

УДК 593.3

МАЛОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СВОБОДНО ОПЕРТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СОСТАВНЫХ ПЛИТ

А. Г. Акопян

Северо-Кавказский филиал Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ), 357340 Лермонтов, Россия
E-mail: manakofoto@yandex.ru

Исследуется напряженное состояние в окрестности общего ребра свободно опертой составной клиновидной плиты, находящейся под действием поперечной нагрузки. Материалы составляющих плит являются цилиндрически ортотропными. Задача решается с использованием классической теории анизотропных плит. Построены уравнения гиперповерхности, представляющей собой в пространстве физических и геометрических параметров границу области параметров, для которых в окрестности общего ребра составной плиты напряженное состояние является малонапряженным (напряжения в точках общего ребра составной плиты ограничены).

Ключевые слова: малонапряженное состояние, изгиб плит, анизотропный, составной.

DOI: 10.15372/PMTF20190413

Исследуется малонапряженное состояние [1–3] в окрестности общего ребра свободно опертой составной клиновидной плиты, находящейся под действием поперечной нагрузки. Материалы составляющих плит являются цилиндрически ортотропными. Задача решается с использованием классической теории анизотропных плит [4]. Исследование напряженного состояния в окрестности общего ребра составной клиновидной изотропной оболочки с использованием классической теории анизотропных плит выполнено в работе [5], с использованием уточненных уравнений теории пластин и оболочек Рейсснера — в работе [6]. Результаты экспериментального исследования малонапряженного состояния в клиновидной плите представлены в работе [7].

В данной работе рассматривается плита, составленная из двух клиновидных плит, соединенных по боковым поверхностям. Задача решается в цилиндрической системе координат, начало которой расположено в вершине угла, образованного линиями пересечения срединной плоскости составной плиты с ее боковыми гранями. На рис. 1 показана область составной плиты в плоскости $z = 0$. Предполагается, что главные оси анизотропии совпадают с осями цилиндрической системы координат.

Толщину плиты обозначим h , индексы $i = 1, 2$ соответствуют величинам в областях $0 \leq \theta \leq \alpha$, $-h/2 \leq z \leq h/2$ и $-\beta \leq \theta \leq 0$, $-h/2 \leq z \leq h/2$ в окрестности точки $r = 0$. Рассмотрим составную анизотропную свободно опертую плиту.

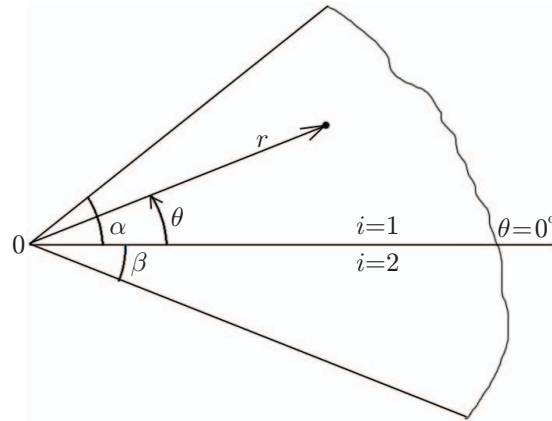


Рис. 1. Область срединной поверхности склеенных клиновидных плит

Прогиб w_i ($i = 1, 2$) каждой из областей 1, 2 ортотропной плиты в окрестности точки $r = 0$ определяется из уравнения [4]

$$D_{ri} \frac{\partial^4 w_i}{\partial r^4} + 2D_{r\theta i} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 w_i}{\partial r^2 \partial \theta^2} + D_{\theta i} \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w_i}{\partial \theta^4} + 2D_{ri} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w_i}{\partial r^3} - \\ - 2D_{r\theta i} \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w_i}{\partial r \partial \theta^2} - D_{\theta i} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} + 2(D_{\theta i} + D_{r\theta i}) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} + D_{\theta i} \frac{1}{r^3} \frac{\partial w_i}{\partial r} = 0, \quad (1)$$

где D_{ri} , $D_{\theta i}$, $D_{r\theta i}$ — жесткости каждой анизотропной плиты:

$$D_{ri} = \frac{E_{ri}}{12(1 - \nu_{ri}\nu_{\theta i})} h^3, \quad D_{\theta i} = \frac{E_{\theta i}}{12(1 - \nu_{ri}\nu_{\theta i})} h^3, \quad D_{r\theta i} = D_{ri}\nu_{\theta i} + 2D_{ki}, \quad D_{ki} = \frac{G_i}{12} h^3,$$

E_{ri} , $E_{\theta i}$, ν_{ri} , $\nu_{\theta i}$, G_i — константы ортотропного материала каждой плиты.

Представим прогиб плиты в форме

$$w_i(r, \theta) = r^{\lambda+1} f_i(\theta, \lambda), \quad (2)$$

где f_i , λ — искомые функции и постоянная. Подставляя (2) в уравнение (1), получаем

$$f_i'''' + 2(k_{1i}\lambda^2 + 1)f_i'' + (\lambda^2 - 1)(k_{2i}\lambda^2 - 1)f_i = 0 \quad (3)$$

($k_{1i} = D_{r\theta i}/D_{\theta i}$; $k_{2i} = D_{ri}/D_{\theta i}$).

Корни характеристического уравнения для уравнения (3) определяются из следующего выражения:

$$r_{(1,2,3,4)i} = \pm \sqrt{-(k_{1i}\lambda^2 + 1) \pm \lambda \sqrt{(k_{1i}^2 - k_{2i})\lambda^2 + 2k_{1i} + k_{2i} + 1}} = \pm \sqrt{-a \pm b}. \quad (4)$$

Рассмотрим следующие три случая:

1) все четыре корня (4) мнимые ($a \geq b$; b — действительная величина):

$$r_{(1,2,3,4)i} = \pm \omega_{ki} i$$

(случай $k = 1$ соответствует нижнему знаку в выражении под радикалом (4), $k = 2$ — верхнему);

2) все корни (4) комплексные (b — мнимая величина):

$$r_{(1,2,3,4)i} = \pm(\xi_i \pm i\eta_i);$$

3) одна пара корней действительная, другая — мнимая ($a < b$; b — действительная величина):

$$r_{(1,2)i} = \pm\xi_i, \quad r_{(3,4)i} = \pm\eta_i i.$$

Для каждого случая запишем общее решение уравнения (3):

$$1) f_i = A_i \cos \omega_{1i}\theta + B_i \sin \omega_{1i}\theta + C_i \cos \omega_{2i}\theta + E_i \sin \omega_{2i}\theta;$$

$$2) f_i = A_i \operatorname{ch} \xi_i \theta \cos \eta_i \theta + B_i \operatorname{sh} \xi_i \theta \cos \eta_i \theta + C_i \operatorname{ch} \xi_i \theta \sin \eta_i \theta + E_i \operatorname{sh} \xi_i \theta \sin \eta_i \theta;$$

$$3) f_i = A_i \operatorname{ch} \xi_i \theta + B_i \operatorname{sh} \xi_i \theta + C_i \cos \eta_i \theta + E_i \sin \eta_i \theta.$$

Здесь A_i, B_i, C_i, E_i — произвольные постоянные. Тогда для моментов и перерезывающих сил имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} M_{ri} &= -D_{ri} r^{\lambda-1} [\nu_{\theta i} f_i'' + (\lambda + 1)(\lambda + \nu_{\theta i}) f_i], \\ M_{\theta i} &= -D_{\theta i} r^{\lambda-1} [f_i'' + (\lambda + 1)(\nu_{ri} \lambda + 1) f_i], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} M_{r\theta i} &= -2D_{ki} r^{\lambda-1} f_i'; \\ Q_{ri} &= -r^{\lambda-2} [(D_{r\theta i} \lambda - D_{\theta i}) f_i'' + (\lambda + 1)(D_{ri} \lambda^2 - D_{\theta i}) f_i], \\ Q_{\theta i} &= -r^{\lambda-2} [D_{\theta i} f_i''' + (\lambda + 1)(D_{r\theta i} \lambda + D_{\theta i}) f_i']. \end{aligned} \quad (6)$$

Для обобщающей перерезывающей силы получаем

$$V_{\theta i} = Q_{\theta i} + \frac{\partial M_{r\theta i}}{\partial r} = -r^{\lambda-2} (D_{\theta i} f_i''' + g_i f_i'), \quad (7)$$

где

$$g_i = (\lambda + 1)D_{\theta i} + \lambda[(\lambda + 1)D_{r\theta i} + 2(\lambda - 1)D_{ki}].$$

На контактной поверхности ($\theta = 0$) должны быть выполнены условия непрерывности прогиба, угла поворота, изгибающего момента и обобщенной перерезывающей силы:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2, \quad f_1' = f_2', \quad D_{\theta 1} f_1''' + g_1 f_1' = D_{\theta 2} f_2''' + g_2 f_2', \\ D_{\theta 1} [f_1'' + (\lambda + 1)(\nu_{r1} \lambda + 1) f_1] &= D_{\theta 2} [f_2'' + (\lambda + 1)(\nu_{r2} \lambda + 1) f_2]. \end{aligned} \quad (8)$$

Для свободно опертых плит имеем

$$f_i'' = f_i = 0 \quad (\theta = \alpha, \quad \theta = -\beta). \quad (9)$$

Подставляя значение f_i в граничные условия (8), (9), получаем следующие системы восьми линейных уравнений относительно восьми постоянных A_i, B_i, C_i, E_i для каждого из трех рассмотренных выше случаев соответственно:

— случай 1:

$$\begin{aligned} A_1 + C_1 - A_2 - C_2 &= 0, \\ \omega_{11} B_1 + \omega_{21} E_1 - \omega_{12} B_2 - \omega_{22} E_2 &= 0, \\ D_{\theta 1} q_{11} A_1 + D_{\theta 1} q_{21} C_1 - D_{\theta 2} q_{12} A_2 - D_{\theta 2} q_{22} C_2 &= 0, \\ \omega_{11} p_{11} B_1 + \omega_{21} p_{21} E_1 - \omega_{12} p_{12} B_2 - \omega_{22} p_{22} E_2 &= 0, \\ A_1 \cos \omega_{11} \alpha + B_1 \sin \omega_{11} \alpha + C_1 \cos \omega_{21} \alpha + E_1 \sin \omega_{21} \alpha &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
A_1\omega_{11}^2 \cos \omega_{11}\alpha + B_1\omega_{11}^2 \sin \omega_{11}\alpha + C_1\omega_{21}^2 \cos \omega_{21}\alpha + E_1\omega_{21}^2 \sin \omega_{21}\alpha &= 0, \\
A_2 \cos \omega_{12}\beta - B_2 \sin \omega_{12}\beta + C_2 \cos \omega_{22}\beta - E_2 \sin \omega_{22}\beta &= 0, \\
A_2\omega_{12}^2 \cos \omega_{12}\beta - B_2\omega_{12}^2 \sin \omega_{12}\beta + C_2\omega_{22}^2 \cos \omega_{22}\beta - E_2\omega_{22}^2 \sin \omega_{22}\beta &= 0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
p_{ji} &= (\lambda + 1 - \omega_{ji}^2)D_{\theta i} + \lambda[(\lambda + 1)D_{r\theta i} + 2(\lambda - 1)D_{ki}], \\
q_{ji} &= (\lambda + 1)(\nu_{ri}\lambda + 1) - \omega_{ji}^2, \quad j = 1, 2;
\end{aligned}$$

— случай 2:

$$\begin{aligned}
A_1 - A_2 &= 0, \quad \xi_1 B_1 + \eta_1 C_1 - \xi_2 B_2 - \eta_2 C_2 = 0, \\
\omega_1 D_{\theta 1} A_1 + 2D_{\theta 1} \xi_1 \eta_1 E_1 - \omega_2 D_{\theta 2} A_2 - 2D_{\theta 2} \xi_2 \eta_2 E_2 &= 0, \\
p_1 B_1 + q_1 C_1 - p_2 B_2 - q_2 C_2 &= 0, \tag{11} \\
A_1 \operatorname{ch} \xi_1 \alpha \cos \eta_1 \alpha + B_1 \operatorname{sh} \xi_1 \alpha \cos \eta_1 \alpha + C_1 \operatorname{ch} \xi_1 \alpha \sin \eta_1 \alpha + E_1 \operatorname{sh} \xi_1 \alpha \sin \eta_1 \alpha &= 0, \\
[(\xi_1^2 - \eta_1^2) \operatorname{ch} \xi_1 \alpha \cos \eta_1 \alpha - 2\xi_1 \eta_1 \operatorname{sh} \xi_1 \alpha \sin \eta_1 \alpha] A_1 + \\
+ [(\xi_1^2 - \eta_1^2) \operatorname{sh} \xi_1 \alpha \cos \eta_1 \alpha + 2\xi_1 \eta_1 \operatorname{ch} \xi_1 \alpha \sin \eta_1 \alpha] B_1 + \\
+ [(\xi_1^2 - \eta_1^2) \operatorname{ch} \xi_1 \alpha \sin \eta_1 \alpha + 2\xi_1 \eta_1 \operatorname{sh} \xi_1 \alpha \cos \eta_1 \alpha] C_1 + \\
+ [(\xi_1^2 - \eta_1^2) \operatorname{sh} \xi_1 \alpha \sin \eta_1 \alpha + 2\xi_1 \eta_1 \operatorname{ch} \xi_1 \alpha \cos \eta_1 \alpha] E_1 &= 0, \\
A_2 \operatorname{ch} \xi_2 \beta \cos \eta_2 \beta - B_2 \operatorname{sh} \xi_2 \beta \cos \eta_2 \beta - C_2 \operatorname{ch} \xi_2 \beta \sin \eta_2 \beta + E_2 \operatorname{sh} \xi_2 \beta \sin \eta_2 \beta &= 0, \\
[(\xi_2^2 - \eta_2^2) \operatorname{ch} \xi_2 \beta \cos \eta_2 \beta - 2\xi_2 \eta_2 \operatorname{sh} \xi_2 \beta \sin \eta_2 \beta] A_2 - \\
- [(\xi_2^2 - \eta_2^2) \operatorname{sh} \xi_2 \beta \cos \eta_2 \beta - 2\xi_2 \eta_2 \operatorname{ch} \xi_2 \beta \sin \eta_2 \beta] B_2 - \\
- [(\xi_2^2 - \eta_2^2) \operatorname{ch} \xi_2 \beta \sin \eta_2 \beta + 2\xi_2 \eta_2 \operatorname{sh} \xi_2 \beta \cos \eta_2 \beta] C_2 + \\
+ [(\xi_2^2 - \eta_2^2) \operatorname{sh} \xi_2 \beta \sin \eta_2 \beta + 2\xi_2 \eta_2 \operatorname{ch} \xi_2 \beta \cos \eta_2 \beta] E_2 &= 0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\omega_i &= \xi_i^2 - \eta_i^2 + (\lambda + 1)(\nu_{ri}\lambda + 1), \\
p_i &= \xi_i \{ (\xi_i^2 - 3\eta_i^2 + \lambda + 1)D_{\theta i} + \lambda[(\lambda + 1)D_{r\theta i} + 2(\lambda - 1)D_{ki}] \}, \\
q_i &= \eta_i \{ (3\xi_i^2 - \eta_i^2 + \lambda + 1)D_{\theta i} + \lambda[(\lambda + 1)D_{r\theta i} + 2(\lambda - 1)D_{ki}] \};
\end{aligned}$$

— случай 3:

$$\begin{aligned}
A_1 + C_1 - A_2 - C_2 &= 0, \\
\xi_1 B_1 + \eta_1 E_1 - \xi_2 B_2 - \eta_2 E_2 &= 0, \\
a_1 D_{\theta 1} A_1 - b_1 D_{\theta 1} C_1 - a_2 D_{\theta 2} A_2 + b_2 D_{\theta 2} C_2 &= 0, \\
\xi_1 p_1 B_1 - \eta_1 q_1 E_1 - \xi_2 p_2 B_2 + \eta_2 q_2 E_2 &= 0, \tag{12} \\
A_1 \operatorname{ch} \xi_1 \alpha + B_1 \operatorname{sh} \xi_1 \alpha + C_1 \cos \eta_1 \alpha + E_1 \sin \eta_1 \alpha &= 0, \\
A_1 \xi_1^2 \operatorname{ch} \xi_1 \alpha + B_1 \xi_1^2 \operatorname{sh} \xi_1 \alpha - C_1 \eta_1^2 \cos \eta_1 \alpha - E_1 \eta_1^2 \sin \eta_1 \alpha &= 0, \\
A_2 \operatorname{ch} \xi_2 \beta - B_2 \operatorname{sh} \xi_2 \beta + C_2 \cos \eta_2 \beta - E_2 \sin \eta_2 \beta &= 0, \\
A_2 \xi_2^2 \operatorname{ch} \xi_2 \beta - B_2 \xi_2^2 \operatorname{sh} \xi_2 \beta - C_2 \eta_2^2 \cos \eta_2 \beta + E_2 \eta_2^2 \sin \eta_2 \beta &= 0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= \xi_i^2 + (\lambda + 1)(\nu_{ri} + 1), & b_i &= \eta_i^2 - (\lambda + 1)(\nu_{ri} + 1), \\ p_i &= (\xi_i^2 + \lambda + 1)D_{\theta i} + \lambda[(\lambda + 1)D_{r\theta i} + 2(\lambda - 1)D_{ki}], \\ q_i &= (\eta_i^2 - \lambda - 1)D_{\theta i} - \lambda[(\lambda + 1)D_{r\theta i} + 2(\lambda - 1)D_{ki}]. \end{aligned}$$

Для того чтобы существовало нетривиальное решение однородных систем (10)–(12) линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_i , B_i , C_i , E_i , определители этих систем должны быть равны нулю:

$$\Delta(\lambda, \alpha, \beta, \nu_{ri}, \nu_{\theta i}, E_{ri}, E_{\theta i}, G_i) = 0. \quad (13)$$

Из (2), (5) следует, что если $0 < \operatorname{Re} \lambda_1 < 1$, то при приближении к вершине угла ($r \rightarrow 0$) напряжения (моменты) неограниченно возрастают, при этом порядок особенности равен $|\operatorname{Re} \lambda_1 - 1|$; если $\operatorname{Re} \lambda_1 > 1$, то при $r \rightarrow 0$ напряжения уменьшаются до нуля.

Таким образом, исследование характера напряженного состояния в окрестности общего ребра составной анизотропной плиты при изгибе сводится к поиску корня λ трансцендентного уравнения (13) с наименьшей положительной частью для фиксированных углов и механических характеристик соединяемых материалов.

Разработана программа для вычисления определителей (13). Проведены численные расчеты для различных значений параметров анизотропии: 1) $\gamma = 1$, $G_i = \mu_i$; 2) $\gamma = 1$, $G_i = 4\mu_i$; 3) $\gamma = 2$, $G_i = \mu_i$. Здесь $\gamma = E_1/E_2$; $\mu_i = E_i/(1 + \nu_i)$; $\nu_{ri} = \nu_{\theta i} = 0,25$. В численных расчетах учитывается, что $E_{ri} = E_{\theta i}$ [4]. Случай $\gamma = 1$ соответствует однородной (несоставной) плите ($E_{r1} = E_{r2}$, $E_{\theta 1} = E_{\theta 2}$, $\nu_{r1} = \nu_{r2}$, $\nu_{\theta 1} = \nu_{\theta 2}$, $G_1 = G_2$), случай $G_i = \mu_i$ — изотропной плите ($D_{ri} = D_{\theta i} = D_{r\theta i} = D_i = E_i h^3 / [12(1 - \nu_i^2)]$).

Некоторые результаты численных расчетов значений корня λ в зависимости от угла $\varphi = \alpha + \beta$ ($\alpha = 10^\circ$) приведены в таблице. Из таблицы следует, в частности, что если для однородной плиты при $\varphi = 90^\circ$ напряжения в вершине конечны, то для однородной анизотропной и составной изотропной плит имеет место концентрация напряжений.

Для того чтобы решить обратную задачу [1–3], построим кривые, которые при фиксированных значениях механических характеристик материалов на плоскости (α, β) разделяют области конечных и бесконечных напряжений (моментов). Полагая, что вблизи границы области концентрации напряжений наименьший корень уравнения (13) действительный, примем в этом уравнении $\lambda = 1$ и найдем наименьшие положительные значения углов α и β в зависимости от параметров анизотропии. Геометрические места соответствующих точек в плоскости (α, β) образованы предельными кривыми, разделяющими эту

Значения корня характеристического уравнения λ при $\alpha = 10^\circ$ и различных значениях угла φ

$\varphi, ^\circ$	λ		
	ОИП	ОАП	СИП
60	2,00	1,030	1,75
70	1,57	0,840	1,41
90	1,00	0,570	0,93
100	0,80	0,400	0,75
110	0,63	0,380	0,60
360	0,50	0,307	0,49

Примечание. ОИП — однородная изотропная плита, ОАП — однородная анизотропная плита, СИП — составная изотропная плита.

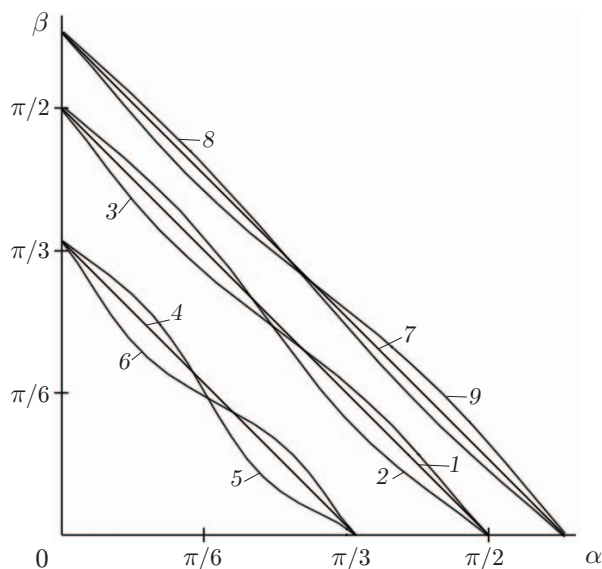


Рис. 2. Кривые в плоскости (α, β) , разделяющие области, в которых напряжения бесконечны, и области, в которых напряжения конечны:

1 — $\gamma = 1$, $G_i = \mu_i$, 2 — $\gamma = 1/2$, $G_i = \mu_i$, 3 — $\gamma = 2$, $G_i = \mu_i$, 4 — $\gamma = 1$, $G_i = 4\mu_i$, 5 — $\gamma = 1/2$, $G_i = 4\mu_i$, 6 — $\gamma = 2$, $G_i = 4\mu_i$, 7 — $\gamma = 1$, $G_i = \mu_i/4$, 8 — $\gamma = 1/2$, $G_i = \mu_i/4$, 9 — $\gamma = 2$, $G_i = \mu_i/4$; 1, 4, 7 — однородная плита, 2, 3, 5, 6, 8, 9 — составная плита

плоскость на две области (рис. 2). В области выше кривых при $r = 0$ напряжения бесконечны, в области ниже кривых при $r = 0$ напряжения конечны (области малонапряженного состояния).

В рассматриваемой задаче для однородной изотропной плиты в случае угла раствора $\varphi > \pi/2$ (кроме $\varphi = \pi$) всегда имеет место концентрация напряжений в вершине, а в случае $\varphi < \pi/2$ концентрация напряжений отсутствует. Для однородной анизотропной плиты, а также для составной изотропной и анизотропной плит эта закономерность нарушается (см. рис. 2). Среди линий 1, 4, 7, соответствующих однородной плите, линия 1 соответствует изотропной плите, линии 4, 7 — анизотропной.

Таким образом, показатель степени концентрации перерезывающих сил вблизи угловой точки на единицу больше показателя степени концентрации моментов, что обусловлено использованием классической теории изгиба плит.

Рассмотренную в данной работе задачу можно исследовать с использованием уточненной теории изгиба анизотропных плит [8].

Результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы при разработке технологических процессов сварки, наплавки, пайки и склеивания плит из разнородных анизотропных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К. С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987.
2. Задоян М. А. Об условиях малонапряженности составных плит // Докл. РАН. 1993. Т. 332, № 3. С. 319–321.
3. Акопян А. Г. Малонапряженное состояние неоднородно-составных клиньев при смешанных граничных условиях // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 3. С. 149–156.
4. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.

5. **Williams M. L.** Surface stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending // Proc. of the 1st U.S. Nat. congress of applied mechanics, Chicago (USA), June 1951. Chicago: Illinois Inst. Technol., 1952. P. 325–329.
6. **Burton W. S., Sinclair G. B.** On the singularities in Reissner's theory for the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1986. V. 53, N 1. P. 220–222.
7. **Геворкян Г. В., Задоян М. А., Саакян Г. Р., Саркисян С. М.** Экспериментальные исследования прочности составных плит при изгибе // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 4. С. 211–215.
8. **Амбарцумян С. А.** Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967.

*Поступила в редакцию 5/X 2018 г.,
после доработки — 16/I 2019 г.
Принята к публикации 25/II 2019 г.*
