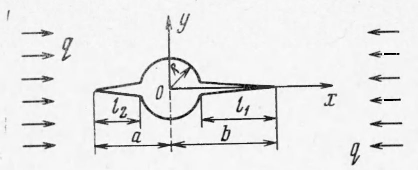
ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ СЖАТОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ТРЕЩИНАМИ, ВЫХОДЯЩИМИ НА ЕГО КОНТУР

Ю. В. Зайцев (Москва)

Процесс разрушения хрупких пористых тел при одноосном сжатии сопровождается развитием продольных трещин, вызываемых концентрацией напряжений в окрестности пор. В связи с этим представляет интерес рассматриваемая ниже задача о предельном равновесии пластины, ослабленной круговым отверстием и выходящими на его контур радиальными трещинами нормального разрыва при действии сжимающих напряжений на бесконечности [1]. Задача решается в рамках δ_k-модели хрупкого тела с трещинами [1, 2]. Подобная задача для случаев одноосного и всестороннего растяжения решена приближенным методом в работе [2]. Развитие трещин сдвига около отверстий в сжатых телах рассматривалось в работе [3].

Пусть в неограниченной упругой пластине единичной толщины имеется круговое отверстие и две макротрещины, выходящие на его контур (фиг. 1). Пластина на бесконечности сжимается системой внешних напряжений q ($q < 0$), параллельных линии расположения трещин. Следуя [2], приближенно представим упругие напряжения в окрестности концов трещины в виде суммы



Фиг. 1

$$\sigma_y(x, 0) \approx \sigma_y^{(0)}(x, 0) + \sigma_y^{(1)}(x, 0)$$
$$(x \leqslant -a, \ x \geqslant b)$$

Здесь $\sigma_y^{(0)}(x, 0)$ — упругие напряжения в пластине с круговым отверстием (без трещины) от действия сжимающих напряжений $\sigma_x = q$, $\sigma_y^{(1)}(x, 0)$ — упругие напряжения в плоскости с прямолинейным разрезом вдоль оси x при $-a \leqslant x \leqslant b$, когда к берегам этого разреза на участках $-a \leqslant x \leqslant -R$ и $R \leqslant x \leqslant b$ приложено нормальное давление $p_n(x) = \sigma_y^{(0)}(x, 0)$.

Упругие напряжения в пластине с круговым отверстием (без трещин) выражаются так [4]:

$$\sigma_y^{(0)}(x, 0) = q\left(\frac{1}{2}\frac{R}{x^2} - \frac{3}{2}\frac{R^4}{x^4}\right) \tag{1}$$

Напряжение $\sigma_y^{(1)}(x, 0)$ согласно [2] определяется по формуле

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \frac{1}{\pi\sqrt{(x-b)(x+a)}} \int_{-a}^{b} \frac{p_n(\xi)\sqrt{(b-\xi)(a+\xi)}}{|x-\xi|}\,d\xi \quad \begin{pmatrix} x \leqslant -a \\ x \geqslant b \end{pmatrix} (a \leqslant b)$$

$$p_n(\xi) = \begin{cases} \sigma_y^{(0)}(\xi, 0) & \text{при} -a \leqslant \xi \leqslant -R \\ 0 & \text{при} -R < \xi < R \\ \sigma_y^{(0)}(\xi, 0) & \text{при} \quad R \leqslant \xi \leqslant b \end{cases} \tag{2}$$

Предельную величину внешних усилий $q = q_*$ можно найти из следующего выражения [2]:

$$\frac{1}{\pi\sqrt{b+a}} \int_{-a}^{b} \frac{p_n^*(\xi)\sqrt{(b-\xi)(a-\xi)}}{b-\xi}\,d\xi = K_c \tag{3}$$

Здесь K_c — постоянная Ирвина [5], а $p_n^*(\xi)$ определяется из выражения (2) при предельном значении параметров, характеризующих внешнюю нагрузку ($q = q_*$).

Из (1) — (3) можно получить

$$q_* = \frac{\pi K_c \sqrt{b+a}}{f(a, b)} \tag{4}$$

$$f(a, b) = \int_{-a}^{-R} \left(\frac{R^2}{2\xi^2} - \frac{3}{2}\frac{R^4}{\xi^4}\right)\left(\frac{a+\xi}{b-\xi}\right)^{1/2} d\xi + \int_{R}^{b} \left(\frac{R^2}{2\xi^2} - \frac{3}{2}\frac{R^4}{\xi^4}\right)\left(\frac{a+\xi}{b-\xi}\right)^{1/2} d\xi$$

---

[1] Устойчивость пластины не рассматриваем, считая ее достаточной.

Вычислив интегралы, получим

$$f(a, b) = A(a, b, R)\sqrt{(a+R)(b-R)} - A(a, b, -R)\sqrt{(a-R)(b+R)} -$$
$$- B(a, b, R)\ln\frac{[\sqrt{ab} + \sqrt{(a-R)(b+R)}]^2 + R^2}{[\sqrt{ab} + \sqrt{(a+R)(b-R)}]^2 + R^2}$$
$$A(a, b, \pm R) = -\left[\frac{R^2}{b^2}\left(\frac{5}{8} + \frac{1}{8}\frac{b}{a}\right) \pm \frac{R^3}{b^3}\left(\frac{15}{16} + \frac{1}{4}\frac{b}{a} - \frac{3}{16}\frac{b^2}{a^2}\right)\right]$$
$$B(a, b, \pm R) = \frac{R^2\sqrt{ab}}{32a^3b^4}\,[8a^2b^2(a+b) - 3R^2(7a^3 - 3a^2b + 5ab^2 - b^3)]$$

Если обе трещины имеют одинаковую длину ($l_1 = l_2 = l$) и $a = b$, то, полагая $\varepsilon = l / R$, получим

$$q_* = -\frac{\pi K_c}{\sqrt{2R}}\frac{(1+\varepsilon)^4}{\sqrt{2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3}} \tag{5}$$

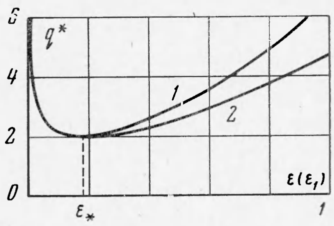
Если пластина ослаблена круговым отверстием и одной радиальной трещиной (т. е. $l_2 = 0$, $l_1 > 0$) и $a = R$, получим

$$q_* = \frac{\pi K_c \sqrt{1+\lambda}}{\sqrt{R(1+\varepsilon_1)}}\frac{1}{f(\lambda)}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{l_1}{R} \tag{6}$$

$$\lambda = \frac{R}{b} = \frac{1}{1+\varepsilon_1}, \quad f(\lambda) = A(\lambda)\sqrt{2\lambda(1-\lambda)} - B(\lambda)\ln\frac{1+\lambda}{[1+\sqrt{2(1-\lambda)}]^2 + \lambda}$$

$$A(\lambda) = {}^1/_{16}(\lambda - 14\lambda^2 - 15\lambda^3), \qquad B(\lambda) = {}^1/_{32}\,\lambda\sqrt{\lambda}\,(11 - 7\lambda + 9\lambda^2 - 21\lambda^3)$$

Можно показать, что в интересующей нас области изменения ε ($\varepsilon > 0$) функция $q_* = q_*(\varepsilon)$, определяемая выражением (5) и взятая по модулю, имеет минимум и притом один (при $\varepsilon = \varepsilon_* = \sqrt{7/5} - 1 \approx 0.18$). Таким образом, вначале (при $\varepsilon < \varepsilon_*$) распространение трещин неустойчиво, а затем (при $\varepsilon > \varepsilon_*$) оно становится устойчивым, т. е. для дальнейшего развития трещин необходимо увеличение нагрузки. Физически это объясняется тем, что в соответствии с (1) растянутая зона вблизи круглого отверстия в пластине имеет ограниченную протяженность (соответствующую $\varepsilon \approx 0.732$), а далее расположена зона небольших сжимающих напряжений. Аналогичный характер носит изменение функции $q_* = q_*(\varepsilon_1)$, описываемой выражением (6). Подобный переход трещины от неустойчивого к устойчивому распространению для другой задачи был отмечен ранее Г. И. Баренблаттом [6].



Фиг. 2

В соответствии с формулами (5), (6), на фиг. 2 построены кривые приведенных предельных нагрузок $q^* = |q_*| K_c^{-1}\pi^{-1}\sqrt{R}$ в зависимости от отношений $\varepsilon = l / R$ и $\varepsilon_1 = l_1 / R$. Кривая *2* соответствует двум трещинам равной длины, кривая *1* — одной трещине.

Поступила 28 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов М. Я. Элементы теории хрупкого разрушения. ПМТФ, 1961, № 3.
2. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, «Наукова Думка», 1968.
3. Камiньский А. О. Крихке руйнування бiля отворiв у стиснутих тiлах. Доповiдi АН УРСР, Сер. А, 1967, № 3.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
5. Irwin G. R. Fracture. In: «Handbuch der Physik», Berlin, Springer Verlag, 1958, Bd. 6.
6. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.