

меров частиц на гладкой поверхности. Для частиц диаметром $d > 1 \cdot 10^{-4}$ м ($Re_1^* = 18,12$, $Re_2^* = 22,62$, $Re_3^* = 29,8$) ψ не зависит от вязкости потока. Точками 4—8 приведены результаты опытов [12] по сдвух твердых частиц различного размера с поверхностями с равномерно распределенной песчаной шероховатостью (высота элементов $K = 1 \cdot 10^{-5}$, $1 \cdot 10^{-3}$, $2 \cdot 10^{-3}$, $3 \cdot 10^{-3}$ и $4 \cdot 10^{-3}$ м соответственно). Как видно из рис. 6, данные для $K = 1 \cdot 10^{-5}$ и $K = 1 \cdot 10^{-3}$ м согласуются с нашими. Это связано с тем, что высота $K \leq 1 \cdot 10^{-3}$ м слабо влияет на подвижность твердых частиц. Начиная с $K = 2 \cdot 10^{-3}$ м и выше, влияние шероховатости существенно при $\lg Re_j^* < 2,0$. Возможно, этим и объясняется расхождение результатов А. Шильдса, В. С. Кнороза и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гришанин К. В. Динамика русловых потоков.— Л.: Гидрометеоздат, 1979.
2. Михалев М. А. О критериальных условиях начала трогания частиц несвязных зернистых грунтов, расположенных в потоке жидкости на дне и на береговом откосе.— В кн.: Известия Всесоюз. науч.-иссл. ин-та гидротехники им. Б. Е. Веденеева. Л.: Энергия, 1978, т. 126.
3. Львовский Е. Н. Статистические методы построения эмпирических формул.— М.: Высш. шк., 1982.
4. Соколов Н. А. Дюны, их образование, развитие и внутреннее строение. Спб., 1884.
5. Shepil W. S. Transport of soil and snow by wind.— Met. Monographs, 1965, v. 6.
6. Бютнер Э. К. Динамика приповерхностного слоя воздуха.— Л.: Гидрометеоздат, 1978.
7. Гончаров В. Н. Движение наносов.— Л.— М.: Госстройиздат, 1938.
8. Дюнин А. К. Механика метелей.— Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1963.
9. Ханалиев А. К вопросу об экспериментальном определении скорости трогания твердых частиц произвольной формы в зависимости от их удельного веса и диаметра.— В кн.: Аэродинамика смесей. Ташкент: Фан, 1983.
10. Welschof G. Pneumatische Förderung bei grossen Fördergutkonzentrationen.— Düsseldorf: Vdi-Verlag GMBH, 1962. Рус. пер. Вельшоф Г. Пневматический транспорт при высокой концентрации перемещаемого материала.— М.: Колос, 1964.
11. Мирзхулава Ц. Е. Размыв русел и методика оценки их устойчивости.— М.: Колос, 1967.
12. Азизов А., Джураев Т. Д., Кадыров Х. Г. Исследование влияния интенсивности турбулентности и шероховатости обтекаемой поверхности на возникновение дефляции.— В кн.: Материалы Всесоюз. конф. по механике сплошной среды: Механика сплошной среды. Ташкент: Фан, 1982.

Поступила 23/VIII 1985 г.

УДК 532.526.2

ОБЩАЯ СХЕМА РЕЖИМОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В. В. Боголепов

(Москва)

Различные локальные особенности на поверхности тела: разрывы или резкие изменения краевых условий, отрыв или присоединение потока, неровности и др.— могут оказывать значительное влияние на местные и глобальные характеристики его обтекания [1]. Это обстоятельство инициирует постоянный интерес к течениям в локальных областях, которые кроме большой практической значимости часто обладают еще немалой теоретической новизной (см., например, [2—6], где выполнены систематические исследования плоских локальных областей течения).

Однако большинство локальных областей пространственные, и если в изучении плоских областей достигнуты значительные успехи, то для пространственных областей получены лишь отдельные решения часто при использовании значительных упрощений [7—19]. Кроме того, из-за отсутствия систематических исследований трудно определить границы существования различных режимов течений в локальных пространственных областях и предельные переходы, которые позволяют перейти от одного режима обтекания к другому.

В работе выполнены систематические исследования режимов течения в локальных пространственных областях, для каждого из них сформулированы краевые задачи, изучены основные свойства их решений, построена общая классификационная схема режимов течений.

1. Рассматривается обтекание плоской полубесконечной пластины равномерным дозвуковым или сверхзвуковым потоком вязкого газа при числах Маха $(M_\infty^2 - 1) \sim O(1)$ и больше, но докритических числах Рейнольдса. Пусть на поверхности пластины на некотором расстоянии l от ее передней кромки находится небольшая пространственная выпуклость или вмятина (рис. 1). Строится стационарное решение уравнений Навье — Стокса для пространственной области возмущенного ламинарного течения при стремлении $Re_\infty = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty = \varepsilon^{-2}$ к бесконечности. Здесь $\rho_\infty, u_\infty, \mu_\infty$ — значения плотности, скорости и коэффициента динамической вязкости в невозмущенном равномерном набегающем потоке. В дальнейшем будут использоваться только безразмерные величины, для этого все линейные размеры относятся к l , давление p — к $\rho_\infty u_\infty^2$, энтальпия h — к u_∞^2 , остальные функции течения — к своим значениям в невозмущенном равномерном набегающем потоке.

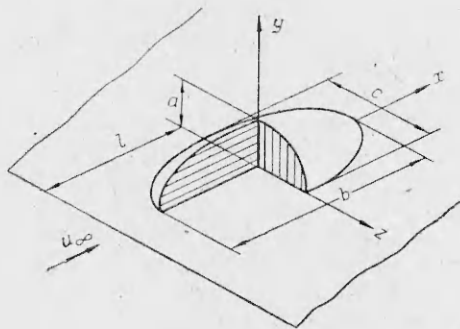
Относительно размеров малой неровности предполагается, что ее характерная толщина a по порядку величины меньше или равна характерной толщине невозмущенного пограничного слоя на пластине в этом месте — $a \lesssim \delta \sim O(\varepsilon)$, а ее характерная протяженность b по порядку величины больше или равна a и меньше или равна единице — $a \lesssim b \lesssim 1$. Характерная ширина неровности c по порядку величины может быть больше или равна a — $c \gtrsim a$. При $a > b$ или $a > c$ течения могут иметь те же особенности, что и при $a \sim b$ или $a \sim c$, только продольный или поперечный размеры области возмущенного течения будут определяться величиной a . Очевидно еще, что $a, b, c > \varepsilon^2$ (для областей течения, у которых один из характерных размеров соизмерим по порядку величины с характерной длиной свободного пробега молекул газа $\sim O(\varepsilon^2)$, уже не будут справедливы уравнения Навье — Стокса), т. е. характерные толщина a , протяженность b и ширина c неровности удовлетворяют соотношениям

$$(1.1) \quad \varepsilon^2 < a \lesssim \varepsilon, \quad a \lesssim b \lesssim 1, \quad a \lesssim c.$$

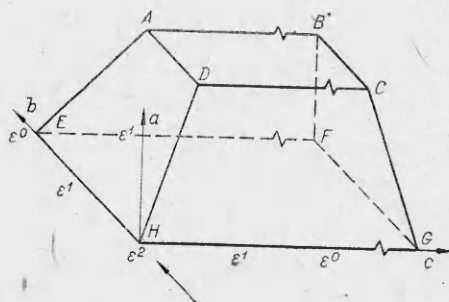
Значит, исследуемая область изменения величин a, b и c ограничена гранями усеченной пирамиды $ABCDEFGH$ (рис. 2). Среди неровностей с характерными размерами (1.1) рассматриваются только те, которые индуцируют большие локальные градиенты давления $\partial p / \partial x > 1$ или $\partial p / \partial z > 1$ либо для которых в областях возмущенного течения велики конвективные или диффузионные члены уравнений Навье — Стокса ($\rho u \partial u / \partial x > 1$ или $\varepsilon^2 \mu \partial^2 u / \partial y^2 > 1$, например).

2. Пусть сначала $c > b$, т. е. рассматривается обтекание широких в поперечном направлении неровностей типа траншеи или вала $\varepsilon^2 < a \lesssim b < c$. Очевидно, в этом случае растекание газа в стороны будет мало и основные оценки для функций течения в возмущенных областях около таких неровностей совпадут с оценками для случая обтекания плоских неровностей.

Если толщина неровности a настолько мала, что возмущения функций течения создаются только за счет взаимодействия неровности с присте-



Р и с. 1



Р и с. 2

ночной дозвуковой сдвиговой частью невозмущенного пограничного слоя на пластине, то в слое нелинейных возмущений вблизи поверхности неровности, где возмущение продольной скорости по порядку величины равно самой скорости $u \sim \Delta u \sim \Delta p^{1/2}$,

$$(2.1) \quad u \sim \Delta u \sim O(a/\varepsilon), \quad \Delta p \sim O(a^2/\varepsilon^2).$$

В другом предельном случае для «толстых» неровностей, когда возмущение давления создается за счет взаимодействия неровности с невозмущенным равномерным набегающим потоком, из обычной теории малых возмущений следует

$$(2.2) \quad \Delta p \sim O(a/b).$$

В переходном случае, когда справедливы обе оценки для возмущения давления (2.1) и (2.2) и возмущения функций течения создаются за счет взаимодействия неровности со всем пограничным слоем на пластине,

$$(2.3) \quad ab \sim O(\varepsilon^2).$$

Если слой нелинейных возмущений вязкий, то его характерная толщина $\delta_1 \sim O(\varepsilon b^{1/2}/\Delta p^{1/4})$, и, с учетом того что вблизи поверхности тела функции течения изменяются пропорционально расстоянию от нее ($u \sim y/\varepsilon$, например), для всех режимов обтекания неровностей будет выполняться

$$(2.4) \quad \delta_1 \sim O(\varepsilon b^{1/3}), \quad \Delta p \sim O(b^{2/3}).$$

Оценки (2.1)–(2.4) позволяют построить возмущенное течение в плоскости x, y около плоских или широких в поперечном направлении неровностей. Эти исследования выполнены в [3], где приведена классификационная схема соответствующих режимов течений (рис. 3).

Область изменения толщины a и протяженности b широких в поперечном направлении неровностей ограничена многоугольником $GCJKL$. Линии LK ($a \sim O(\varepsilon b^{2/3})$) и KJ ($a \sim O(b^2)$) отсекают режимы течений, при которых индуцируются малые градиенты давления $\partial p/\partial x$.

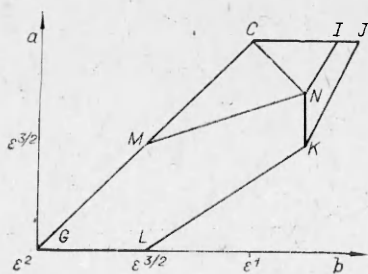
В области $GCNKL$ возмущения функций течения создаются только за счет взаимодействия неровности с пристеночной частью пограничного слоя на пластине, здесь справедливы оценки (2.1).

В области $CJKN$ возмущения функций течения создаются за счет взаимодействия неровности с равномерным набегающим потоком и здесь работает оценка (2.2).

На линиях CN ($a \sim O(\varepsilon^2/b)$) и NK ($b \sim O(\varepsilon^{3/4})$) изменение толщины вытеснения пристеночной области возмущенного течения происходит за счет взаимодействия неровности с пристеночной частью пограничного слоя на пластине, а возмущение давления создается за счет взаимодействия эффективной толщины неровности (собственно толщина неровности плюс толщина вытеснения пристеночной области) с равномерным набегающим потоком.

На линиях MN ($a \sim O(\varepsilon b^{1/3})$) и NI ($a \sim O(b^{5/3})$) неровности вызывают вязкие нелинейные возмущения, здесь возмущение напряжения трения τ_{xy} по порядку величины равно своему основному значению в невозмущенном пограничном слое у поверхности пластины.

На линии GM ($a \sim O(b)$) течение в возмущенной области описывается уравнениями Стокса, в точке M ($a \sim b \sim O(\varepsilon^{3/2})$) — уравнениями Навье — Стокса для несжимаемого газа [20]. На линии MN реализуется компенсационный режим обтекания неровностей [21], а в точке N ($a \sim O(\varepsilon^{5/4})$, $b \sim O(\varepsilon^{3/4})$) — режим свободного взаимодействия [2]. На линии NI обтекание «толстых» неровностей опи-



Р и с. 3

сывается уравнениями пограничного слоя Прандтля для несжимаемого газа при заданном распределении давления [22].

Выше линии MNI , в области $MCIN$, неровности вызывают невязкие нелинейные возмущения, при этом вблизи поверхности неровностей необходимо дополнительно рассматривать вязкий подслой. Ниже, в области $GMNIIJKL$, неровности вызывают вязкие линейные возмущения.

Оценка для компоненты скорости w в поперечном направлении z получается из уравнения сохранения поперечного импульса $\rho w \partial w / \partial x \sim \sim \partial p / \partial z$ и с учетом оценок (2.4) в слое вязких нелинейных возмущений:

$$(2.5) \quad w \sim O(b^{4/3}/c), \quad \partial w / \partial z \sim O(b^{4/3}/c^2) \sim (b^2/c^2) \partial u / \partial x.$$

Соотношения (2.5) показывают, что в рассматриваемом случае при $c > b$ для всех исследованных режимов обтекания неровностей полная система уравнений, описывающая пространственную область возмущенного течения, распадается на систему уравнений, описывающую обтекание плоских сечений неровностей и содержащую координату z в качестве параметра, и на уравнение сохранения поперечного импульса (линеаризованное относительно компоненты скорости w , т. е. без члена $\rho w \partial w / \partial z$ в конвективном операторе), которое можно решать отдельно.

Очевидно, что течения около широких в поперечном направлении неровностей обладают теми же особенностями, что и течения около плоских неровностей.

3. При уменьшении ширины неровности c вплоть до $c \sim O(b)$ остаются в силе оценки (2.1)–(2.5), только теперь в слое вязких нелинейных возмущений поперечная компонента скорости w равна по порядку величины продольной компоненте скорости u :

$$(3.1) \quad w \sim u \sim O(b^{1/3}),$$

напряжение трения τ_{vz} равно по порядку величины напряжению τ_{xy} , и система уравнений, описывающая пространственную область возмущенного течения, уже не расщепляется.

Оценки (2.1)–(2.4) и (3.1) позволяют построить решение уравнений Навье — Стокса для случая обтекания нешироких неровностей типа круглой ямы или холма $\varepsilon^2 < a \leq b \sim c \leq 1$. В слое 3 вязких нелинейных возмущений вводятся следующие независимые переменные и асимптотические разложения для функций течения:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} x &= bx_3, \quad y = \varepsilon b^{1/3} y_3, \quad z = bz_3, \\ u &= b^{1/3} u_3 + \dots, \quad v = (\varepsilon/b^{1/3}) v_3 + \dots, \quad w = b^{1/3} w_3 + \dots, \\ \rho &= 1/\gamma M_\infty^2 + b^{2/3} p_3 + \dots, \quad \rho = \rho_w + \dots, \quad \mu = \mu_w + \dots \end{aligned}$$

Здесь γ — отношение удельных теплоемкостей; индекс w относится к величинам у поверхности пластины в точке, где расположена неровность.

Подстановка разложений (3.2) в уравнения Навье — Стокса и совершенное предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ показывают, что область 3 в первом приближении описывается полными уравнениями Навье — Стокса для несжимаемого газа при $a \sim b \sim c \sim O(\varepsilon^{3/2})$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} + \frac{\partial w_3}{\partial z_3} &= 0, \quad \rho_w \left(u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial u_3}{\partial z_3} \right) + \frac{\partial p_3}{\partial x_3} = \mu_w \nabla^2 u_3, \\ \rho_w \left(u_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial v_3}{\partial z_3} \right) + \frac{\partial p_3}{\partial y_3} &= \mu_w \nabla^2 v_3, \\ \rho_w \left(u_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial w_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial w_3}{\partial z_3} \right) + \frac{\partial p_3}{\partial z_3} &= \mu_w \nabla^2 w_3 \end{aligned}$$

или уравнениями Стокса при $\varepsilon^2 < a \sim b \sim c < \varepsilon^{3/2}$

$$(3.4) \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} + \frac{\partial w_3}{\partial z_3} = 0, \quad \frac{\partial p_3}{\partial x_3} = \mu_w \nabla^2 u_3, \quad \frac{\partial p_3}{\partial y_3} = \mu_w \nabla^2 v_3, \\ \frac{\partial p_3}{\partial z_3} = \mu_w \nabla^2 w_3, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2}.$$

На поверхности неровности $y_3 = f(x_3, z_3)$ должны выполняться обычные условия прилипания и непротекания

$$(3.5) \quad u_3 = v_3 = w_3 = 0 \quad (y_3 = f(x_3, z_3)),$$

внешние краевые условия получаются из сращивания с решением для невозмущенного пограничного слоя на пластине

$$(3.6) \quad u_3 \rightarrow Ay_3, \quad v_3, w_3, p_3 \rightarrow 0 \quad (x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 \rightarrow \infty),$$

где $A = (\partial u_0 / \partial y_2)_w$ ($y = \varepsilon y_2$, $u_0(y_2)$ — профиль продольной скорости u в невозмущенном пограничном слое на пластине). Хорошо известно, что (3.3), (3.5), (3.6) или (3.4)—(3.6) — краевые задачи эллиптического типа.

Если же $\varepsilon^{3/2} < b \leq 1$, то течение в слое 3 в первом приближении описывается уравнениями пространственного пограничного слоя Прандтля для несжимаемого газа

$$(3.7) \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} + \frac{\partial w_3}{\partial z_3} = 0, \quad \rho_w \left(u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial u_3}{\partial z_3} \right) + \frac{\partial p_3}{\partial x_3} = \mu_w \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_3^2}, \\ \frac{\partial p_3}{\partial y_3} = 0, \quad \rho_w \left(u_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial w_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial w_3}{\partial z_3} \right) + \frac{\partial p_3}{\partial z_3} = \mu_w \frac{\partial^2 w_3}{\partial y_3^2}.$$

На поверхности неровностей, толщина которых по порядку величины равна толщине слоя 3 ($a \sim O(\varepsilon b^{1/3})$), выполняются краевые условия (3.5), а для «толстых» неровностей при $\varepsilon b^{1/3} < a \sim O(b^{5/3})$ — краевые условия

$$(3.8) \quad u_3 = v_3 = w_3 = 0 \quad (y_3 = 0).$$

Здесь координата y_3 уже отсчитывается по нормали от поверхности неровности.

Начальные краевые условия получаются из сращивания с решением для невозмущенного пограничного слоя на пластине

$$(3.9) \quad u_3 \rightarrow Ay_3, \quad v_3, w_3, p_3 \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow -\infty, z_3 \rightarrow \pm\infty),$$

а для нахождения внешних краевых условий необходимо дополнительно рассмотреть область 2, характерная толщина которой $y \sim O(b)$ при $\varepsilon^{3/2} < b < \varepsilon$ или $y \sim O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \leq b \leq 1$. Поэтому в области 2 в первом случае справедливы следующие независимые переменные и асимптотические разложения функций течения:

$$(3.10) \quad x_2 = x_3 = x/b, \quad y_2 = y/b, \quad z_2 = z_3 = z/b, \\ u = (b/\varepsilon)Ay_2 + (\varepsilon/b^{1/3})u_{22} + \dots, \quad v = (\varepsilon/b^{1/3})v_{22} + \dots, \quad p = \rho_w + \dots, \\ w = (\varepsilon/b^{1/3})w_{22} + \dots, \quad \rho = 1/\gamma M_\infty^2 + b^{2/3}p_2 + \dots,$$

а во втором — переменные и разложения вида

$$(3.11) \quad x_2 = x_3 = x/b, \quad y_2 = y/\varepsilon, \quad z_2 = z_3 = z/b, \\ u = u_0(y_2) + b^{1/3}u_{21} + b^{2/3}u_{22} + \dots, \quad v = b^{2/3}v_{21} + (\varepsilon/b^{1/3})v_{22} + \dots, \\ w = b^{2/3}w_{22} + \dots, \quad p = 1/\gamma M_\infty^2 + b^{2/3}p_2 + \dots, \\ \rho = \rho_0(y_2) + b^{1/3}\rho_{21} + b^{2/3}\rho_{22} + \dots, \quad h = h_0(y_2) + b^{1/3}h_{21} + \dots,$$

где индексом 0 отмечены профили функций течения в невозмущенном пограничном слое на пластине. Подстановка разложений (3.10) или (3.11) в уравнения Навье — Стокса и совершение предель-

ного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon^{3/2} < b \leq 1$ показывают, что в обоих случаях течение в области 2 в первом приближении будет описываться линеаризованными относительно набегающего потока ($u = (b/\varepsilon)Ay_2$ или $u = u_0(y_2)$) уравнениями Эйлера. Причем при $\varepsilon^{3/2} < b < \varepsilon^{3/4}$ использование разложений (3.10) или (3.11) приводит к одному и тому же основному результату:

$$(3.12) \quad A\rho_w v_{22} + \partial p_2 / \partial x_2 \rightarrow 0 \quad (y_2 \rightarrow 0).$$

Тогда сращивание разложений в областях 2 и 3 при использовании соотношения (3.12) позволяет получить внешние краевые условия

$$(3.13) \quad u_3 \rightarrow Ay_3, \quad w_3 \rightarrow 0, \quad A\rho_w v_3 + \partial p_3 / \partial x_3 \rightarrow 0 \quad (y_3 \rightarrow \infty).$$

Краевая задача (3.5), (3.7), (3.9) и (3.13) описывает пространственный компенсационный режим обтекания неровностей при $a \sim O(\varepsilon b^{1/3})$, $\varepsilon^{3/2} < b < \varepsilon^{3/4}$, $c \sim O(b)$, важным отличием которого от соответствующего плоского режима обтекания [21] является распространение возмущений вверх по потоку [19].

При $b \sim O(\varepsilon^{3/4})$ линеаризованная система уравнений Эйлера, описывающая течение в области 2, допускает частичное интегрирование

$$(3.14) \quad p_2 = p_2(x_2, z_2), \quad u_{21} = Ddu_0/dy_2, \quad v_{21} = -u_0 \partial D / \partial x_2, \quad D = D(x_2, z_2).$$

Сращивание разложений в областях 2 и 3 при использовании соотношений (3.14) дает внешние краевые условия вида

$$(3.15) \quad u_3 \rightarrow A(y_3 + D), \quad w_3 \rightarrow 0 \quad (y_3 \rightarrow \infty).$$

Для «толстых» неровностей при $a \sim O(b^{5/3})$, $\varepsilon^{3/4} < b \leq \varepsilon^{3/5}$ в области 2 вводятся следующие независимые переменные и асимптотические разложения функций течения:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} x_2 = x_3 = x/b, \quad y = \varepsilon y_2 + b^{5/3} f(x_2, z_2) + \dots, \quad z_2 = z_3 = z/b, \\ u = u_0(y_2) + b^{2/3} u_2 + \dots, \quad v = b^{2/3} v_2 + \dots, \quad w = b^{2/3} w_2 + \dots, \\ p = 1/\gamma M_\infty^2 + b^{2/3} p_2 + \dots, \quad \rho = \rho_0(y_2) + b^{2/3} \rho_2 + \dots, \\ h = h_0(y_2) + b^{2/3} h_2 + \dots \end{aligned}$$

Подстановка разложений (3.16) в уравнения Навье — Стокса и совершение предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon^{3/4} < b \leq \varepsilon^{3/5}$ показывают, что в первом приближении течение в области 2 опять будет описываться линеаризованными уравнениями Эйлера, из которых вытекает

$$(3.17) \quad p_2 = p_2(x_2, z_2), \quad v_2 = u_0 \partial f / \partial x_2,$$

а сращивание разложений в областях 2 и 3 приводит к внешним краевым условиям

$$(3.18) \quad u_3 \rightarrow Ay_3, \quad w_3 \rightarrow 0 \quad (y_3 \rightarrow \infty).$$

Теперь для определения возмущения давления при $\varepsilon^{3/4} \leq b \leq \varepsilon^{3/5}$ необходимо рассмотреть возмущенную область 1 равномерного набегающего потока, где справедливы новые независимые переменные и асимптотические разложения функций течения

$$(3.19) \quad \begin{aligned} x_1 = x_2 = x_3 = x/b, \quad y_1 = y/b, \quad z_1 = z_2 = z_3 = z/b, \\ u = 1 + b^{2/3} u_1 + \dots, \quad v = b^{2/3} v_1 + \dots, \quad w = b^{2/3} w_1 + \dots, \quad \rho = 1 + \\ + b^{2/3} \rho_1 + \dots, \\ p = 1/\gamma M_\infty^2 + b^{2/3} p_1 + \dots, \quad h = 1/(\gamma - 1) M_\infty^2 + b^{2/3} h_1 + \dots \end{aligned}$$

Подстановка разложений (3.19) в уравнения Навье — Стокса и совершение предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon^{3/4} \leq b \leq \varepsilon^{3/5}$ показывают, что в первом приближении возмущение давления в области 1 описыва-

ется решением краевой задачи

$$(3.20) \quad \frac{\partial^2 p_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z_1^2} = (M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}, \quad p_1 \rightarrow 0 \quad (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \rightarrow \infty),$$

$$p_1(x_1, 0, z_1) = p_2(x_2, z_2) = p_3(x_3, z_3),$$

внутреннее краевое условие для которой при $b \sim O(\varepsilon^{3/4})$

$$(3.21) \quad \partial p_1 / \partial y_1 = \partial^2 D / \partial x_1^2 \quad (y_1 = 0)$$

или

$$(3.22) \quad \partial p_1 / \partial y_1 = -\partial^2 f / \partial x_1^2 \quad (y_1 = 0)$$

при $\varepsilon^{3/4} < b \leq \varepsilon^{3/5}$.

Следовательно, при $a \sim O(\varepsilon^{5/4})$, $b \sim c \sim O(\varepsilon^{3/4})$ обтекание неровностей описывается совместным решением краевых задач (3.5), (3.7), (3.9), (3.15) и (3.20), (3.21). Этот режим обтекания неровностей — пространственный аналог двумерного режима свободного взаимодействия [2], отдельные его свойства исследовались в [9, 10, 13—15].

Для случая обтекания «толстых» неровностей при $a \sim O(b^{5/3})$, $\varepsilon^{3/4} < b \sim c \leq \varepsilon^{3/5}$ распределение возмущения давления определяется решением (3.20), (3.22). И затем надо решать уравнения пространственного пограничного слоя Прандтля для несжимаемого газа (3.7)—(3.9), (3.18) с заданным распределением давления.

Выполненный систематический анализ режимов обтекания нешироких неровностей при $c \sim O(b)$ показывает, что для таких неровностей справедлива прежняя классификационная схема режимов двумерных течений, приведенная на рис. 3.

4. Пусть теперь $c < b$, т. е. рассматривается обтекание узких, вытянутых в направлении потока неровностей $\varepsilon^2 < a \leq c < b \leq 1$. Очевидно, в этом случае растекание газа в стороны будет оказывать значительное влияние на величины возмущений функций течений около неровностей.

Если толщина неровности a настолько мала, что возмущения функций течения создаются только за счет взаимодействия неровности с пристеночной частью пограничного слоя на пластине, то в слое нелинейных возмущений

$$(4.1) \quad u \sim \Delta u \sim O(a/\varepsilon).$$

Так как течение должно иметь существенно пространственный характер, то из уравнений неразрывности и сохранения поперечного импульса получим

$$(4.2) \quad w \sim \Delta w \sim O(ac/\varepsilon b), \quad \Delta p \sim w^2 \sim O(ac/\varepsilon b)^2.$$

Чтобы исследовать взаимодействие неровности с равномерным набегающим потоком, необходимо сначала рассмотреть возмущенную область с характерными размерами $\varepsilon < x \sim y \sim z \sim b \leq 1$. Однако в масштабах этой области неровность представляет собой линию без толщины и ширины. Поэтому такая область остается невозмущенной и надо рассмотреть область 1 возмущенного течения с характерными размерами $\varepsilon < x \sim b \leq 1$, $\varepsilon < y \sim z \sim c < b \leq 1$. При взаимодействии равномерного набегающего потока с неровностью в этой области индуцируется вертикальная скорость

$$(4.3) \quad v \sim O(a/b).$$

Из уравнения неразрывности имеем оценки для возмущений скоростей

$$(4.4) \quad \Delta u \sim O(a/c), \quad w \sim O(a/b),$$

а из уравнения сохранения поперечного импульса (учитывая, что возмущенное течение в области 1 должно описываться линеаризованными от-

носительно равномерного набегающего потока уравнениями, и поэтому $\partial w/\partial x \sim \partial p/\partial z$ — оценку для возмущения давления

$$(4.5) \quad \Delta p \sim O(ac/b^2).$$

В промежуточном случае, когда возмущения функций течения создаются за счет взаимодействия неровности со всем пограничным слоем на пластине и справедливы одновременно оценки (4.2) и (4.5),

$$(4.6) \quad ac \sim O(\varepsilon^2).$$

Теперь легко получить оценки для толщины слоя вязких нелинейных возмущений δ_1 и возмущения давления Δp для всех режимов обтекания узких неровностей:

$$(4.7) \quad \delta_1 \sim O(\varepsilon c^{1/2}/\Delta p^{1/4}) \sim O(\varepsilon b^{1/3}), \quad \Delta p \sim O(c^2/b^{4/3}).$$

Оценки (4.1)–(4.7) позволяют построить решение уравнений Навье — Стокса для случая обтекания узких, вытянутых в направлении потока неровностей.

В слое 3 вязких нелинейных возмущений вводятся следующие независимые переменные и асимптотические разложения для функций течений:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} x &= bx_3, \quad y = \varepsilon b^{1/3}y_3, \quad z = cz_3, \\ u &= b^{1/3}u_3 + \dots, \quad v = (\varepsilon/b^{1/3})v_3 + \dots, \quad w = (c/b^{2/3})w_3 + \dots, \\ p &= 1/\gamma M_\infty^2 + (c^2/b^{4/3})p_3 + \dots, \quad \rho = \rho_w + \dots, \quad \mu = \mu_w + \dots \end{aligned}$$

Подстановка разложений (4.8) в уравнения Навье — Стокса и совершенные предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ показывают, что область 3 при $a \sim c \sim O(\varepsilon b^{1/3})$, $\varepsilon^{3/2} < b \leq 1$ описывается в первом приближении параболизированными в направлении x уравнениями Навье — Стокса для несжимаемого газа

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} + \frac{\partial w_3}{\partial z_3} &= 0, \quad \rho_w \left(u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial u_3}{\partial z_3} \right) = \mu_w \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z_3^2} \right), \\ \rho_w \left(u_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial v_3}{\partial z_3} \right) + \frac{\partial p_3}{\partial y_3} &= \mu_w \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_3^2} \right), \\ \rho_w \left(u_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial w_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial w_3}{\partial z_3} \right) + \frac{\partial p_3}{\partial z_3} &= \mu_w \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial z_3^2} \right), \end{aligned}$$

а при $\varepsilon^2 < a \sim c < \varepsilon b^{1/3}$, $\varepsilon^2 < b \leq 1$ — уравнениями Стокса [7] (в этом случае в уравнениях (4.9) пропадают конвективные члены). Очевидно, в решении краевой задачи (3.5), (3.6) и (4.9) отсутствует передача возмущений вверх по потоку.

Если же $\varepsilon b^{1/3} < c < b$, то течение в слое 3 в первом приближении будет описываться уравнениями пространственного пограничного слоя Прандтля для несжимаемого газа без члена $\partial p/\partial x$ в уравнении сохранения продольного импульса

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} + \frac{\partial w_3}{\partial z_3} &= 0, \quad \rho_w \left(u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial u_3}{\partial z_3} \right) = \mu_w \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_3^2}, \\ \frac{\partial p_3}{\partial y_3} &= 0, \quad \rho_w \left(u_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial w_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial w_3}{\partial z_3} \right) + \frac{\partial p_3}{\partial z_3} = \mu_w \frac{\partial^2 w_3}{\partial y_3^2}. \end{aligned}$$

Решение уравнений (4.10) должно удовлетворять начальным краевым условиям (3.9) и условиям на поверхности неровности (3.5) (при $a \sim O(\varepsilon b^{1/3})$) или (3.8) (при $\varepsilon b^{1/3} < a \sim O(b^{2/3}c)$).

Для нахождения внешних краевых условий необходимо теперь рассмотреть область 2 с характерной толщиной $y \sim O(c)$ при $\varepsilon b^{1/3} < c < \varepsilon$,

$\varepsilon^{3/2} < b \leq 1$ или $y \sim O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \leq c < b \leq 1$. Поэтому в первом случае в области 2 вводятся независимые переменные и асимптотические разложения функций течения

$$(4.11) \quad \begin{aligned} x_2 = x_3 = x/b, \quad y_2 = y/c, \quad z_2 = z_3 = z/c, \\ u = (c/\varepsilon)Ay_2 + (\varepsilon b^{2/3}/c)u_{22} + \dots, \quad v = (\varepsilon/b^{1/3})v_{22} + \dots, \\ w = (\varepsilon/b^{1/3})w_{22} + \dots, \quad p = 1/\gamma M_\infty^2 + (c^2/b^{4/3})p_2 + \dots, \quad \rho = \rho_w + \dots, \end{aligned}$$

а во втором

$$(4.12) \quad \begin{aligned} x_2 = x_3 = x/b, \quad y_2 = y/\varepsilon, \quad z_2 = z_3 = z/c, \\ u = u_0(y_2) + b^{1/3}u_{21} + b^{2/3}u_{22} + \dots, \quad v = (c/b^{1/3})v_{21} + (\varepsilon/b^{1/3})v_{22} + \dots, \\ w = (c/b^{1/3})w_{22} + \dots, \quad p = 1/\gamma M_\infty^2 + (c^2/b^{4/3})p_2 + \dots, \\ \rho = \rho_0(y_2) + b^{1/3}\rho_{21} + b^{2/3}\rho_{22} + \dots, \quad h = h_0(y_2) + b^{1/3}h_{21} + \dots \end{aligned}$$

Подстановка разложений (4.11) или (4.12) в уравнения Навье — Стокса и совершение предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon^{3/2} < b \leq 1$ показывают, что в обоих случаях течение в области 2 в первом приближении будет описываться линеаризованными относительно набегающего потока ($u = (c/\varepsilon)Ay_2$ или $u = u_0(y_2)$) уравнениями Эйлера без члена $\partial p/\partial x$ в уравнении сохранения продольного импульса. Причем при $\varepsilon b^{1/3} < c < \varepsilon/b^{1/3}$, $\varepsilon^{3/2} < b \leq 1$ использование разложений (4.11) или (4.12) приводит к одному и тому же основному результату: $v_{22} \rightarrow 0$ ($y_2 \rightarrow 0$), тогда внешние краевые условия принимают вид

$$(4.13) \quad u \rightarrow Ay_3, \quad v_3, \quad w_3 \rightarrow 0 \quad (y_3 \rightarrow \infty).$$

Краевая задача (3.5), (3.9), (4.10) и (4.13) описывает пространственный компенсационный режим обтекания узких неровностей с характерными размерами $a \sim O(\varepsilon b^{1/3})$, $\varepsilon^{3/2} < b \leq 1$, $a < c < \varepsilon/b^{1/3}$. Здесь из-за отсутствия члена $\partial p/\partial x$ нет передачи возмущений вверх по потоку, как и при компенсационном режиме обтекания плоских неровностей [21]. При $c \sim O(\varepsilon/b^{1/3})$ для области 2 опять справедливы соотношения (3.14), и тогда внешними краевыми будут условия (3.15).

Для «толстых» узких неровностей при $a \sim O(b^{2/3}c)$, $\varepsilon^{3/4} < b \leq 1$, $\varepsilon/b^{1/3} < c < \varepsilon/b^{2/3}$ в области 2 вводятся следующие независимые переменные и асимптотические разложения функций течения:

$$(4.14) \quad \begin{aligned} x_2 = x_3 = x/b, \quad y = \varepsilon y_2 + b^{2/3}cf(x_2, z_2) + \dots, \quad z_2 = z_3 = z/c, \\ u = u_0(y_2) + b^{2/3}u_2 + \dots, \quad v = (c/b^{1/3})v_2 + \dots, \quad w = (c/b^{1/3})w_2 + \dots, \\ \rho = \rho_0(y_2) + b^{2/3}\rho_2 + \dots, \quad h = h_0(y_2) + b^{2/3}h_2 + \dots, \\ p = 1/\gamma M_\infty^2 + (c^2/b^{4/3})p_2 + \dots \end{aligned}$$

Подстановка разложений (4.14) в уравнения Навье — Стокса и совершение предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon^{3/4} < b \leq 1$ показывают, что в первом приближении в области 2 справедливы соотношения (3.17), а решение в области 3 должно удовлетворять внешним краевым условиям (3.18).

Далее необходимо рассмотреть возмущенную область 1 равномерно набегающего потока с характерными размерами $x \sim O(b)$, $y \sim z \sim O(c)$, $\varepsilon^{3/4} \leq b \leq 1$, $\varepsilon/b^{1/3} \leq c \leq \varepsilon/b^{2/3}$, в которой справедливы независимые переменные и асимптотические разложения функций течения

$$(4.15) \quad \begin{aligned} x_1 = x_2 = x_3 = x/b, \quad y_1 = y/c, \quad z_1 = z_2 = z_3 = z/c, \\ u = 1 + b^{2/3}u_1 + \dots, \quad v = (c/b^{1/3})v_1 + \dots, \quad w = (c/b^{1/3})w_1 + \dots, \\ \rho = 1 + (c^2/b^{4/3})\rho_1 + \dots, \quad h = 1/(\gamma - 1) M_\infty^2 + (c^2/b^{4/3})h_1 + \dots, \\ p = 1/\gamma M_\infty^2 + (c^2/b^{4/3})p_1 \dots \end{aligned}$$

Подстановка разложений (4.15) в уравнения Навье — Стокса и совершенные предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon^{3/4} < b \leq 1$ показывают, что в первом приближении возмущение давления в области 1 описывается решением краевой задачи

$$(4.16) \quad -\partial^2 p_1 / \partial y_1^2 + \partial^2 p_1 / \partial z_1^2 = 0, \quad p_1 \rightarrow 0 \quad (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \rightarrow \infty), \\ p_1(x_1, 0, z_1) = p_2(x_2, z_2) = p_3(x_3, z_3),$$

которое должно удовлетворять внутреннему краевому условию (3.21) при ($c \sim O(\varepsilon/b^{1/3})$) или (3.22) при $\varepsilon/b^{1/3} < c \leq \varepsilon/b^{2/3}$. Очевидно, решения краевых задач (3.21), (4.16) или (3.22), (4.16) не зависят от M_∞ , несмотря на то что возмущается область 1 равномерного набегающего потока.

Совместное решение краевых задач (3.5), (3.9), (3.15), (4.10) и (3.21), (4.16) описывает обтекание узких неровностей с характерными размерами $a \sim O(\varepsilon b^{1/3})$, $\varepsilon^{3/4} < b \leq 1$, $c \sim O(\varepsilon/b^{1/3})$ на режиме свободного взаимодействия. Здесь из-за отсутствия члена $\partial p / \partial x$ уже нет передачи возмущений вверх по потоку.

Для случая обтекания «толстых» узких неровностей $a \sim O(b^{2/3}c)$, $\varepsilon^{3/4} < b \leq 1$, $\varepsilon b^{1/3} < c \leq \varepsilon/b^{2/3}$ распределение возмущения давления определяется решением (3.22), (4.16). И затем в области 3 надо решать краевую задачу (3.8), (3.9), (3.18), (4.10) с заданным распределением давления.

5. На рис. 4 показаны в плане поверхности, на которых пространственные неровности с характерными толщиной a , протяженностью b и шириной c вызывают вязкие нелинейные возмущения: $APNM$ — $a \sim O(\varepsilon b^{1/3})$, $PQIN$ — $a \sim O(b^{5/3})$ и AQP — $a \sim O(b^{2/3}c)$. Более толстые неровности вызывают невязкие нелинейные возмущения, менее толстые — вязкие линейные.

Наименее вырожденные режимы обтекания пространственных неровностей реализуются при $b \sim O(c)$. На линии HO ($\varepsilon^2 < a \sim b \sim c < \varepsilon^{3/2}$) обтекание неровностей описывается уравнениями Стокса, а в точке O ($a \sim b \sim c \sim O(\varepsilon^{3/2})$) — полными пространственными уравнениями Навье — Стокса для несжимаемого газа. На линии OP реализуется пространственный компенсационный режим обтекания неровностей, когда существует передача возмущений вверх по потоку. При $a \sim O(\varepsilon^{5/4})$ и $b \sim c \sim O(\varepsilon^{3/4})$ (точка P) реализуется пространственный режим свободного взаимодействия обтекания неровностей. А на линии PQ ($a \sim O(b^{5/3}) \sim O(c^{5/3})$) обтекание «толстых» неровностей описывается уравнениями Прандтля для пространственного пограничного слоя при заданном распределении давления.

Для широких неровностей ($c > b$) в краевых задачах происходит вырождение по поперечной координате z — они распадаются на системы, описывающие возмущенное течение в плоскости x, y и содержащие координату z в качестве параметра, и на линейаризованные уравнения сохранения поперечного импульса.

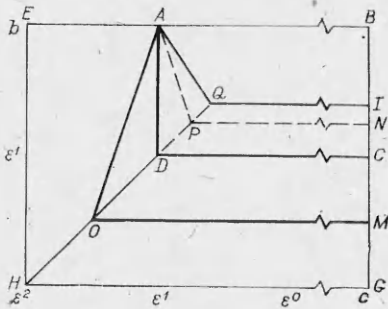


Рис. 4

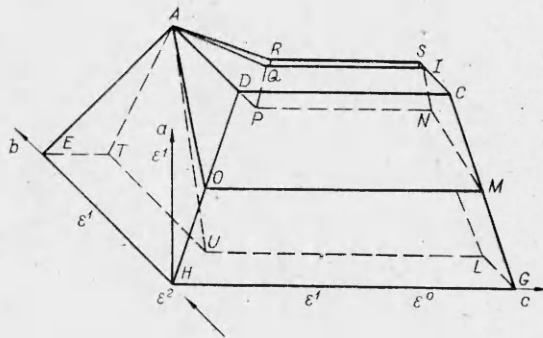


Рис. 5

В случае узких неровностей ($c < b$) становится определяющим растекание газа в стороны и происходит вырождение краевых задач по продольной координате x — всюду пропадают члены с $\partial p/\partial x$ или $\partial^2 p/\partial x^2$. В связи с этим для всех режимов обтекания узких неровностей отсутствует передача возмущений вверх по потоку. Кроме того, здесь еще отсутствует зависимость решений от M_∞ даже в тех случаях, когда возмущается область равномерного набегающего потока.

Поверхности $APD - a \sim O(\varepsilon^2/c)$ и $PNCD - a \sim O(\varepsilon^2/b)$ разделяют неровности, для которых возмущения функций течения создаются за счет взаимодействия неровности с пристеночной частью пограничного слоя на пластине или с равномерным набегающим потоком.

Можно показать еще, что поверхности $a \sim O(\varepsilon b^{2/3})$, $a \sim O(c^2/\varepsilon)$, $a \sim O(b^2)$ и $a \sim O(bc)$ отсекают режимы обтекания малых неровностей, для которых малы градиенты давления $\partial p/\partial x < 1$ или $\partial p/\partial z < 1$, а также малы конвективные или диффузионные члены уравнений Навье — Стокса ($\rho u \partial u/\partial x < 1$ или $\varepsilon^2 \mu \partial^2 u/\partial y^2 < 1$, например) (на рис. 4 эти поверхности не приведены).

На рис. 5 дана общая классификационная схема режимов пространственных локальных течений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sedney R. A survey of the effects of small protuberances on boundary-layer flows.— AIAA J., 1973, v. 11, N 6.
2. Нейланд В. Я Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений.— Тр. ЦАГИ, 1974, вып. 1529.
3. Боголепов В. В., Нейланд В. Я Исследование локальных возмущений вязких сверхзвуковых течений.— В кн.: Аэромеханика. М.: Наука, 1976.
4. Рубан А. И., Сычев В. В. Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости.— Успехи механики, 1979, т. 2, вып. 4.
5. Липатов И. И. Теплозащита участка конечной длины при интенсивном локализованном вдуве.— Тр. ЦАГИ, 1980, вып. 2080.
6. Нейланд В. Я. Асимптотическая теория отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа.— Успехи механики, 1981, т. 4, вып. 2.
7. Денисенко О. В. Обтекание продольных канавок потоком вязкого газа.— Учен. зап. ЦАГИ, 1978, т. IX, № 4.
8. Липатов И. И. Пространственное обтекание малой неровности ламинарным пограничным слоем.— Учен. зап. ЦАГИ, 1980, т. XI, № 2.
9. Smith F. T., Sykes R. I., Brighton P. W. M. A two-dimensional boundary layer encountering a three-dimensional hump.— J. Fluid Mech., 1977, v. 83, p. 1.
10. Sykes R. I. Stratification effects in boundary layer flow over hills.— Proc. Roy. Soc. London, 1978, A 361, N 1705.
11. Липатов И. И. Обтекание локальных пространственных неровностей на дне ламинарного пограничного слоя в режиме слабого гиперзвукового взаимодействия.— Тр. ЦАГИ, 1980, вып. 2079.
12. Mason P. J., Sykes R. I. Three dimensional numerical integrations of the Navier — Stokes equations for flow over surface mounted obstacles.— J. Fluid Mech., 1979, v. 91, p. 3.
13. Рыжов О. С. О нестационарном пространственном пограничном слое, свободно взаимодействующем с внешним потоком.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 6.
14. Жук В. П., Рыжов О. С. Об устойчивости свободно взаимодействующего пограничного слоя.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 3.
15. Мануйлович С. В. О свободном взаимодействии пространственного пограничного слоя с внешним потенциальным течением.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 5.
16. Smith F. T. A three dimensional boundary layer separation.— J. Fluid Mech., 1980, v. 99, p. 1.
17. Sykes R. I. On three-dimensional boundary layer flow over surface irregularities.— Proc. Roy. Soc. London, 1980, A373, N 1754.
18. Казаков А. В. Взаимодействие нестационарного пространственного пограничного слоя с гиперзвуковым потоком около быстро нагреваемого участка поверхности.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 5.
19. Боголепов В. В., Липатов И. И. Исследование пространственных локальных ламинарных течений.— ПМТФ, 1985, № 1.

