений движения f_u, f_v, f_w вычислялись аналитически с помощью оператора $L(\mathbf{u})$ из системы (1)).

Краевая задача (1), (2) решалась для $\lambda = 1$ в области $\Omega = [0, 1]^3$, при этом расчетная область $\Omega^h = [-h/2, 1+h/2]^3$ зависит от шага сетки $h = 1/N$, где N – число сеточных шагов на единичном отрезке (тогда у расчетной области число шагов в одном направлении будет $N+1$). Дискретизация задачи проводилась на равномерных сетках с числом шагов по одному направлению $N = 5, 9, 17, 33, 65$.

Компоненты скорости удовлетворяют нулевым граничным условиям Дирихле (2) на всех гранях области Ω.

Значение релаксационного параметра для скоростей ω бралось равным 1, а критерии остановки итераций по скоростям и давлению имели значения $\varepsilon_{vel} = 10^{-8}$ и $\varepsilon_p = 10^{-7}$.

Начальное приближение для компонент вектора скорости равнялось 0, а для давления бралась константа 10.

В табл. 1 приводятся величины ошибок $\delta_s = \max\limits_{ijk} \left\| s(x_i, y_j, z_k) - s_{ijk}^h \right\|$, где $s(x_i, y_j, z_k)$ – значение функции точного решения в узле сетки с координатами (x_i, y_j, z_k), а s_{ijk}^h – значение численного решения в этом же узле сетки. Расчеты проводились по алгоритму SCR. Отметим, что величины этих ошибок совпадают с величинами ошибок, полученных с помощью метода MR+BiCR [1]. При сгущении сеток вдвое ошибки убывают примерно в 4 раза, т. е. они являются величинами порядка $O(h^2)$.

В табл. 2 содержится число итераций n_{MR} и n_{SCR} по давлению на каждой из скоростных итераций для решения системы (4) методами MR и SCR и время вычислений t (в секундах) для двух методов, полученное на персональном компьютере Celeron, 1,72 ГГц, 256 Мбайт. Для сетки с $N = 5$ число итераций по скоростям равно 5, для последующих сеток – 6. Из данных этой таблицы следует, что сходимость итерационного процесса по давлению при применении метода SCR происходит за меньшее число итераций, что влечет за собой более быстрый расчет (кроме того, каждая итерация метода SCR требует только одного умножения на матрицу, в то время как итерация метода BiCR, применяемая для обращения матрицы скоростей, – двух).

В табл. 3 сведены результаты расчетов краевой задачи (1), (2) для различных значений λ на последовательности сеток с числом шагов N. В каж-

Таблица 1

N	δ_p	$\delta_{u,\,v}$	δ_w
5	0,5583	0,2266	0,4505
9	0,3899	0,08187	0,1380
17	0,1378	0,02215	0,03436
33	0,04104	0,005630	0,008769

Таблица 2

N	n_{MR}	n_{SCR}	t_{MR}	t_{SCR}
4	24, 23, 11, 4, 0	10, 11, 7, 3, 1	0,260	0,289
8	34, 36, 21, 9, 2, 0	12, 16, 10, 7, 1	4,88	3,99
16	40, 47, 30, 16, 5, 1	14, 19, 13, 9, 4, 1	89,4	51,0
32	45, 57, 38, 23, 10, 1	16, 22, 16, 12, 6, 1	1274	653

Таблица 3

λ	N				
	5	9	17	33	65
1,0	0,5583 0,2266 0,4505 (5)	0,3899 0,0819 0,1386 (5)	0,1378 0,0222 0,0344 (6)	0,0410 0,00563 0,00877 (6)	0,0110 0,00141 0,00220 (6)
0,1	0,2803 0,2609 0,4724 (10)	0,2043 0,1041 0,1692 (9)	0,0715 0,0293 0,0444 (10)	0,0195 0,00756 0,0116 (10)	0,00498 0,00191 0,00292 (10)
0,01	0,03767 0,5546 0,6754 (39)	0,5084 0,4416 0,6210 (44)	0,1849 0,2471 0,3624 (158)	–	–

дой клетке таблицы содержится четыре числа: первое – δ_p, второе – $\delta_{u,\,v}$, третье – δ_w, а также число итераций по скоростям (в скобках). В верхней строке табл. 3 записаны как данные из табл. 1, которые приводятся здесь для удобства сравнения поведения ошибок численного решения при различных значениях коэффициента λ, так и новые данные (последний столбец) для самой большой сетки с числом шагов в одном направлении $N = 65$. Так как эта задача является ресурсоемкой, то расчеты проводились на рабочей станции с четырьмя процессорами Itanium 2 с оперативной памятью 64 Гбайт. Все параметры расчетов, приведенных в табл. 3, аналогичны описанным выше.

Из данных табл. 3 следует, что при уменьшении диффузионного коэффициента λ ошибки для компонент скоростей растут. При значениях $\lambda = 0;\ 0{,}1$ наблюдается сходимость порядка $O(h^2)$ при измельчении шага сетки. Однако при $\lambda = 0{,}01$ эта сходимость уже не наблюдается и ошибки численного решения гораздо больше ошибок при $\lambda = 0;\ 0{,}1$. Кроме того, для маленьких сеток резко возрастает число внешних итераций по скоростям. Для сетки с $N = 17$ данные приведены для 158-й итерации по скорости, причем процесс по скоростям еще не сошелся. Расчеты для сеток при $N = 33$ и $N = 65$ не приводятся, так как в них нет сходимости, но есть очень большие ошибки численного решения. Это указывает на необходимость использования специальной техники для решения краевой задачи (1), (2) при малых значениях коэффициента λ, такой как введение стабилизирующих поправок для давления и скоростей (см., например, [6] и другие работы этих авторов), что является одним из направлений развития предлагаемого подхода и требует самостоятельного численного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gurieva Y. L.** Numerical solution of 3D Navier-Stokes equations on staggered grids // Bull. of the Novosibirsk Computing Center. Ser. Numer. Anal. 2005. N 13. P. 13.
2. **Gurieva Y. L., Il'in V. P.** Numerical solution of 3D equations of motion // Bull. of the Novosibirsk Computing Center. Ser. Numer. Anal. 2003. N 12. P. 21.

3. **Чижонков Е. В.** Релаксационные методы решения седловых задач. М.: Изд-во ИВМ РАН, 2002.

4. **Eisenstadt S. C., Elman H. C., Schultz M. H.** Variational iterative methods for non-symmetric systems of linear equations // SIAM Journ. Numer. Anal. 1983. **20**, N 3. P. 345.

5. **Yuan J. Y., Golub G. H., Plemmons R. J., Cećilio W. A. G.** Semi-conjugate direction methods for real positive definite systems // http://sccm.stanford.edu/pub/sccm/sccm02-02.pdf

6. **Tezduyar T., Sathe S.** Stabilization parameters in SUPG and PSPG formulations // Journ. of Comput. and Appl. Mech. 2003. **4**. P. 71.

Поступила в редакцию 3 ноября 2006 г.