

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

М. А. Гольдштик, В. А. Сапожников, В. Н. Штерн

(Новосибирск)

Формулируются свойства локальности для коротковолновых возмущений в задаче гидродинамической устойчивости, которые позволяют наряду с глобальной устойчивостью потока независимо изучать устойчивость отдельных его участков, например, ядра потока или пристенной зоны.

Свойства локальности иллюстрируются на спектре малых возмущений плоского течения Пуазейля и течений, которые получаются деформацией параболы Пуазейля на малом участке. Возникновение точек перегиба при такой деформации приводит к появлению нарастающих возмущений с длиной волны порядка зоны деформации. Показано, что точки излома в профиле скорости приводят к потере устойчивости при достаточно больших числах Рейнольдса.

1. Постановка задачи. Задача гидродинамической устойчивости плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости сводится к анализу спектра собственных значений уравнения Орра — Зоммерфельда [1]

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi = i\alpha R [(u - C)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - u''\varphi] \quad (1.1)$$

$$(-1 \leq y \leq 1)$$

Здесь $u(y)$ — профиль скорости исследуемого течения, $\varphi(y)$ — комплексная амплитуда функции тока гармонического возмущения, α — волновое число, R — число Рейнольдса, $C = X + iY$ — искомое собственное значение, X — фазовая скорость возмущения, а Y характеризует развитие возмущения во времени ($Y < 0$ соответствует экспоненциальному затуханию).

Нетривиальное решение (1.1) должно удовлетворять четырем однородным граничным условиям, например, условиям прилипания на стенках

$$\varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0 \quad (1.2)$$

Для достаточно гладких $u(y)$ и конечных R существует счетный набор функций $C_n(\alpha)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, где $0 \leq \alpha < \infty$. Однако для анализа устойчивости любого профиля $u(y) \in C_2(-1, 1)$ при фиксированном R достаточно ограничиться исследованием конечного числа спектральных мод и конечного диапазона изменения α .

Действительно, предположим, что при некоторых значениях параметров

$$|C| \gg \max(|u|, |u''|) \quad (1.3)$$

тогда, пренебрегая в первом приближении членами, содержащими u и u'' в (1.1), получаем

$$C \approx -i(\beta_n^2 + \alpha^2) / \alpha R \quad (1.4)$$

где β_n — занумерованные в порядке возрастания модуля корни уравнения

$$(\beta \operatorname{tg} \beta + \alpha \operatorname{th} \alpha)(\alpha \operatorname{tg} \beta - \beta \operatorname{th} \alpha) = 0 \quad (1.5)$$

$$\pi n < 2|\beta_n| \leq \pi(n+1)$$

Исходное предположение (1.3) выполняется при произвольных α , если n достаточно велико, и при произвольных n , если α достаточно мало или достаточно велико. В этих условиях будет справедливо (1.4) и, таким образом, Y будет большим отрицательным числом, не зависящим от $u(y)$. Но при небольших спектральных номерах n и умеренных значениях α собственное значение $C_n(\alpha)$ существенно зависит от формы профиля $u(y)$.

Проводя при малых α разложение в ряд

$$C = C_0/\alpha + C_1 + \alpha C_2 + \dots \quad (1.6)$$

нетрудно убедиться, что члены ряда зависят от $u(y)$ интегрально. Первый член согласно (1.4) вообще не зависит от $u(y)$, для второго члена можно получить, например, в случае симметричных возмущений

$$C_1 = \int_0^1 (1 + 2 \cos \pi n \cos \pi n y - 3 \cos 2\pi n y) u dy \quad (1.7)$$

и т. д. Таким образом, при малых α собственные значения зависят от профиля интегрально, т. е. длинноволновые возмущения являются индикаторами глобальной, средней устойчивости течения.

С другой стороны, малые локальные «шероховатости» профиля скорости не будут сказываться на поведении длинноволновых возмущений и неустойчивость, возможная при таких шероховатостях, будет связана с нарастанием коротковолновых возмущений с длиной волны порядка масштаба шероховатостей.

2. Свойства локальности. Пусть

$$\sqrt{\alpha R} \gg 1, \quad \alpha \gg 1 \quad (2.1)$$

Тогда вне малой окрестности критической точки y_c (такой, что $u(y_c) = X$) четыре фундаментальных решения (1.1) качественно описываются соотношениями [1]

$$\varphi_{1,2} \sim \exp \left\{ \pm \int_{y_c}^y \sqrt{i\alpha R(u-C)} dy \right\}, \quad \varphi_{3,4} \sim \exp \{ \pm \alpha(y - y_c) \} \quad (2.2)$$

Следует отметить, что все фундаментальные решения удовлетворяют необходимым требованиям гладкости во всем интервале $(-1, 1)$. Соотношения (2.2) подчеркивают лишь то обстоятельство, что можно выбрать такие четыре фундаментальных решения, амплитуды которых будут экспоненциально убывать или экспоненциально расти по модулю вне малой окрестности y_c .

Рассмотрим для простоты случай когда y_c достаточно удалена от границ интервала. Составим линейную комбинацию φ_* тех двух решений из (2.2), амплитуда которых убывает по модулю при движении вправо от y_c , и линейную комбинацию φ_{**} из решений, убывающих влево от y_c .

Требуя совпадения φ_* и φ_{**} и их первых трех производных в точке y_c (или близкой к ней), получаем характеристическое уравнение для C . Построенная таким образом функция φ_0 будет экспоненциально убывать по обе стороны от критической точки y_c , и если

$$k = \min \left\{ |\alpha(y_c - y_1)|, \left| \int_{y_c}^{y_1} \sqrt{i\alpha R(u-C)} dy \right| \right\}$$

(где y_1 — одна из граничных точек), то модуль амплитуды φ_0 вблизи граничных точек будет в $\exp k$ раз меньше своего значения в окрестности y_c , и в условиях (2.1) φ_0 и ее производные будут исчезающе малы. Произвольные однородные граничные условия будут выполняться с точностью порядка $\exp(-k)$. Выполним теперь граничные условия точно, добавляя

у каждой из границ к φ_0 два фундаментальных решения, быстро убывающих при движении от границы к y_c . Тогда в районе y_c эти добавки будут порядка $\exp(-2k)$.

Требую строгого выполнения непрерывности решения в окрестности y_c , найдем поправки к C и к двум убывающим при движении от критической точки решениям, которые тоже будут порядка $\exp(-2k)$. Продолжая этот процесс, который в условиях (2.1) будет быстро сходиться, получаем в пределе функцию φ , которая по построению будет нетривиальным решением (1.1) при однородных условиях на границах.

Построенная таким образом собственная функция будет практически отлична от нуля только в небольшой окрестности y_c (финитна), при этом размер зоны финитности, принимая $R > \alpha$, будет

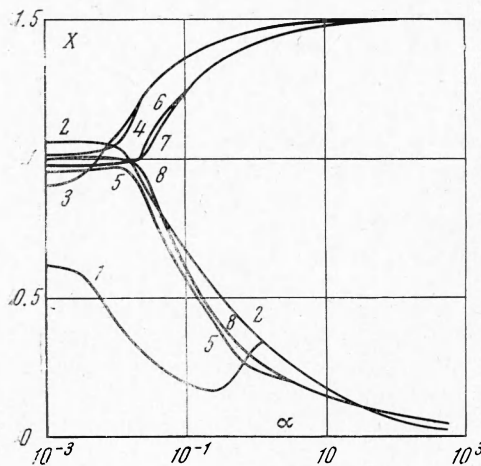
$$|y - y_c| \leq 1/\alpha \quad (2.3)$$

На основе изложенного можно сформулировать следующие свойства локальности:

- а) амплитуда коротковолнового возмущения практически отлична от нуля только в окрестности (диаметра $\sim 1/\alpha$) той точки, где фазовая скорость возмущения совпадает с местной скоростью потока;
- б) характер однородных условий на границе, лежащей вне зоны финитности, не влияет на величину соответствующего собственного значения;
- в) величина собственного значения зависит только от характера профиля скорости основного течения в зоне финитности (2.3). Произвольная деформация профиля скорости вдали от критической точки y_c не влияет на поведение коротковолнового возмущения.

Проиллюстрируем свойства локальности на численных примерах.

3. Спектр собственных значений течения Пуазейля. Устойчивости плоского течения Пуазейля



Фиг. 1

$$u = 3/2 (1 - y^2) \quad \left(\int_0^1 u dy = 1 \right) \quad (3.1)$$

(множитель подобран из условия, указанного в скобках), посвящено большое число работ, начиная с исследования Ливия [1]. Спектр малых возмущений для некоторых фиксированных значений α в зависимости от числа Рейнольдса был рассчитан Салвеном и Грошем [2]. Здесь для иллюстрации свойств локальности будет рассмотрен спектр при фиксированном числе Рейнольдса $R = 10^4$ во всем диапазоне изменения волнового числа. Проведенные авторами расчеты находятся в полном согласии с [1, 2], там где они пересекаются.

На фиг. 1 и 2 представлены зависимости $C_n(\alpha)$ для первых восьми спектральных номеров (всего было рассчитано 12). Собственные значения пронумерованы при малых α в согласии с (1.4), (1.5), причем нечетным спектральным номерам соответствуют симметричные моды возмущений. При малых α декременты следуют зависимости (1.4) (нанесенной для $n = 1$ на фиг. 2 штрих-пунктирной линией), а фазовые скорости X_n близки к средней скорости потока (см., например, (1.7)). Затем в спектре происходит существенная перестройка. Зависимости $Y_n(\alpha)$ для разных спектральных номеров пересекаются. В частности, интересно отметить, что при $\alpha \approx 10^{-2}$ наиболее слабо затухающим возмущением будет антисимметричная мода ($n = 2$), а при $\alpha > 1.5$ таким возмущением становится симметричная мода с $n = 3$. Тем не менее неустойчивость течения Пуазейля связана только с первой симметричной модой, как и предполагалось в [1].

С ростом α моды возмущений делятся на два четких класса:

а) пристенные ($n = 1, 2, 5, 8$ на фиг. 1, 2), у которых с увеличением α (или R) фазовая скорость стремится к нулю, т. е. к скорости стенки, при этом $y_c \rightarrow \pm 1$;

б) приосевые ($n = 3, 4, 6, 7$), у которых фазовая скорость стремится к максимальной скорости основного потока и $y_c \rightarrow 0$.

При $\alpha \geq R/10$ для всех мод Y_n (α) выходят на зависимость (1.4).

Зависимости $C_n(\alpha)$ на фиг. 1 и 2 хорошо иллюстрируют второе свойство локальности б).

При $\alpha > 2$ характер условий на оси канала (симметрия или антисимметрия) перестает быть существенным для пристенных возмущений и собственные значения, соответствующие симметричным и антисимметричным модам, асимптотически сливаются с ростом α . Характерно ведут себя и приосевые возмущения. Пока фазовые скорости не слишком велики (т. е. y_c сравнительно удалена от оси) собственные значения для симметричных и антисимметричных мод практически совпадают уже при $\alpha > 0.5$. Но при $\alpha > 10$, когда ось попадает в малую окрестность критической точки, условия симметрии или антисимметрии становятся существенными и соответствующие собственные значения вновь расходятся.

4. Влияние локальной деформации профиля скорости. Для иллюстрации третьего свойства локальности в) исследуем спектр собственных значений профилей $u(y)$ класса

$$u = \frac{3}{2}(1 - y^2) + \varepsilon \exp \{-2000(y - y_0)^2\}$$

Большой множитель в показателе экспоненты обеспечивает локальность деформации, y_0 — точка, в окрестности которой проводится деформация, ε — амплитуда деформации.

На фиг. 3 сплошными линиями нанесены зависимости $Y_n(y_c)$ для первых четырех спектральных номеров при $\varepsilon = 0.02$, $y_0 = 0$, $R = 10^4$. Пунктирные линии соответствуют параболе Пуазейля ($\varepsilon = 0$).

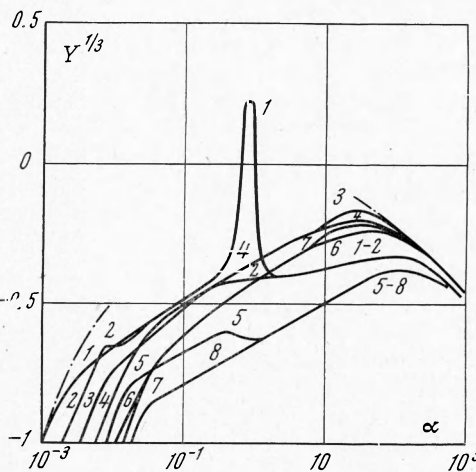
В соответствии с фиг. 1 малые α соответствуют $y_c \sim 0.2 - 0.6$, а с ростом α критические точки стремятся к оси ($y_c \rightarrow 0$) и к стенке ($y_c \rightarrow 1$).

Зависимости для пристенных мод ($n = 1, 2$) совпадают для $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 0.02$ с точностью графического изображения, т. е. в полном согласии со свойством локальности в) малая деформация профиля к оси не меняет собственных значений пристенных мод.

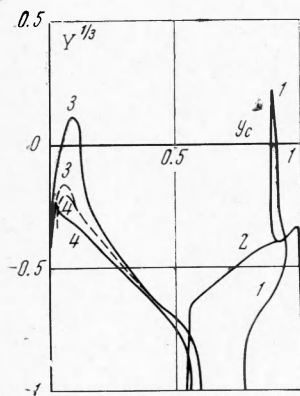
Длинноволновые возмущения так же не реагируют на малую деформацию профиля, поскольку зависят от него интегрально (см., например, (1.7)).

Приосевые же коротковолновые возмущения отличаются в этих двух случаях радикально. Если для течения Пуазейля третья мода затухает при всех числах Рейнольдса, то для деформированного профиля она содержит нарастающие возмущения уже при $R = 10^4$, как видно из фиг. 3. Эта неустойчивость связана с появлением у профиля точек перегиба в соответствии с теоремой Толлмина — Рэлея [1]. Численные расчеты показали, что с ростом R критическая точка наиболее быстрорастущего возмущения стремится к точке перегиба $y = 0.055$. Четвертая мода при $R = 10^4$ в обоих случаях затухает, однако для деформированного профиля с $R > 1.7 \cdot 10^5$ она содержит нарастающие возмущения, при этом критическая точка наиболее опасного возмущения стремится ко второй точке перегиба $y = 0.016$. В последнем случае неустойчивость связана с антисимметричными возмущениями.

Был просчитан так же случай $\varepsilon = 0.02$, $y_0 = 0.9$. В этих условиях собственные значения приосевых мод не отличались от случая $\varepsilon = 0$ с точностью трех значащих цифр, в то время как для пристенных коротковолновых возмущений они существенно менялись. Характерно, что поскольку нарастающие возмущения для течения Пуазей-



Фиг. 2



Фиг. 3

ля сравнительно длинноволновые (для наиболее опасного возмущения $\alpha = 0.9$ при $R = 10^4$ и убывает $\sim R^{-1/2}$), то малая локальная деформация профиля скорости слабо влияет на их поведение, даже если деформация проведена в окрестности критической точки. Но при этом появляются коротковолновые нарастающие возмущения с длиной волны порядка зоны деформации.

5. Наиболее опасные возмущения. То обстоятельство, что неустойчивость основного потока может быть связана с несколькими спектральными модами возмущений (как это видно, например из фиг. 3), в значительной степени усложняет анализ устойчивости. Следует отметить, однако, что достаточно следить за локальными максимумами зависимостей $Y_n(\alpha)$. Если $\Pi \equiv \max_{\alpha} Y < 0$ для всех мод, то устойчивость обеспечена.

Для выпуклых аналитических профилей эти максимумы делятся на три группы (фиг. 1, 2); длинноволновые с $\alpha_{\max} \lesssim 1$ ($n = 1, 5$), которые отвечают за глобальную устойчивость потока, коротковолновые приосевые ($n = 3, 4, 6, 7$) и коротковолновые пристенные ($n = 1, 2, 5, 8$), которые отвечают за локальную устойчивость соответственно приосевой и пристенной зоны. При этом с ростом n критические точки коротковолновых максимумов стремятся к точке, где локальная скорость потока совпадает со средней по каналу.

В каждой из этих групп существует n , для которого $\max_{\alpha} Y_n$ лежит выше других. В рассмотренном случае это первая и третья моды. Возмущение с длинами волн, соответствующими $\max_n \Pi$, будут далее называться наиболее опасными возмущениями.

Так как в силу свойств локальности можно независимо исследовать глобальную устойчивость потока и локальную устойчивость отдельных его участков, то можно независимо рассматривать наиболее опасные длинноволновые и наиболее опасные коротковолновые возмущения, локализованные в приосевой и пристенной зоне.

Для симметричных выпуклых профилей $u(y)$ наиболее опасные коротковолновые возмущения будут локализованы вблизи максимума скорости и вблизи стенки канала. Пусть волновое число $\alpha_{\max}$ наиболее опасного возмущения настолько велико, что в области $|y - y_1| \lesssim 1/\alpha$ (где y_1 — соответственно либо стенка, либо ось канала) профиль скорости представим в виде

$$u = u(y_1) + \gamma(y - y_1)^n$$

т. е. остальными членами разложения $u(y)$ в степенной ряд можно пренебречь.

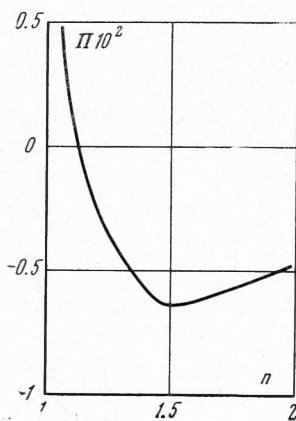
Тогда после несложных преобразований, получим, используя свойства локальности, для достаточно больших R

$$\alpha_{\max} = \alpha_* |R\gamma|^{1/(n+1)} \quad (5.1)$$

$$C(\alpha_{\max}, R) = u(y_1) + C_* \gamma |R\gamma|^{-n/(n+1)} \quad (5.2)$$

Здесь α_* и C_* — некоторые константы, связанные с величиной n и не зависящие от R и γ .

Численные расчеты для пристенных и приосевых коротковолновых максимумов были проведены в широком диапазоне изменения параметров γ и n для профилей типа (3.1) и в большем интервале изменения числа Рейнольдса. Зависимости (5.1), (5.2) хорошо выполняются не только для течений с целыми n (например, течения Куэтта и Пуазейля), но и для профилей со слабыми особенностями в районе максимума скорости.



Фиг. 4

В частности, в связи с принципом максимальной устойчивости [3] исследовалось семейство профилей

$$u = 1 - \gamma y^n, \quad 1 \leq n \leq 2$$

При $R > 10^3$ зависимости (5.1), (5.2) с высокой точностью выполнялись при $n > 1.2$. На фиг. 4 приведена зависимость $\text{Im } C_* = \Pi(n)$, построенная по численным расчетам при $R = 10^4$.

Расчеты показали, что при $R > 10^3$ профили с $n < 1.12$ неустойчивы. Профили с $n < 1.12$, сглаженные в малой окрестности $y = 0$ так, чтобы избежать обращения в бесконечность u'' , также неустойчивы при больших R .

Эти расчеты противоречат результатам, полученным Поттером [4] об устойчивости треугольного и близких к треугольному профилей скорости. Объясняется это тем, что Поттер ограничился исследованием пристенной моды, а неустойчивость треугольного профиля связана с приосевой модой.

6. Оптимизация расчетного метода. Свойства локальности позволяют оптимизировать алгоритм численного расчета собственных значений (1.1) для больших значений α . Используя метод прогонки, введем функции $A_{ij}(y)$; $i, j = 1, 2$ такие, что

$$\varphi = A_{11}\varphi'' + A_{12}\varphi''', \quad \varphi' = A_{21}\varphi'' + A_{22}\varphi''', \quad \|A_{ij}\| = A$$

Требуя, чтобы φ удовлетворяло уравнению (1.1), получаем для коэффициентов матрицы A систему из четырех нелинейных дифференциальных уравнений. Будем интегрировать эту систему от одной из стенок с начальными условиями $A_{ij} = 0$; $i, j = 1, 2$, что обеспечит удовлетворение условий прилипания (1.2) при произвольных значениях φ'' и φ''' . Если решение, интегрируемое от одной из стенок, пометить индексом плюс, а от другой — минус, то, требуя непрерывности φ и ее первых трех производных в критической точке y_c (или близкой к ней), получаем характеристическое уравнение для C

$$\det(A^+ - A^-)|_{y=y_c} = 0$$

Так как в силу свойств локальности при больших α собственное значение не зависит от формы профиля вдали от y_c и от характера однородных граничных условий на границах, удаленных от y_c , то интервал интегрирования можно ограничить малой окрестностью y_c и, соответственно, снести однородные граничные условия на границы этой окрестности. Это приводит к существенному сокращению затрат машинного времени при больших α без снижения точности расчета собственных значений.

Резюмируя, отметим, что сформулированные свойства локальности позволяют наряду с исследованием глобальной устойчивости данного профиля скорости независимо исследовать устойчивость отдельных участков этого профиля по отношению к возмущениям с длиной волны, не превышающей размеров этого участка.

Поступила 2 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Grosch C. E., Salwen H. The stability of steady and time-development plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1968, vol. 34, pt. 1.
3. Гольдштик М. А. Принцип максимальной устойчивости осредненных турбулентных течений. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 5.
4. Potter M. C. Linear stability of symmetrical parabolic flows. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 3.