УДК 539.3

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В ЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СРЕДЕ

И. Ю. Цвелодуб

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается изотропная упругая плоскость, содержащая эллиптическое физически нелинейное включение, свойства которого неизвестны. С использованием полученных в работе общих связей между напряженно-деформированным состоянием включения и нагрузками на бесконечности предложена методика определения вязкоупругопластических свойств включения, основанная на замерах вектора перемещений двух несимметричных относительно центра включения точек его границы. Тем самым решена задача нахождения численных значений констант, присутствующих в определяющих уравнениях включения.

Из классических результатов Эшелби [1] следует, что при приложении на бесконечности равномерно распределенных напряжений в однородном упругом включении указанной формы будет реализовываться однородное напряженно-деформированное состояние. Как показано в [2], однородность напряженно-деформированного состояния будет иметь место и для эллипсоидального включения с нелинейными свойствами, находящегося в упругой среде. Это справедливо и для рассматриваемого плоского случая. В работе предложена методика определения упруговязкопластических свойств эллиптического физически нелинейного включения (ЭФНВ), основанная на замерах вектора перемещений в двух точках границы включения, несимметричных относительно его центра. Современный уровень развития техники позволяет проводить такие замеры с высокой точностью [3].

1. Напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с ЭФНВ. Рассмотрим изотропную упругую плоскость с ЭФНВ, находящуюся в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния под действием равномерно распределенных напряжений на бесконечности (зависящих, вообще говоря, от времени или параметра нагружения), главные значения которых обозначим через N_1 и N_2, а угол между первой главной осью и осью Ox — через α. Система координат Oxy выбрана так, что уравнение границы L между упругой средой S и включением S^* имеет вид $x^2a^{-2} + y^2b^{-2} = 1$, $a \geqslant b$. До приложения нагрузок на бесконечности области S и S^* находились в естественном недеформированном состоянии.

Для области S имеет место закон Гука

$$8\mu\varepsilon_{kl} = (æ - 1)\sigma_{nn}\delta_{kl} + 4\sigma^0_{kl} \quad (k,\, l = 1,\, 2), \quad \sigma^0_{kl} = \sigma_{kl} - \sigma_{nn}\delta_{kl}/2, \tag{1.1}$$

где σ^0_{kl} и δ_{kl} — компоненты девиатора напряжений и единичного тензора; μ — модуль сдвига; $æ = 3 - 4\nu$ при плоской деформации и $æ = (3-\nu)/(1+\nu)$ для обобщенного плоского напряженного состояния; ν — коэффициент Пуассона [4]; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00551).

Деформации ε_{kl} предполагаются малыми и выражаются через перемещения u_k $(k,\, l = 1,\, 2)$ известными соотношениями Коши. На границе L поля нагрузок и перемещений непрерывны.

Как уже отмечалось, при указанных выше условиях в ЭФНВ для нелинейности достаточно общего вида будет реализовываться однородное напряженно-деформированное состояние [2], однако соотношения между напряженно-деформированным состоянием в S^* и на бесконечности в [2] отсутствуют. Примем, что полные деформации ЭФНВ складываются из упругих ε_{kl}^{e*} и неупругих ε_{kl}^{N*} деформаций:

$$\varepsilon_{kl}^* = \varepsilon_{kl}^{e*} + \varepsilon_{kl}^{N*} \qquad (k,\, l = 1,\, 2). \tag{1.2}$$

Для построения указанных соотношений отобразим упругую область S на внешность единичной окружности γ комплексной плоскости ζ [4]:

$$\begin{gathered} z = \omega(\zeta) = R(\zeta + m\zeta^{-1}), \qquad \zeta = \rho \exp(i\theta), \\ 2R = a + b, \qquad m = (a - b)/(a + b) \qquad (R > 0, \quad 0 \leqslant m < 1). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Считая, что вращение на бесконечности отсутствует, с учетом того, что главный вектор сил, приложенных к границе L со стороны S^*, равен нулю (поскольку напряжения σ_{kl}^* во всех точках S^* одни и те же), для функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, определяющих напряженно-деформированное состояние в S, получим [4]

$$\varphi(\zeta) = \Gamma R\zeta + \varphi_0(\zeta), \quad \psi(\zeta) = \Gamma' R\zeta + \psi_0(\zeta), \quad 4\Gamma = N_1 + N_2, \quad 2\Gamma' = (N_2 - N_1)\exp(-2i\alpha), \tag{1.4}$$

где $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ находятся через граничные значения функции $f = 2\partial U/\partial \bar{z}$ ($U = U(z, \bar{z})$ — функция напряжений) [4, 5]. Из условия непрерывности усилий при переходе через границу L на ней должно выполняться равенство $\partial U/\partial \bar{z} = \partial U^*/\partial \bar{z}$, т. е.

$$f = 2\,\frac{\partial U^*}{\partial \bar{z}} \quad \text{на} \quad L \tag{1.5}$$

($U^* = U^*(z, \bar{z})$ — функция напряжений для ЭФНВ).

Поскольку σ_{kl}^* не зависят от x и y (а следовательно, от z и $\bar{z}$), с учетом известных соотношений [5] $\sigma_{11}^* + \sigma_{22}^* = 4\partial^2 U^*/(\partial z \partial \bar{z})$ и $\sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + 2i\sigma_{12}^* = 4\partial^2 U^*/\partial z^2$ после отбрасывания не влияющих на напряженное состояние линейных относительно z и $\bar{z}$ слагаемых для U^* получим

$$2U^* = Az\bar{z} + Bz^2/2 + \bar{B}\bar{z}^2/2, \quad 2A = \sigma_{11}^* + \sigma_{22}^*, \quad 2B = \sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + 2i\sigma_{12}^*. \tag{1.6}$$

Из (1.4)–(1.6) и известных формул для φ_0 и ψ_0 [4] найдем

$$\begin{gathered} \varphi(\zeta) = R\{\Gamma\zeta + [\bar{B} + m(A - \Gamma) - \bar{\Gamma}']\zeta^{-1}\}, \\ \psi(\zeta) = R\Big\{\Gamma'\zeta + \frac{[(m^2+1)(A - 2\Gamma) + m(B + \bar{B} - \bar{\Gamma}')]\zeta^2 + \bar{B} - m^2 B - \bar{\Gamma}'}{\zeta(\zeta^2 - m)}\Big\}, \quad |\zeta| \geqslant 1. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Из соотношений $2\partial w^*/\partial \bar{z} = \varepsilon_{11}^* - \varepsilon_{22}^* + 2i\varepsilon_{12}^*$ и $\partial w^*/\partial z + \partial \bar{w}^*/\partial \bar{z} = \varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*$, где $w^* = u_1^* + iu_2^*$ [5] (ε_{kl}^* не зависят от z и $\bar{z}$), полагая, что точка $(0, 0) \in S^*$ неподвижна, т. е. $w^*(0, 0) = 0$, для комплексного перемещения в S^* получим

$$2w^* = Cz + D\bar{z}, \quad C = \varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^* + 2i\varepsilon^*, \quad D = \varepsilon_{11}^* - \varepsilon_{22}^* + 2i\varepsilon_{12}^*, \tag{1.8}$$

где ε^* — произвольная постоянная, равная значению вращения.

Поскольку перемещения на границе областей S и S^* непрерывны, т. е. $w = w^*$ на L, функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ из (1.7) должны удовлетворять известному граничному условию для перемещений, которое вместе с аналогичным условием для задачи в напряжениях [4, 5] с учетом (1.8) дает равенство

$$(æ+1)\overline{\varphi(\sigma)} = (A+\mu\bar{C})\overline{\omega(\sigma)} + (B+\mu\bar{D})\omega(\sigma), \tag{1.9}$$

где $\sigma = \exp(i\theta)$ — произвольная точка на γ.

Подставляя (1.3) и (1.7) в (1.9) и приравнивая коэффициенты при σ и σ^{-1}, получим

$$\begin{gathered} \mu(m\bar{C}+\bar{D}) = æ(mA+B) - (æ+1)(m\Gamma+\Gamma'), \\ \mu(\bar{C}+m\bar{D}) = -(A+mB) + (æ+1)\Gamma. \end{gathered} \tag{1.10}$$

С учетом выражений для A, B, C и D из (1.6) и (1.8) и равенств [4] $\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty = 4\Gamma$ и $\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty + 2i\sigma_{12}^\infty = 2\Gamma'$ после несложных преобразований из (1.10) найдем искомые соотношения между напряженно-деформированным состоянием в S^* и на бесконечности

$$\begin{gathered} F_i = \alpha_{ij}y_j + \beta_{ij}x_j \qquad (i = 1,\, 2,\, 3), \\ F_1 = \varepsilon_{11}^*, \quad F_2 = \varepsilon_{22}^*, \quad F_3 = 2\varepsilon_{12}^*, \quad y_1 = \sigma_{11}^*, \quad y_2 = \sigma_{22}^*, \quad y_3 = \sigma_{12}^*, \\ x_1 = \sigma_{11}^\infty, \quad x_2 = \sigma_{22}^\infty, \quad x_3 = \sigma_{12}^\infty, \quad \alpha_{11} = -\frac{(æ+1)(1-m)}{4\mu(1+m)}, \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{æ-1}{4\mu}, \quad \alpha_{22} = -\frac{(æ+1)(1+m)}{4\mu(1-m)}, \quad \alpha_{33} = -\frac{æ+m^2}{\mu(1-m^2)}, \\ \beta_{11} = \frac{(æ+1)(3-m)}{8\mu(1+m)}, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = -\frac{æ+1}{8\mu}, \quad \beta_{22} = \frac{(æ+1)(3+m)}{8\mu(1-m)}, \\ \beta_{33} = \frac{æ+1}{\mu(1-m^2)} \qquad (0 \leqslant m < 1), \end{gathered} \tag{1.11}$$

остальные коэффициенты α_{ij} и β_{ij} равны нулю; суммирование в (1.11) проводится по j от 1 до 3.

Определяющие уравнения для S^* вида (1.2) совместно с (1.11) представляют собой замкнутую систему для нахождения по известной истории нагружения $\sigma_{kl}^\infty = \sigma_{kl}^\infty(t)$ на бесконечности истории нагружения $\sigma_{kl}^* = \sigma_{kl}^*(t)$ $(k,\, l = 1,\, 2)$ в ЭФНВ, где t — время или параметр нагружения.

Можно показать, что эта система однозначно разрешима относительно $\sigma_{kl}^* = \sigma_{kl}^*(t)$ при обычных предположениях об устойчивости процесса неупругого деформирования [6]. Так, если $\varepsilon_{kl}^{N*} = \varepsilon_{kl}^{N*}(\sigma_{mn}^*)$ — дифференцируемые функции (это, например, имеет место, если поведение материала включения описывается деформационной теорией пластичности), условие устойчивости имеет вид $\Delta\varepsilon_{kl}^{N*}\Delta\sigma_{kl}^* \geqslant 0$. Если же ε_{kl}^{N*} — необратимые деформации (пластические, вязкие, деформации ползучести), удовлетворяющие соотношениям теории течения, то аналогичное неравенство имеет вид $\displaystyle\int\limits_0^t \Delta\dot{\varepsilon}_{kl}^{N*}\Delta\sigma_{kl}^*\,dt \geqslant 0$ для любого момента $t > 0$ при соответствующих начальных условиях при $t = 0$ [6].

Нетрудно также доказать, что полученное выше решение для плоскости с ЭФНВ будет единственным, т. е. при заданных σ_{kl}^∞ и указанных ограничениях на соотношения между ε_{kl}^{N*} и σ_{kl}^* в области S^* реализуется однородное напряженно-деформированное состояние.

Если во включении S^* заданы однородные деформации ε_{kl}^{N*} (природа которых не важна) и $\sigma_{kl}^\infty = 0$, то из соотношений (1.2) и (1.11) однозначно определяются напряжения σ_{kl}^*. Этот случай рассмотрен Дж. Эшелби [1].

2. Определение упруговязкопластических характеристик включения. Предположим, что упругие константы μ и æ среды S и геометрические параметры R и m включения S^* известны, а механические характеристики последнего требуется определить. Соотношения (1.11) позволяют решить эту задачу, точнее, задачу определения численных значений констант, присутствующих в уравнениях (1.2), в которых необходимо конкретизировать зависимости для ε_{kl}^{e*} и ε_{kl}^{N*}. Будем считать, что упругие деформации подчиняются закону Гука, т. е. ε_{kl}^{e*} выражаются через σ_{kl}^{*} линейными соотношениями, содержащими в плоском случае шесть неизвестных постоянных. Неупругие же деформации ε_{kl}^{N*} складываются из пластических ε_{kl}^{p*} и развивающихся во времени вязких деформаций ε_{kl}^{c*}: $\varepsilon_{kl}^{N*} = \varepsilon_{kl}^{p*} + \varepsilon_{kl}^{c*}$ $(k,\ l = 1,\ 2)$. С учетом этого соотношения (1.2) запишем в виде

$$
\begin{gathered}
F_i = \alpha_{ij}^{e} y_j + f_i^p + f_i^c \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),\\
f_1^p = \varepsilon_{11}^{p*}, \quad f_2^p = \varepsilon_{22}^{p*}, \quad f_3^p = 2\varepsilon_{12}^{p*}, \quad f_1^c = \varepsilon_{11}^{c*}, \quad f_2^c = \varepsilon_{22}^{c*}, \quad f_3^c = 2\varepsilon_{12}^{c*},
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

где $\|\alpha_{ij}^{e}\|$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$ — симметричная матрица, элементами которой являются компоненты упругих податливостей включения, т. е. для упругих деформаций f_i^e включения имеем

$$
f_i^e = \frac{1}{2}\,\frac{\partial s_e^2}{\partial y_i}, \qquad s_e^2 = \alpha_{ij}^{e} y_i y_j. \tag{2.2}
$$

При определении упругопластических свойств будем полагать, что внешние нагрузки, т. е. напряжения x_i, изменяются пропорционально одному параметру, что позволяет (по крайней мере, в первом приближении) использовать соотношения деформационной теории пластичности:

$$
f_i^p = \begin{cases} 0, & s_p < \sigma_{\text{т}},\\ \lambda\,\dfrac{\partial s_p}{\partial y_i}, & s_p \geqslant \sigma_{\text{т}}, \end{cases} \tag{2.3}
$$

где $s_p = s_p(y_i)$ — однородная функция первой степени; $\sigma_{\text{т}}$ — предел текучести при одноосном растяжении вдоль оси Ox; $\lambda > 0$ — неопределенный множитель для идеально пластического материала (в этом случае вместо второго неравенства в (2.3) имеет место равенство $s_p = \sigma_{\text{т}}$; $\lambda = \lambda(s_p)$ — монотонно возрастающая функция для упрочняющегося материала, которую будем считать степенной:

$$
\lambda = B_0 s_p^q. \tag{2.4}
$$

Для s_p применяем зависимость типа (2.2) для s_e:

$$
s_p^2 = \alpha_{ij}^{p} y_i y_j, \qquad \alpha_{ij}^{p} = \alpha_{ji}^{p}, \qquad \alpha_{11}^{p} = 1. \tag{2.5}
$$

Заметим, что функция s_p в виде (2.5) является обобщением зависимостей $s_p = s_p(y_i)$ для изотропной среды при $\alpha_{11}^{p} = \alpha_{22}^{p} = 1$, $\alpha_{12}^{p} = 1 - \beta/2$, $\alpha_{33}^{p} = \beta$, остальные α_{ij}^{p} равны нулю (критерий Мизеса при $\beta = 3$ и критерий Треска при $\beta = 4$).

Наконец, для вязких деформаций f_i^c в предположении отсутствия в ЭФНВ эффектов последействия (что может быть экспериментально проверено) будем исходить из обычных соотношений теории установившейся ползучести [6]

$$
\dot f_i^c = s_c^n\,\frac{\partial s_c}{\partial y_i}, \qquad s_c^2 = \alpha_{ij}^{c} y_i y_j, \qquad \alpha_{ij}^{c} = \alpha_{ji}^{c}. \tag{2.6}
$$

Вместо степенной функции в (2.6) можно использовать и другие зависимости [6]: экспоненциальную, гиперболического синуса, дробно-линейную и т. п.

Предположим, что при приложении внешних напряжений x_i имеется возможность замерить перемещения u_k^* ($k = 1,\ 2$) двух несимметричных относительно центра ЭФНВ (который считается неподвижным: $w^*(0,0) = 0$) точек границы L. Тогда, как следует из (1.8) и (1.3), во включении будут однозначно определяться деформации F_i и вращение ε^*. Действительно, подставляя в (1.8) значения $z_k = R(\sigma_k + m\sigma_k^{-1})$ и $\bar{z}_k = R(\sigma_k^{-1} + m\sigma_k)$ ($k = 1,\ 2$), для величин C и D получим систему двух линейных уравнений, определитель которой $R^2(1 - m^2)(\sigma_1\sigma_2^{-1} - \sigma_2\sigma_1^{-1})$ не равен нулю при $z_1 \neq z_2$ и $z_1 \neq -z_2$.

По известным деформациям во включении F_i и внешним напряжениям x_i из (1.11) однозначно находятся напряжения в ЭФНВ y_i ($i = 1,\ 2,\ 3$), поскольку согласно (1.11) матрица $\|\alpha_{ij}\|$ является отрицательно определенной и $\det\|\alpha_{ij}\| < 0$.

С учетом сказанного выше можно предложить следующий алгоритм нахождения констант в определяющих уравнениях.

Определение упругих постоянных α_{ij}^e. В этом случае необходимо провести замеры перемещений указанных выше точек, по которым находятся F_i, при трех комбинациях внешних нагрузок $x_i^{(k)}$, таких, чтобы соответствующие согласно (1.11) напряжения $y_i^{(k)}$ были линейно независимы, т. е. $\Delta \equiv \det\|y_i^{(k)}\| \neq 0$, и не вызывали появления во включении пластических деформаций $f_i^{p(k)}$ ($i,\ k = 1,\ 2,\ 3$). Последнее легко проверить, проведя разгрузку, т. е. сняв нагрузки $x_i^{(k)}$ и замерив остаточные перемещения $\tilde{w}^{*(k)}$ указанных точек контура L (при $f_i^{p(k)} = 0$ должно быть $\tilde{w}^{*(k)} = 0$, и наоборот). Предполагается, что нагрузки на бесконечности прикладываются мгновенно (вязкие деформации $f_i^{c(k)}$ во включении отсутствуют).

С учетом сделанных замечаний из (2.1) получим

$$\alpha_{ij}^e y_j^{(k)} = F_i^{(k)} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \tag{2.7}$$

Соотношения (2.7) представляют собой систему девяти линейных уравнений относительно шести неизвестных α_{ij}^e. Если же ограничиться двумя экспериментами ($k = 1,\ 2$), то несмотря на совпадение числа неизвестных и числа уравнений в (2.7), матрица системы будет вырожденной. Действительно, для искомого вектора $\{\alpha_{11}^e, \alpha_{12}^e, \alpha_{13}^e, \alpha_{22}^e, \alpha_{23}^e, \alpha_{33}^e\}$ структура матрицы $\|a_{ij}\|$ ($i,\ j = 1, 2, \ldots, 6$) будет следующей: $a_{11} = a_{32} = a_{53} = y_1^{(1)}$, $a_{12} = a_{34} = a_{55} = y_2^{(1)}$, $a_{13} = a_{35} = a_{56} = y_3^{(1)}$, $a_{21} = a_{42} = a_{63} = y_1^{(2)}$, $a_{22} = a_{44} = a_{65} = y_2^{(2)}$, $a_{23} = a_{45} = a_{66} = y_3^{(2)}$, остальные a_{ij} равны нулю. Непосредственные вычисления показывают, что $\det\|a_{ij}\| = 0$. Поэтому, полагая $i = 1$, из трех уравнений, соответствующих $k = 1,\ 2,\ 3$, находим α_{1j}^e. Аналогично, полагая $i = 2$ и затем $i = 3$, при $k = 1,\ 2,\ 3$ для α_{2j}^e и α_{3j}^e ($j = 1,\ 2,\ 3$) получим подобные системы, определители которых во всех трех случаях ($i = 1, 2, 3$) не равны нулю. Следовательно, все постоянные α_{ij}^e находятся однозначно.

Заметим, что по данной методике коэффициенты α_{ij}^e и α_{ji}^e ($i \neq j$) определяются как независимые. Так как $\alpha_{ij}^e = \alpha_{ji}^e$, то сопоставление их друг с другом может служить критерием точности проводимых измерений и справедливости используемых гипотез, в частности гипотезы о линейности связей между напряжениями и упругими деформациями во включении.

Рассмотрим случай изотропного включения. Допустим, что для данных, полученных в указанных выше трех экспериментах, с хорошей точностью выполняется равенство $2y_3/(y_1 - y_2) = F_3/(F_1 - F_2)$, которое косвенным образом свидетельствует о соосности плоских тензоров напряжений и деформаций: если это равенство выполняется при любых комбинациях y_i ($i = 1,\ 2,\ 3$), то вследствие (2.1) (при $f_i^p = f_i^c = 0$) упругие постоянные будут связаны соотношениями $\alpha_{11}^e = \alpha_{22}^e$, $\alpha_{33}^e = 2(\alpha_{11}^e - \alpha_{12}^e)$, $\alpha_{13}^e = \alpha_{23}^e = 0$, что соответствует закону Гука для изотропной среды вида (1.1), содержащему только две константы $\mu^* = (1/2)(\alpha_{11}^e - \alpha_{12}^e)^{-1}$ и $\text{æ}^* = (3\alpha_{11}^e + \alpha_{12}^e)(\alpha_{11}^e - \alpha_{12}^e)^{-1}$. Поэтому в первом приближении при упругих деформациях включение можно считать изотропным, а α_{11}^e и α_{12}^e определять по данным, полученным в одном из указанных экспериментов, например из соотношений $\alpha_{11}^e y_1 + \alpha_{12}^e y_2 = F_1$ и $\alpha_{12}^e y_1 + \alpha_{11}^e y_2 = F_2$ при условии, что $|y_1| \neq |y_2|$.

Определение пластических характеристик. Считая величины α_{ij}^e известными, при упругом деформировании ЭФНВ будем иметь следующие равенства, вытекающие из (1.11) и (2.1):

$$A_{ij} y_j = \beta_{ij} x_j, \qquad A_{ij} = \alpha_{ij}^e - \alpha_{ij} \qquad (i,\, j = 1,\, 2,\, 3). \tag{2.8}$$

Как следует из (1.11), матрицы $\|A_{ij}\|$ и $\|\beta_{ij}\|$ являются положительно определенными, поэтому для них существуют обратные матрицы, что приводит к взаимно однозначным соотношениям между y_i и x_j $(i,\, j = 1,\, 2,\, 3)$. Это позволяет реализовать во включении требуемую программу нагружения (в упругой области). Например, если необходимо создать одноосное напряженное состояние, когда отлична от нуля только одна компонента y_k, то, как следует из (2.8), надо приложить внешние нагрузки $x_i = B_{ik} y_k$ $(i = 1,\, 2,\, 3$; по k суммирование не проводится), где $B_{ik} = \beta_{ij}^{-1} A_{jk}$ (β_{ij}^{-1} — компоненты матрицы, обратной к $\|\beta_{ij}\|$).

Предположим далее, что при проведении трех независимых программ нагружения во включении в области упругих деформаций удается зафиксировать момент появления пластических деформаций f_i^p (точнее, их скоростей $\dot f_i^p$) в каждой из программ. Величины f_i^p и y_i определяются из (1.11) и (2.1) по известным F_i и x_i. Из соотношений (2.3) получим

$$f_i^p = A_p s_p^{-2} \alpha_{ij}^p y_j \qquad (i = 1,\, 2,\, 3), \qquad A_p = f_i^p y_i. \tag{2.9}$$

Учитывая, что в указанный момент в каждой из трех серий экспериментов выполняется равенство $s_p = \sigma_{\text{т}}$, из (2.9) для нахождения шести неизвестных (α_{ij}^p и $\sigma_{\text{т}}$) получим систему вида (2.7), где α_{ij}^e следует заменить на $\alpha_{ij}^p \sigma_{\text{т}}^{-2}$, а $F_i^{(k)}$ — на $f_i^{p(k)}/A_p^{(k)}$, которая решается изложенным выше способом.

Если материал ЭФНВ является упрочняющимся в процессе пластического деформирования, т. е. $\dot s_p > 0$ при дальнейшем активном нагружении на бесконечности, то для определения констант B_0 и q из (2.4) достаточно знать A_p и s_p в двух экспериментах при $s_p > \sigma_{\text{т}}$, $s_p^{(1)} \neq s_p^{(2)}$, поскольку согласно (2.3) и (2.4) $A_p = B_0 s_p^{q+1}$. При известных $F_i^{(k)}$, $x_i^{(k)}$ и α_{ij}^p величины $A_p^{(k)}$ и $s_p^{(k)}$ $(k = 1,\, 2)$ легко находятся из (1.11), (2.1), (2.5) и (2.9). При этом по-прежнему считаем, что упругопластическое деформирование ЭФНВ не сопровождается появлением вязких деформаций, т. е. $f_i^c = 0$.

Определение вязких характеристик. Методика нахождения констант α_{ij}^c и n из (2.6) аналогична описанной выше для упругопластических характеристик. Для этого достаточно провести три серии независимых экспериментов с замером $F_i^{(k)}(t)$ и $\dot F_i^{(k)}(t_0)$ при таких внешних нагрузках $x_i^{(k)} = x_i^{(k)}(t)$, чтобы для соответствующих согласно (1.11) напряжений $y_i^{(k)}(t)$ выполнялись условия $\det\|y_i^{(k)}(t_0)\| \neq 0$ и $s_p(y_i^{(k)}(t)) < \sigma_{\text{т}}$, т. е. $f_i^{p(k)}(t) = 0$ $(i,\, k = 1,\, 2,\, 3;\ 0 < t \leqslant t_0)$, где t_0 — выбранный момент наблюдения (при $t < 0$ упругая среда S и включение S^* находились в естественном состоянии). Тогда из (2.1) найдем величины $\dot f_i^{c(k)}(t_0)$.

Как следует из (2.6), для удельной мощности диссипации $W = \dot f_i^c y_i$ выполняется равенство $W = s_c^{n+1}$, т. е. $s_c = W^{1/(n+1)}$. Поэтому соотношения (2.6) можно записать в виде

$$\dot f_i^c = s_c^{n-1} \alpha_{ij}^c y_j = W^{(n-1)/(n+1)} \alpha_{ij}^c y_j.$$

В момент $t = t_0$ величины $\dot{f}_i^c$ и W известны, поэтому, считая показатель ползучести n также известным, для определения коэффициентов α_{ij}^c получим систему, аналогичную (2.7):

$$\alpha_{ij}^c y_j^{(k)} = W_k^{(1-n)/(n+1)} \dot{f}_i^{c(k)} \qquad (i,\, k = 1,\, 2,\, 3). \tag{2.10}$$

Поскольку $\alpha_{ij}^c = \alpha_{ji}^c$, из (2.10) следует

$$\alpha_{ij}^c y_i^{(1)} y_j^{(2)} = W_1^{(1-n)/(n+1)} \dot{f}_i^{c(1)} y_i^{(2)} = W_2^{(1-n)/(n+1)} \dot{f}_i^{c(2)} y_i^{(1)}.$$

Отсюда при $W_1 \neq W_2$ однозначно находится n, после чего система (2.10) относительно α_{ij}^c решается тем же методом, что и (2.7).

В заключение заметим, что полученные выше результаты могут быть обобщены на случай линейной вязкоупругой среды, содержащей ЭФНВ с более сложными, чем (2.1)–(2.6), определяющими уравнениями, например учитывающими эффекты последействия, упрочнения и разупрочнения, накопления поврежденности при ползучести и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. **Вакуленко А. А., Севостьянов И. Б.** Включение с нелинейными свойствами в упругой среде. Исследования по механике строительных конструкций и материалов. Л.: Ленингр. инж.-строит. ин-т, 1991. С. 8–16.
3. **Рэнсон У., Саттон М., Питерз У.** Голографическая и лазерная спекл-интерферометрия // Экспериментальная механика. М.: Мир, 1990. Кн. 1. С. 448–491.
4. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
5. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968.
6. **Цвелодуб И. Ю.** Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991.

Поступила в редакцию 8/IX 1999 г.