УДК 539.375:629.7.02

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ РАЗРУШЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ С ТРЕЩИНАМИ

В. Н. Максименко, А. В. Тягний

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск

Предлагаются расчетно-экспериментальные методы оценки коэффициентов интенсивности напряжений первого и второго рода, определения напряжений, действовавших на месте трещины до ее появления, и положений вершин трещины. Исходными данными служат экспериментально определенные скачки (разрывы) смещений в нескольких точках на берегах трещины. Методы основаны на интегральных представлениях решения задачи упругого равновесия анизотропных пластин с криволинейным разрезом. Приведены численные примеры, подтверждающие эффективность методов.

Ключевые слова: анизотропная пластина, трещина, скачок смещений, коэффициент интенсивности напряжений.

Для оценки коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) в вершинах трещины и определения значений напряжений в конструкции на месте трещины до ее появления достаточно широко используются методы, основанные на замере в эксперименте величины раскрытия берегов трещины в нескольких точках [1–4]. Эти методы применимы только к расчетам для изотропных материалов и конструкций простейшей геометрии (прямолинейная трещина).

В настоящей работе на основе интегральных представлений решений задач теории трещин предлагается общий метод расчетной оценки КИН первого и второго рода в вершинах криволинейной трещины и напряжений на месте трещины до ее появления, а также метод определения положений вершин трещин в сложных листовых элементах конструкций из металлических и композитных (анизотропных) материалов по экспериментально найденным в нескольких точках скачкам смещений (раскрытиям) на берегах трещины.

1. Расчет коэффициентов интенсивности напряжений. Рассмотрим нагруженный системой произвольных внешних усилий (P_1, P_2, ... , P_j) плоский конструктивный элемент из упругого прямолинейно-анизотропного (в частности, изотропного) материала с повреждением типа сквозной внутренней или краевой трещины L (рис. 1). К пластине посредством заклепок и (или) клея, передающих усилия сдвига, могут быть присоединены подкрепляющие элементы. Будем считать, что берега трещины свободны от внешних усилий и не взаимодействуют друг с другом, а в пластине реализуется плоское напряженное состояние. По известным значениям скачков смещений на берегах разреза $G(t) = (u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-) = g_1(t) + ig_2(t)$ требуется определить КИН.

Согласно [5] напряжения и перемещения в пластине (исключая перемещения как жесткого целого) в произвольной точке $z = x + iy$ выражаются через аналитические функции $\Phi_\nu(z_\nu)$, $\varphi_\nu(z_\nu)$ ($\nu = 1, 2$):

$$(\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y) = 2\,\mathrm{Re}\Big\{\sum_{\nu=1}^{2}(\mu_\nu^2, -\mu_\nu, 1)\Phi_\nu(z_\nu)\Big\},$$

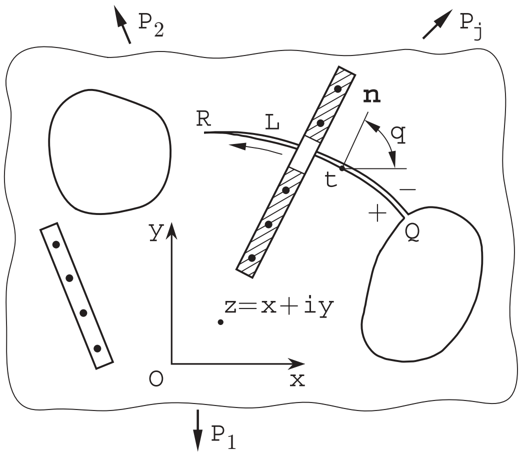

Рис. 1

$$(u,v) = 2\,\mathrm{Re}\Big\{\sum_{\nu=1}^{2}(p_\nu, q_\nu)\varphi_\nu(z_\nu)\Big\}, \qquad \frac{d\varphi_\nu(z_\nu)}{dz_\nu} = \Phi_\nu(z_\nu), \tag{1.1}$$

где $z_\nu = x + \mu_\nu y$; μ_ν — корни соответствующего характеристического уравнения с положительными мнимыми частями; p_ν, q_ν — константы материала пластины.

Следуя [6], функции $\Phi_\nu(z_\nu)$ запишем в виде

$$\Phi_\nu(z_\nu) = \Phi_{\nu 0}(z_\nu) + \Phi_{\nu 1}(z_\nu); \tag{1.2}$$

$$\Phi_{\nu 1}(z_\nu) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_\nu(\tau)\,d\tau_\nu}{\tau_\nu - z_\nu}, \qquad \omega_2(t) = -a(t)\omega_1(t) - b(t)\overline{\omega_1(t)}, \tag{1.3}$$

где

$$a(t) = \frac{\mu_1 - \bar\mu_2}{\mu_2 - \bar\mu_2}\,\frac{M_1(t)}{M_2(t)}; \quad b(t) = \frac{\bar\mu_1 - \bar\mu_2}{\mu_2 - \bar\mu_2}\,\frac{\overline{M_1(t)}}{M_2(t)}; \quad M_\nu(t) = \mu_\nu\cos\psi - \sin\psi; \quad t,\tau \in L.$$

Функции $\Phi_{\nu 0}(z_\nu)$ определяют основное напряженное состояние в пластине без трещины, $\Phi_{\nu 1}(z_\nu)$ — возмущенное состояние из-за наличия трещины L; $\psi(t)$ — угол между нормалью $\boldsymbol{n}(t)$ к левому берегу трещины в точке $t = x_t + iy_t$ и осью Ox (рис. 1); $\omega_\nu(t)$ — функции, имеющие особенности типа квадратного корня на внутренних (не выходящих на край пластины или отверстия) концах трещины L [7]; $\tau = x_\tau + iy_\tau$; $\tau_\nu = x_\tau + \mu_\nu y_\tau$.

Используя соотношения (1.1)–(1.3), скачок смещений $G(t)$ можно представить в виде

$$G(t) = \sum_{\nu=1}^{2}\Big\{(p_\nu + iq_\nu)\int\limits_R^t \omega_\nu(\tau)\,d\tau_\nu + (\bar p_\nu + i\bar q_\nu)\int\limits_R^t \overline{\omega_\nu(\tau)}\,d\bar\tau_\nu\Big\}.$$

Дифференцируя последнее выражение по длине трещины s, получим соотношения для определения $\omega_1(t)$ через производные от g_1, g_2

$$\omega_1(t) = \frac{W(t)[A(t) - a(t)] - \overline{W(t)}\,[B(t) - b(t)]}{|A(t) - a(t)|^2 - |B(t) - b(t)|^2}, \tag{1.4}$$

где

$$W(t) = \frac{\bar p_2\,dg_2/ds - \bar q_2\,dg_1/ds}{(\bar p_2 q_2 - p_2\bar q_2)M_2(t)}; \quad A(t) = \frac{\bar p_2 q_1 - p_1\bar q_2}{\bar p_2 q_2 - p_2\bar q_2}\,\frac{M_1(t)}{M_2(t)}; \quad B(t) = \frac{\bar p_2\bar q_1 - \bar p_1\bar q_2}{\bar p_2 q_2 - p_2\bar q_2}\,\frac{\overline{M_1(t)}}{M_2(t)}.$$

Введем параметрическое уравнение контура L: $t = t(\alpha)$, $\tau = t(\beta)$, причем для внутренней трещины $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$, $Q = t(-1)$, $R = t(+1)$, для краевой трещины $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $Q = t(0)$, $R = t(+1)$. В этом случае функцию $\omega_1(t)$ можно представить в виде $\omega_1(t) = \omega_1[t(\alpha)] = \chi(\alpha)/(1-\alpha^2)^{1/2}$, где $\chi(\alpha)$ — функция класса H в окрестности точек $\alpha = \pm 1$ для внутренней трещины и в окрестности точки $\alpha = +1$ для краевой трещины [7].

Для напряжений в окрестности вершин трещины $c = t(\mp 1)$ (для краевой трещины $c = t(+1)$) получим на основании результатов работы [6] асимптотические формулы

$$\lim_{r\to 0} \sqrt{2r}(\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y) = \operatorname{Re}\Big\{\sqrt{\pm\frac{ds}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\mp 1}}\ \sum_{\nu=1}^{2}(\mu_\nu^2, -\mu_\nu, 1)C_\nu(\vartheta)\Big\},$$

$$C_\nu(\vartheta) = \Lambda_\nu\sqrt{M_\nu(c)/(\cos\vartheta + \mu_\nu\sin\vartheta)}, \qquad \Lambda_1 = \chi(\mp 1),$$

$$\Lambda_2 = -a(c)\Lambda_1 - b(c)\bar{\Lambda}_1, \qquad s = s(\alpha), \qquad r = |z - c|, \qquad \vartheta = \operatorname{Arg}|z - c|$$

и значения КИН отрыва K_1 и сдвига K_2 [8].

2. Определение напряжений на месте трещины. Для рассматриваемой пластины с трещиной представим потенциалы $\Phi_\nu(z_\nu)$ в виде

$$\Phi_\nu(z_\nu) = \sum_{j=0}^{2}\Phi^*_{\nu j}(z_\nu). \tag{2.1}$$

Здесь $\Phi^*_{\nu 1}(z_\nu) = \Phi_{\nu 1}(z_\nu)$, а потенциалы $\Phi^*_\nu(z_\nu) = \Phi^*_{\nu 1}(z_\nu) + \Phi^*_{\nu 2}(z_\nu)$ удовлетворяют следующему условию: приложенные к телу внешние нагрузки равны нулю везде, кроме берегов трещины L. Тогда в силу принципа суперпозиции потенциалы $\Phi^*_{\nu 0}(z_\nu)$ определяют напряжения в неповрежденной пластине, в том числе на месте трещины.

Краевые условия на L имеют вид [6]

$$a(t)\Phi_1^{\pm}(t_1) + b(t)\overline{\Phi_1^{\pm}(t_1)} + \Phi_2^{\pm}(t_2) = 0, \qquad t_\nu = x_t + \mu_\nu y_t, \quad \nu = 1, 2. \tag{2.2}$$

С учетом свойств потенциалов $\Phi^*_{\nu 0}(z_\nu)$ из (1.3), (2.1), (2.2) следует

$$X_n^*(t) + \bar{\mu}_2 Y_n^*(t) = (\bar{\mu}_2 - \mu_2)M_2(t)[a(t)\Phi_1^*(t_1) + b(t)\overline{\Phi_1^*(t_1)} + \Phi_2^*(t_2)], \tag{2.3}$$

где $X_n^*(t)\,ds$, $Y_n^*(t)\,ds$ — проекции усилий, действующих на элемент дуги ds контура L в пластине без трещины.

Для трех частных случаев сформулированной выше задачи (трещина в бесконечной пластине, в полуплоскости, в бесконечной пластине с эллиптическим отверстием) можно указать явный вид функций $\Phi^*_\nu(z_\nu)$.

Если поврежденный элемент представляет собой бесконечную пластину с трещиной L, то $\Phi^*_{\nu 2}(z_\nu) = 0$. Для прямолинейной трещины $L = \{|x| < a,\ y = \text{const}\}$ с учетом (1.3) выражение для напряжений σ_y^*, τ_{xy}^* на месте трещины, действовавших до ее появления, записывается следующим образом:

$$\tau_{xy}^*(x) + \bar{\mu}_2\sigma_y^*(x) = \frac{\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\omega_1(\tau)\,d\tau}{\tau - x}.$$

Для трещины L (внутренней или краевой), расположенной вблизи края полуплоскости $D = \{x > 0\}$, функции $\Phi^*_{\nu 2}(z_\nu)$ следует взять в виде [6]

$$\Phi^*_{\nu 2}(z_\nu) = \frac{1}{2\pi i}\int_L\Big\{\frac{l_\nu s_\nu\overline{\omega_1(\tau)}\,d\bar{\tau}_1}{s_\nu z_\nu - \bar{\tau}_1} + \frac{n_\nu m_\nu\overline{\omega_2(\tau)}\,d\bar{\tau}_2}{m_\nu z_\nu - \bar{\tau}_2}\Big\}, \tag{2.4}$$

где

$$l_\nu = \frac{\mu_{3-\nu} - \bar\mu_1}{\mu_\nu - \mu_{3-\nu}}; \quad n_\nu = \frac{\mu_{3-\nu} - \bar\mu_2}{\mu_\nu - \mu_{3-\nu}}; \quad s_\nu = \frac{\bar\mu_1}{\mu_\nu}; \quad m_\nu = \frac{\bar\mu_2}{\mu_\nu} \quad (\nu = 1, 2).$$

Если трещина L находится в бесконечной пластине около эллиптического отверстия $\Omega = \{(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\}$ или выходит на его край, то выражения для $\Phi_\nu^*(z_\nu)$ имеют вид [9]

$$\Phi_\nu^*(z_\nu) = \frac{d\zeta_\nu/dz_\nu}{2\pi i} \int_L \Big\{ \frac{\omega_\nu(\tau)\, d\tau_\nu}{\zeta_\nu - \eta_\nu} + \frac{l_\nu \overline{\omega_1(\tau)}\, d\bar\tau_1}{\zeta_\nu(\zeta_\nu \bar\eta_1 - 1)} + \frac{n_\nu \overline{\omega_2(\tau)}\, d\bar\tau_2}{\zeta_\nu(\zeta_\nu \bar\eta_2 - 1)} \Big\}, \tag{2.5}$$

где

$$\zeta_\nu = \zeta_\nu(z_\nu) = (z_\nu + \sqrt{z_\nu^2 - (a^2 + \mu_\nu^2 b^2)}\,)/(a - i\mu_\nu b); \qquad \eta_\nu = \zeta_\nu(\tau_\nu) \qquad (\nu = 1, 2).$$

Потенциалы $\Phi_\nu^*(z_\nu)$, определенные согласно (2.4), (2.5), автоматически удовлетворяют нулевым краевым условиям для напряжений на крае полуплоскости или контуре эллиптического отверстия и на бесконечности.

3. Численный алгоритм. Предположим, что заданы значения скачков смещений берегов трещины $g_{1p} = (u^+ - u^-)_p$ и $g_{2p} = (v^+ - v^-)_p$ в произвольных N_1 и N_2 точках $t_{1p} = t(\alpha_{1p})$ и $t_{2p} = t(\alpha_{2p})$ соответственно ($p = 1, \ldots, N_j$; $j = 1, 2$). Используя характер поведения функции $\omega_1(t)$, с учетом соотношений (1.4) аппроксимируем функцию скачков смещений $G(t)$ в виде суммы ряда по функциям Чебышева второго рода $U_k(\alpha) = \sin(k \arccos\alpha)$ [10]

$$G(t) = G[t(\alpha)] = \sum_{k=1}^{M_1} b_{1k} U_k(\alpha) + i \sum_{k=1}^{M_2} b_{2k} U_k(\alpha), \tag{3.1}$$

где b_{1k} ($k = 1, \ldots, M_1$), b_{2k} ($k = 1, \ldots, M_2$) — неизвестные постоянные, которые определим методом наименьших квадратов [10]. Минимизация функционала

$$S = \sum_{j=1}^{2} S_j, \qquad S_j = S_j(M_j) = \sum_{p=1}^{N_j} \Big[\sum_{k=1}^{M_j} b_{jk} U_k(\alpha_{jp}) - g_{jp} \Big]^2 \tag{3.2}$$

приводит к двум системам линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов ряда (3.1):

$$\frac{\partial S}{\partial b_{jl}} = 2 \sum_{p=1}^{N_j} \Big[\sum_{k=1}^{M_j} b_{jk} U_k(\alpha_{jp}) - g_{jp} \Big] U_l(\alpha_{jp}) = 0 \qquad (l = 1, \ldots, M_j;\ j = 1, 2). \tag{3.3}$$

Оценка оптимальных значений M_1, M_2 при конечном количестве точек N_1, N_2 с доверительной вероятностью q может быть получена из условия, что критерий

$$J(M_j) = \frac{S_j(M_j)}{1 - \sqrt{\{M_j[\ln(N_j/M_j) + 1] - \ln(1-q)\}/N_j}} \qquad (j = 1, 2)$$

достигает наименьшего положительного значения [11]. Здесь $S_j(M_j)$ вычисляются по формуле (3.2) при найденных из (3.3) коэффициентах b_{jk}.

Производные от скачков смещений dg_j/ds в (1.4) выражаются через функции Чебышева первого рода $T_k(\alpha) = \cos(k \arccos\alpha)$ [10]

$$\frac{dg_j}{ds} = \frac{dg_j}{d\alpha}\, \frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \sum_{k=1}^{M_j} k b_{jk} T_k(\alpha) \Big(\frac{ds}{d\alpha} \Big)^{-1} \qquad (j = 1, 2).$$

При определении усилий по формулам (2.3) с учетом (1.3), (2.1), (2.4), (2.5) интегралы могут быть вычислены в узловых точках α_m с помощью квадратурных формул для сингулярных и регулярных интегралов [12]

$$\int_{-1}^{1} \frac{V_1(\beta)\,d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}\,(\beta-\alpha)} = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{V_1(\beta_k)}{\beta_k-\alpha_m}, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{V_2(\alpha,\beta)\,d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} V_2(\alpha,\beta_k), \tag{3.4}$$

где

$$\beta_k = \cos\left((2k-1)\pi/(2n)\right), \quad k=1,\dots,n; \qquad \alpha_m = \cos\left(\pi m/2\right), \qquad m=1,\dots,n-1.$$

Для краевых трещин интервал интегрирования $(0,1)$ можно заменить на интервал $(-1,1)$ при условии $V_1(\beta)=0$, $V_2(\alpha,\beta)=0$ для $\beta<0$ и воспользоваться формулами (3.4) при четном n.

4. Определение положения трещины. Пусть внутренняя трещина прямолинейная и расположена вдоль оси Ox. Предположим, что координаты левой A и правой B вершин трещин точно не известны (например, изменились в результате роста трещины). Требуется по значениям скачков смещений $g_2 = v^+ - v^-$ в нескольких точках определить координаты A, B.

Аппроксимирующее выражение (3.1) в этом случае принимает вид

$$G(x) = ig_2(x) = i\sum_{k=1}^{M_2} b_{2k}\sin\Big(k\arccos\frac{2x-B-A}{B-A}\Big). \tag{4.1}$$

Для минимизации величины $S=S_2$ в (3.2) относительно неизвестных b_{2k}, B, A получаем систему нелинейных алгебраических уравнений из условий

$$\frac{\partial S_2}{\partial b_{2k}} = 0 \quad (k=1,\dots,M_2), \qquad \frac{\partial S_2}{\partial B} = 0, \qquad \frac{\partial S_2}{\partial A} = 0. \tag{4.2}$$

В случае краевой трещины $L = \{0<x<B,\ y=\text{const}\}$ для определения координаты B можно воспользоваться системой (4.2), исключив из нее последнее условие и полагая $A=-B$ в выражении (4.1).

5. Численный эксперимент. В качестве примеров, иллюстрирующих применение предлагаемых методов, были выбраны задачи, геометрия которых и способ приложения нагрузок показаны на рис. 2. Вычисления для изотропных пластин производились согласно теории ортотропных [5] при следующих данных: $E_x = E_y = E$, $\nu_{xy} = \nu_{yx} = 0{,}33$, $G_{xy} = G_{yx} = 0{,}999E/[2(1+\nu_{xy})]$ (E_x, E_y — модули Юнга в главных направлениях Ox и Oy; G_{xy}, G_{yx} — модули сдвига; ν_{xy}, ν_{yx} — коэффициенты Пуассона). Геометрические параметры подкрепленной панели (рис. 2,*е*) следующие: толщина изотропной пластины $0{,}01a$; площадь поперечного сечения подкрепляющих элементов $0{,}002a^2$; их модуль упругости E; толщина клея $0{,}001a$; модуль сдвига клея $0{,}01E$; ширина склейки $0{,}1a$ (склейка частично нарушена около трещины (отслоение)); диаметр заклепок $0{,}04a$ (заклепки расположены с шагом $0{,}5a$).

Численный эксперимент проводился в два этапа. На первом этапе с использованием метода интегральных уравнений [6, 9, 13] или аналитических решений [5, 8] для всех задач были получены значения скачков смещений и коэффициентов интенсивности напряжений $K_{1,2}^0$. Для задач, показанных на рис. 2,*б,в,д*, также вычислялись напряжения на месте трещины $\sigma_y^{*0}(x)$, $\tau_{xy}^{*0}(x)$. При численной реализации метода интегральных уравнений погрешность расчета не превышала 0,1 %. Значения скачков смещений определялись в одной–семи равномерно расположенных по длине трещины точках $\alpha_{jp} = [(2p-1)/N_j]-1$

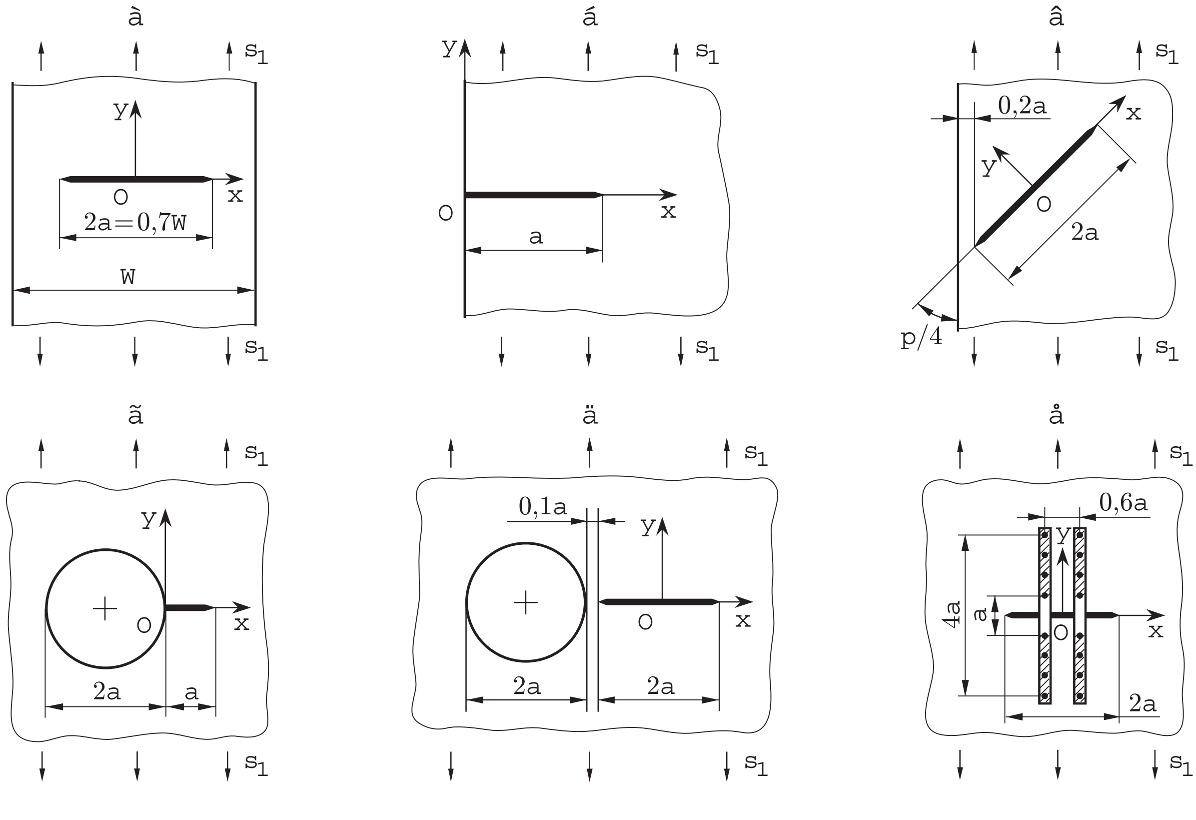

Рис. 2

(для внутренней трещины) или $\alpha_{jp} = (2p-1)/(2N_j)$ (для краевой трещины), где $p = 1, \ldots, N_j$; $N_j = 1, \ldots, 5$; $M_j = N_j$; $j = 1, 2$. На втором этапе значения скачков смещений использовались в качестве исходных данных в изложенных выше методах вычисления КИН $K_{1,2}$, напряжений на линии трещины $\sigma_y^*(x)$, $\tau_{xy}^*(x)$ и определения положений вершин трещины.

В табл. 1 приведены значения относительной погрешности определения КИН первого и второго рода ($N = N_1 = N_2$)

$$\delta_{1,2}(\pm a) = \{[K_{1,2}(\pm a) - K_{1,2}^0(\pm a)]/K_{1,2}^0(\pm a)\} \cdot 100\ \%,$$

в табл. 2 — нормальных и касательных напряжений

$$\delta(\sigma_y) = \max_{x \in L_1} |[\sigma_y^*(x) - \sigma_y^{*0}(x)]/\sigma_y^{*0}(x)| \cdot 100\ \%,$$

$$\delta(\tau_{xy}) = \max_{x \in L_1} |[\tau_{xy}^*(x) - \tau_{xy}^{*0}(x)]/\tau_{xy}^{*0}(x)| \cdot 100\ \%,$$

где $L_1 = \{-0{,}8 < x/a < 0{,}8\}$ для внутренней и $L_1 = \{0{,}1 < x/a < 0{,}9\}$ для краевой трещин.

Для случая, изображенного на рис. 2,*б*, проведено исследование сходимости результатов (по КИН и напряжениям) в зависимости от степени анизотропии материала. Расчеты выполнены при $E_x/E_y = 1/25,\ 1/5,\ 1,\ 5,\ 25$; $G_{xy} = G_{yx} = 0{,}999 \min(E_x, E_y)/[2(1 + \max(\nu_{xy}, \nu_{yx}))]$; $\max(\nu_{xy}, \nu_{yx}) = 0{,}33$; $\nu_{xy}/E_x = \nu_{yx}/E_y$. Приведенные результаты позволяют сделать вывод, что для достижения погрешности, не превышающей 3–4 %, при определении КИН $K_{1,2}$ и напряжений σ_y^*, τ_{xy}^* для рассмотренных типичных конструктивных элементов в широком диапазоне изменения степени анизотропии материала, как правило, достаточно двух–пяти точек измерений, что свидетельствует о хорошей сходимости метода.

Таблица 1

Относительная погрешность определения КИН первого и второго рода

Схема элемента на рис. 2	E_x/E_y	Погрешность	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$
а	1	$\delta_1(+a)$	−3,3	−2,5	0,2	0,1	0,1
б	1/25	$\delta_1(+a)$	3,3	−1,4	0,7	−0,3	0,3
	1/5	$\delta_1(+a)$	5,1	−2,0	0,8	−0,2	0,2
	1	$\delta_1(+a)$	8,1	−2,8	1,0	−0,4	−0,2
	5	$\delta_1(+a)$	5,4	−2,2	0,9	−0,2	0,1
	25	$\delta_1(+a)$	3,3	−1,5	0,6	−0,3	0,2
в	1	$\delta_1(-a)$	16,7	26,4	16,7	7,9	3,0
	1	$\delta_2(-a)$	−29,1	−12,3	−1,8	1,7	2,3
	1	$\delta_1(+a)$	13,9	1,0	−3,5	2,2	−1,2
	1	$\delta_2(+a)$	8,0	−8,6	3,7	−1,0	0,1
г	1	$\delta_1(+a)$	9,6	−3,1	1,0	−0,3	0,2
д	1	$\delta_1(-a)$	−36,2	−19,7	−9,9	−4,5	−1,6
	1	$\delta_1(+a)$	13,0	−7,5	4,3	−2,2	1,2
е	1	$\delta_1(+a)$	−20,7	−14,5	4,7	4,5	4,0

Таблица 2

Относительная погрешность определения нормальных и касательных напряжений

Схема элемента на рис. 2	E_x/E_y	Погрешность	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$
б	1/25	$\delta(\sigma_y)$	15,3	6,7	4,7	2,8	1,5
	1/5	$\delta(\sigma_y)$	28,1	9,3	4,3	1,4	0,7
	1	$\delta(\sigma_y)$	38,0	11,2	4,0	1,1	0,5
	5	$\delta(\sigma_y)$	29,3	9,6	4,2	1,5	0,8
	25	$\delta(\sigma_y)$	15,5	6,7	4,7	2,9	1,7
в	1	$\delta(\sigma_y)$	30,4	27,1	12,0	6,9	3,3
	1	$\delta(\tau_{xy})$	55,4	24,0	5,4	1,1	0,1
д	1	$\delta(\sigma_y)$	49,5	23,8	8,8	4,6	2,2

Таблица 3

Относительная погрешность определения координат вершин трещин

Схема элемента на рис. 2	Погрешность	$M_2=1$	$M_2=2$	$M_2=3$	$M_2=4$	$M_2=5$
г	$\delta(B)$	−0,8	4,1	−1,0	0,4	0,1
д	$\delta(A)$	34,0	14,0	6,0	2,6	1,2
	$\delta(B)$	−3,6	3,0	−1,4	1,0	−0,5

В табл. 3 приведены результаты определения положений вершин трещин методом, изложенным в п. **4**. Погрешность определения координат вершин $\delta(A,B) = [|(A,B)/a| - 1] \times 100\ \%$ вычислялась при $M_2 = 1,\ldots,5$; $N_2 = M_2 + 1$ для краевой трещины, $N_2 = M_2 + 2$ для внутренней (точки равномерно расположены по длине трещины). Для самого сложного случая (рис. 2,*д*, левая вершина трещины) погрешность $\delta(A)$ при $M_2 = 5$, $N_2 = 7$ не превышала 1,2 %.

Проведенные численные исследования позволяют рекомендовать использование предложенных методов для анализа напряженно-деформированного состояния поврежденной трещиной конструкции на основе экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Городниченко В. И., Дементьев А. Д.** Определение коэффициентов интенсивности напряжений в вершине сквозной трещины по полям перемещений // Учен. зап. ЦАГИ. 1989. Т. 19, № 6. С. 82–93.
2. **Шкараев С. В.** Теоретико-экспериментальный метод определения коэффициентов интенсивности напряжений // Физ.-хим. механика материалов. 1989. № 4. С. 97–101.
3. **Шкараев С. В.** Метод определения параметров разрушения элементов конструкций с краевыми трещинами // Физ.-хим. механика материалов. 1992. № 6. С. 29–35.
4. **Torri T., Houda K., Fujibayashi T., Hamano T.** A method of evaluating crack opening stress distributions and stress intensity factors based on opening displacement along a crack // JASM Intern. J. Ser. I. 1990. V. 32, N 2. P. 47–54.
5. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
6. **Максименко В. Н.** Задача о трещине в анизотропной полуплоскости, подкрепленной упругими накладками // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1990. Вып. 99. С. 41–46.
7. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.
8. **Механика** разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. Киев: Наук. думка, 1988. Т. 2.
9. **Максименко В. Н.** Предельное равновесие анизотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием и системой трещин сложной формы // Учен. зап. ЦАГИ. 1987. Т. 18, № 3. С. 24–29.
10. **Березин И. С., Жидков Н. П.** Методы вычислений. М.: Наука, 1966. Т. 1.
11. **Вапник В. Н.** Алгоритмы и программы восстановления зависимостей. М.: Наука, 1984.
12. **Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.** Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985.
13. **Максименко В. Н., Павшок В. Н.** К расчету анизотропной пластины с трещинами, усиленной клееклепаными ребрами // ПМТФ. 1992. № 1. С. 133–140.

Поступила в редакцию 25/III 2003 г.