

УДК 539.376:539.4.014.13

## РЕЛАКСАЦИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРОЧНЕННОМ ЦИЛИНДРЕ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ОСЕВОЙ СИЛОЙ, КРУТЯЩИМ МОМЕНТОМ И ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

В. П. Радченко, В. В. Цветков, М. Н. Саушкин

Самарский государственный технический университет, 443100 Самара, Россия  
E-mails: radchenko.vp@samgtu.ru, vi.v.tsvetkoff@gmail.com, saushkin.mn@samgtu.ru

Разработан метод решения краевой задачи релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненном полом цилиндра при комбинированном нагружении осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением. Предложены методики определения напряженно-деформированного состояния после упрочнения и его кинетики в процессе ползучести. Исследовано воздействие внутреннего давления совместно с растягивающей нагрузкой либо крутящим моментом на толстостенный цилиндрический образец из сплава ЖС6КП после пневмодробеструйной обработки. Приведены расчетные эпюры для компонент тензора напряжений при мгновенном температурно-силовом нагружении, в процессе ползучести и после разгрузки и выполнен их анализ. Проведено сопоставление поведения неупрочненных и упрочненных образцов на стадии установившейся ползучести после полной релаксации остаточных напряжений.

**Ключевые слова:** остаточные напряжения, поверхностное пластическое упрочнение, цилиндрический образец, ползучесть, релаксация, растяжение, кручение, внутреннее давление, краевая задача.

DOI: 10.15372/PMTF20200412

**Введение.** Поверхностное пластическое упрочнение — известный способ повышения характеристик надежности элементов конструкций (износостойкости, микротвердости, предела сопротивления усталости и др.). Считается, что положительное влияние на эти характеристики оказывает образование в приповерхностном слое сжимающих остаточных напряжений. Существует большое количество работ, посвященных исследованию влияния остаточных напряжений на отмеченные характеристики надежности (см., например, ранние работы [1–4] и опубликованные в последнее время [5–10]).

Важной проблемой является оценка кинетики наведенных остаточных напряжений в процессе эксплуатации конструкции, поскольку при высокотемпературном нагружении в материале возникают деформации ползучести, вызывающие релаксацию остаточных напряжений. При этом возникает необходимость использования методов прогнозирования кинетики напряженно-деформированного состояния в упрочненных элементах конструкций в условиях ползучести.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 19-19-00062).

© Радченко В. П., Цветков В. В., Саушкин М. Н., 2020

В работе [11] предложен метод оценки кинетики остаточных напряжений в поверхностно упрочненном сплошном цилиндре из сплава ЖС6УВИ в условиях термоэкспозиции (высокотемпературной выдержки без внешних нагрузок) при температуре 675 °С и выполнена его экспериментальная проверка. В [12] проведено теоретико-экспериментальное исследование релаксации остаточных напряжений в плоских образцах из сплава ЭП742 после ультразвукового упрочнения также в условиях термоэкспозиции при температуре 650 °С.

В литературе практически отсутствуют экспериментальные данные о комбинированном воздействии на упрочненные детали температурного и силового нагружения. В работах [13, 14] впервые представлены прямые методы решения краевых задач ползучести для поверхностно упрочненных сплошных и полых цилиндров в условиях осевого растяжения соответственно. Применимость этих методов для случая растяжения сплошного цилиндра из сплава ЖС6КП при температуре 800 °С подтверждена в [15], для случая растяжения полого цилиндра из сплава Д16Т при температуре 125 °С — в работе [16]. В [15, 16] также установлено соответствие расчетных и экспериментальных данных о релаксации остаточных напряжений. Расчетные методики оценки кинетики остаточных напряжений в упрочненных деталях в условиях ползучести для других видов температурно-силового нагружения в настоящее время отсутствуют.

Целью данной работы является обобщение подхода, предложенного в [14, 16] для полых цилиндрических образцов в условиях осевого растяжения, на случай комбинированного нагружения осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением.

**1. Определение напряженно-деформированного состояния в полом цилиндре после процедуры упрочнения.** Рассматривается полый цилиндрический образец с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $r \in [R_1, R_2]$ ), внешняя поверхность которого упрочнена с использованием методов поверхностного пластического деформирования. На первом этапе решения поставленной задачи определялось напряженно-деформированное состояние образца после процедуры упрочнения. Эта задача исследуется в течение более 50 лет. В работе [1] предложен метод первоначальных деформаций, в котором задаются распределения остаточных пластических деформаций по глубине упрочненного слоя. С использованием некоторых простейших законов в [1] получены аналитические решения. Этот метод расчета остаточных напряжений развит в ряде работ [17–19], в которых использована аналогия между остаточными пластическими деформациями и температурными деформациями в неоднородном температурном поле.

Другим подходом к решению рассматриваемой задачи является непосредственное моделирование технологических процессов упрочнения для определения остаточных деформаций на основе прямого решения динамических упругопластических задач (см. [20–22] и др.). Однако учесть все параметры, используемые в технологии упрочнения (стохастический характер обработки поверхности микрошариками, многократные проходы при упрочнении роликом, система охлаждения, температурные эффекты в контактной задаче и т. д.), практически невозможно. Поэтому полученные результаты имеют преимущественно качественный характер.

В настоящей работе для определения полей остаточных напряжений и деформаций используется феноменологический метод, предложенный в [6] и развитый в [11–16].

Введем стандартную цилиндрическую систему координат  $(r, \theta, z)$  и обозначим через  $\sigma_r^{res}$ ,  $\sigma_\theta^{res}$ ,  $\sigma_z^{res}$  радиальную, окружную и осевую компоненты тензора остаточных напряжений, через  $q_r$ ,  $q_\theta$ ,  $q_z$  — соответствующие компоненты тензора пластических деформаций после упрочнения. Для определения полей остаточных напряжений и пластических деформаций в полом поверхностно упрочненном цилиндре (аналогично тому, как это сделано в [6, 11–16]) вводятся следующие гипотезы:

1) компоненты тензора пластических деформаций связаны соотношением  $q_z(r) = \alpha q_\theta(r)$ , где  $\alpha$  — параметр анизотропии упрочнения [23];

2) недиагональными компонентами тензора остаточных напряжений и тензора пластических деформаций можно пренебречь в силу их малости по сравнению с диагональными (нормальными) компонентами, что обосновано экспериментально [24];

3) в тонком упрочненном слое (области сжатия материала) вторичные пластические деформации отсутствуют.

При выполнении данных гипотез для компонент тензоров остаточных напряжений и пластических деформаций в работе [14] получены соотношения

$$\sigma_r^{res}(r) = \frac{1}{r} \int_{R_1}^r \sigma_\theta^{res}(\xi) d\xi; \quad (1)$$

$$q_\theta(r) = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E_0(1+\alpha\mu)^2} r^{-\nu} \int_{R_1}^r \xi^{\nu-1} [\sigma_r^{res}(\xi) + (1+\alpha)\sigma_\theta^{res}(\xi)] d\xi - \\ - \frac{1+\mu}{E_0(1+\alpha\mu)} [(1-\mu)\sigma_\theta^{res}(r) - \mu\sigma_r^{res}(r)], \quad \nu = \frac{2+\alpha}{1+\alpha\mu}; \quad (2)$$

$$q_z(r) = \alpha q_\theta(r), \quad q_r(r) = -(1+\alpha)q_\theta(r); \quad (3)$$

$$\varepsilon_z^0 = \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} r \left( q_z(r) - \frac{\mu}{E_0} [\sigma_r^{res}(r) + \sigma_\theta^{res}(r)] \right) dr; \quad (4)$$

$$\sigma_z^{res}(r) = E_0[\varepsilon_z^0 - q_z(r)] + \mu[\sigma_r^{res}(r) + \sigma_\theta^{res}(r)], \quad (5)$$

где  $E_0$  — модуль Юнга материала при температуре упрочнения  $T_0$ ;  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Схема расчета характеристик напряженно-деформированного состояния упрочненного полого цилиндра имеет вид

$$\sigma_\theta^{res}(r), \alpha \xrightarrow{(1)} \sigma_r^{res}(r) \xrightarrow{(2)} q_\theta(r) \xrightarrow{(3)} q_r(r), q_z(r) \xrightarrow{(4)} \varepsilon_z^0 \xrightarrow{(5)} \sigma_z^{res}(r) \quad (6)$$

(числа над стрелками означают номера формул, по которым рассчитывается соответствующая величина).

Исходными данными, позволяющими применять расчетную схему (6), являются параметр анизотропии упрочнения  $\alpha$  и зависимость  $\sigma_\theta^{res} = \sigma_\theta^{res}(r)$ . Методика определения параметра  $\alpha$  изложена в [23], причем при использовании методов изотропного упрочнения поверхности (пневмодробеструйная обработка, ультразвуковое упрочнение и др.) величина  $\alpha = 1$ , а эпюры напряжений  $\sigma_\theta^{res} = \sigma_\theta^{res}(r)$  и  $\sigma_z^{res} = \sigma_z^{res}(r)$  практически совпадают [14, 17], при использовании методов анизотропного упрочнения (например, при обкатке роликом) параметр  $\alpha > 1$ .

С помощью экспериментальных методов эпюру  $\sigma_\theta^{res} = \sigma_\theta^{res}(r)$  можно определить лишь в приповерхностном слое (области сжатия материала). Однако для решения краевой задачи ползучести упрочненного цилиндра этих данных недостаточно, поскольку начальное напряженно-деформированное состояние должно быть задано во всей области  $r \in [R_1, R_2]$ . Поэтому необходимо экстраполировать зависимость  $\sigma_\theta^{res} = \sigma_\theta^{res}(r)$  на всю область интегрирования. Для этого в работе [14] для случая упрочнения внешней поверхности предложено использовать аппроксимацию вида

$$\sigma_\theta^{res}(r) = \left[ \sigma_0 - \sigma_1 \exp \left( - \frac{(R_2 - h^* - r)^2}{b^2} \right) \right] \frac{r - R_1}{l}, \quad (7)$$

где  $\sigma_0, \sigma_1, h^*, b$  — параметры, значения которых определяются из условия самоуравновешенности эпюры  $\sigma_\theta^{res} = \sigma_\theta^{res}(r)$  и с использованием значений функции (7) в характерных точках;  $l = 1$  — масштабный коэффициент, имеющий размерность длины.

Таким образом, напряженное состояние полого цилиндра после процедуры упрочнения определяется тензором остаточных напряжений с главными компонентами  $\sigma_z^{res}(r), \sigma_\theta^{res}(r), \sigma_r^{res}(r)$ .

**2. Определение характеристик напряженно-деформированного состояния в полом упрочненном цилиндре при температурно-силовом нагружении.** Сначала рассмотрим режим температурного нагружения образца от значения температуры  $T_0$ , при котором происходит упрочнение (как правило, комнатная температура) и модуль Юнга материала равен  $E_0$ , до значения  $T_1$  ( $T_1 > T_0$ ), при котором эксплуатируется изделие и в материале развиваются деформации ползучести и которому соответствует значение модуля Юнга  $E_1$  ( $E_1 < E_0$ ).

Полагая, что при температурном нагружении цилиндра дополнительных пластических деформаций не возникает, а следовательно, величина  $q_\theta = q_\theta(r)$  не зависит от температуры, соотношение (2) для момента полного прогрева образца до температуры  $T_1$  запишем в виде

$$q_\theta(r) = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E_1(1+\alpha\mu)^2} r^{-\nu} \int_{R_1}^r \xi^{\nu-1} \frac{E_1}{E_0} [\sigma_r^{res}(\xi) + (1+\alpha)\sigma_\theta^{res}(\xi)] d\xi - \\ - \frac{1+\mu}{E_1(1+\alpha\mu)} \frac{E_1}{E_0} [(1-\mu)\sigma_\theta^{res}(r) - \mu\sigma_r^{res}(r)], \quad \nu = \frac{2+\alpha}{1+\alpha\mu}. \quad (8)$$

Соотношение (8) при температуре  $T_1$  (модуль Юнга  $E_1$ ) получается из соотношения (2) при температуре  $T_0$  ( $E = E_0$ ), если все компоненты тензора напряжений в (2) (а также в (1), (4), (5)) умножить на коэффициент  $E_1/E_0$ .

Таким образом, заменив в (1), (2), (4), (5) величину  $E_0$  на  $E_1$ , получаем распределения остаточных напряжений при температуре  $T_1$ . Заметим, что в данном случае температурные деформации не учитываются, поскольку полагается, что прогрев образца происходит мгновенно, а наличие однородного температурного поля приводит лишь к изменению объема образца и не влияет на напряженное состояние.

Рассмотрим процесс нагружения упрочненного образца осевой силой  $F$ , крутящим моментом  $M$  и внутренним давлением  $q$  в момент времени  $t = 0+0$ . Предполагается, что при повторном нагружении цилиндрического образца (после упрочнения) его материал является упругим. При этом происходит ступенчатое изменение компонент тензора напряжений на величину рабочих упругих напряжений, возникающих за счет внешнего нагружения:

$$\sigma_{ij}(r, 0+0) = \begin{pmatrix} \sigma_z(r, 0+0) & \tau(r, 0+0) & 0 \\ \tau(r, 0+0) & \sigma_\theta(r, 0+0) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r(r, 0+0) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$\sigma_z(r, 0+0) = \frac{E_1}{E_0} \sigma_z^{res}(r) + \frac{F}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}, \\ \sigma_\theta(r, 0+0) = \frac{E_1}{E_0} \sigma_\theta^{res}(r) + \frac{qR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad \sigma_r(r, 0+0) = \frac{E_1}{E_0} \sigma_r^{res}(r) + \frac{qR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right), \\ \tau(r, 0+0) = \frac{M}{J} r, \quad J = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2},$$

выражение для тензора полных деформаций имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(r, 0+0) = \begin{pmatrix} \varepsilon_z(r, 0+0) & \gamma(r, 0+0)/2 & 0 \\ \gamma(r, 0+0)/2 & \varepsilon_\theta(r, 0+0) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_r(r, 0+0) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_z(r, 0+0) &= [\sigma_z(r, 0+0) - \mu(\sigma_\theta(r, 0+0) + \sigma_r(r, 0+0))]/E_1 + q_z(r), \\ \varepsilon_r(r, 0+0) &= [\sigma_r(r, 0+0) - \mu(\sigma_\theta(r, 0+0) + \sigma_z(r, 0+0))]/E_1 + q_r(r), \\ \varepsilon_\theta(r, 0+0) &= [\sigma_\theta(r, 0+0) - \mu(\sigma_r(r, 0+0) + \sigma_z(r, 0+0))]/E_1 + q_\theta(r), \\ \gamma(r, 0+0) &= \tau(r, 0+0)/G_1, \quad G_1 = E_1/[2(1 + \mu)], \end{aligned}$$

$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(r, t)$ ,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(r, t)$  — функциональные зависимости компонент тензоров напряжений и деформаций от пространственной и временной координат;  $J$  — момент инерции сечения относительно оси стержня;  $G_1$  — модуль сдвига материала при температуре  $T_1$ .

Для описания процесса релаксации остаточных напряжений необходимо решить краевую задачу ползучести упрочненного цилиндра при температуре  $T_1$ , начальное напряженно-деформированное состояние которого определяется тензорами напряжений (9) и деформаций (10).

**3. Методика решения краевой задачи ползучести упрочненного полого цилиндра, нагруженного осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением.** Постановка краевой задачи ползучести упрочненного полого цилиндра, нагруженного осевой силой  $F$ , крутящим моментом  $M$  и внутренним давлением  $q$ , включает следующие соотношения:

— уравнения равновесия

$$r \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} + \sigma_r(r, t) = \sigma_\theta(r, t); \quad (11)$$

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} \sigma_z(r, t) r dr = F; \quad (12)$$

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} \tau(r, t) r^2 dr = M; \quad (13)$$

— уравнение совместности деформаций

$$r \frac{d\varepsilon_\theta(r, t)}{dr} + \varepsilon_\theta(r, t) = \varepsilon_r(r, t); \quad (14)$$

— гипотезу плоских сечений

$$\varepsilon_z(r, t) = \varepsilon_z(t); \quad (15)$$

— гипотезу прямых радиусов

$$\gamma(r, t) = r\theta(t) \quad (16)$$

( $\theta$  — относительный угол закручивания);

— краевые условия

$$\sigma_r(r, t)|_{r=R_1} = -q, \quad \sigma_r(r, t)|_{r=R_2} = 0. \quad (17)$$

Поскольку время  $t$  входит в соотношения (11)–(17) параметрически, здесь и далее в качестве производных компонент тензоров напряжений и деформаций по  $r$  используется оператор полной производной.

Опишем процесс релаксации остаточных напряжений вследствие ползучести при температуре  $T = T_1$ . В этом случае соотношения для компонент тензора полных деформаций имеют вид

$$\varepsilon_z(r, t) = e_z(r, t) + q_z(r) + p_z(r, t); \quad (18)$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = e_\theta(r, t) + q_\theta(r) + p_\theta(r, t); \quad (19)$$

$$\varepsilon_r(r, t) = e_r(r, t) + q_r(r) + p_r(r, t); \quad (20)$$

$$\gamma(r, t) = \gamma^e(r, t) + \gamma^p(r, t), \quad (21)$$

где  $e_z, e_\theta, e_r, \gamma^e$  — компоненты тензора упругих деформаций;  $p_z, p_\theta, p_r, \gamma^p$  — компоненты тензора деформаций ползучести. В начальный момент времени компоненты тензора деформаций ползучести равны нулю для всех  $r \in [R_1, R_2]$ :

$$p_z(r, 0) = 0, \quad p_\theta(r, 0) = 0, \quad p_r(r, 0) = 0, \quad \gamma^p(r, 0) = 0.$$

Задача сводится к решению системы (18)–(21) относительно компонент тензора напряжений.

Запишем закон Гука для упругих деформаций:

$$e_z(r, t) = [\sigma_z(r, t) - \mu(\sigma_\theta(r, t) + \sigma_r(r, t))]/E_1; \quad (22)$$

$$e_\theta(r, t) = [\sigma_\theta(r, t) - \mu(\sigma_r(r, t) + \sigma_z(r, t))]/E_1; \quad (23)$$

$$e_r(r, t) = [\sigma_r(r, t) - \mu(\sigma_\theta(r, t) + \sigma_z(r, t))]/E_1; \quad (24)$$

$$\gamma^e(r, t) = \tau(r, t)/G_1. \quad (25)$$

Подставляя (15), (22) в соотношение (18), находим осевую компоненту тензора напряжений

$$\sigma_z(r, t) = E_1[\varepsilon_z(t) - q_z(r) - p_z(r, t)] + \mu[\sigma_\theta(r, t) + \sigma_r(r, t)]. \quad (26)$$

Подставляя (26) в соотношение (23) и дифференцируя полученное выражение по  $r$  с учетом условия  $d\varepsilon_z(t)/dr = 0$ , имеем

$$\frac{de_\theta(r, t)}{dr} = \frac{1 + \mu}{E_1} \left[ (1 - \mu) \frac{d\sigma_\theta(r, t)}{dr} - \mu \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} + \frac{\mu E_1}{1 + \mu} \left( \frac{dq_z(r)}{dr} + \frac{dp_z(r, t)}{dr} \right) \right]. \quad (27)$$

Дифференцируя уравнение (11) по  $r$ , получаем

$$\frac{d\sigma_\theta(r, t)}{dr} = r \frac{d^2\sigma_r(r, t)}{dr^2} + 2 \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr}. \quad (28)$$

С использованием равенства (28) исключим из (27) величину  $d\sigma_\theta/dr$ :

$$\frac{de_\theta(r, t)}{dr} = \frac{1 + \mu}{E_1} \left[ r(1 - \mu) \frac{d^2\sigma_r(r, t)}{dr^2} + (2 - 3\mu) \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} + \frac{\mu E_1}{1 + \mu} \left( \frac{dq_z(r)}{dr} + \frac{dp_z(r, t)}{dr} \right) \right]. \quad (29)$$

Вычитая (23) из (24), исключаем компоненту  $\sigma_z$ :

$$e_r(r, t) - e_\theta(r, t) = \frac{1 + \mu}{E_1} [\sigma_r(r, t) - \sigma_\theta(r, t)]. \quad (30)$$

Соотношение (30) с учетом уравнения (11) принимает вид

$$e_r(r, t) - e_\theta(r, t) = -\frac{1 + \mu}{E_1} \left( r \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} \right). \quad (31)$$

Используя соотношения (19), (20), (31), преобразуем уравнение совместности деформаций (14) к виду

$$r \frac{de_{\theta}(r, t)}{dr} = -\frac{1 + \mu}{E_1} \left( r \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} \right) + (q_r(r) - q_{\theta}(r)) + (p_r(r, t) - p_{\theta}(r, t)) - r \left( \frac{dq_{\theta}(r)}{dr} + \frac{dp_{\theta}(r, t)}{dr} \right). \quad (32)$$

Подставляя (29) в (32) и учитывая соотношение (3), получаем неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно  $\sigma_r$ :

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r(r, t)}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} = g(r, t), \quad (33)$$

где

$$g(r, t) = \frac{E_1}{1 - \mu^2} \left[ \frac{2 + \alpha}{1 + \alpha} q_r(r) + p_r(r, t) - p_{\theta}(r, t) - r \left( \frac{dp_{\theta}(r, t)}{dr} + \mu \frac{dp_z(r, t)}{dr} \right) + \frac{r(1 + \alpha\mu)}{1 + \alpha} \frac{dq_r(r)}{dr} \right]. \quad (34)$$

Решение уравнения (33) с граничными условиями (17) записывается следующим образом:

$$\sigma_r(r, t) = \frac{qR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( 1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} \int_{R_1}^r \frac{g(\xi, t)}{\xi} d\xi + \frac{1}{2r^2} \left[ \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( \int_{R_1}^{R_2} g(\xi, t) \xi d\xi - R_2^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{g(\xi, t)}{\xi} d\xi \right) - \int_{R_1}^r g(\xi, t) \xi d\xi \right]. \quad (35)$$

При известном  $\sigma_r$  из уравнения (11) находим зависимость для окружной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{\theta}$ :

$$\sigma_{\theta}(r, t) = \frac{d}{dr} [r\sigma_r(r, t)]. \quad (36)$$

Для определения  $\sigma_z$  по формуле (26) необходимо найти величину  $\varepsilon_z(t)$ . Подставляя (26) в уравнение (12) и разрешая полученное соотношение относительно  $\varepsilon_z$ , имеем

$$\varepsilon_z(t) = \frac{F}{\pi(R_2^2 - R_1^2)E_1} + \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} r \left( q_z(r) + p_z(r, t) - \frac{\mu}{E_1} [\sigma_r(r, t) + \sigma_{\theta}(r, t)] \right) dr. \quad (37)$$

Подставляя (25) в соотношение (21) с учетом (16), получаем распределение касательной компоненты тензора напряжений

$$\tau(r, t) = G_1[r\theta(t) - \gamma^p(r, t)]. \quad (38)$$

Величину  $\theta(t)$  определяем путем подстановки (38) в уравнение (13):

$$\theta(t) = \frac{M}{G_1 J} + \frac{2\pi}{J} \int_{R_1}^{R_2} \gamma^p(r, t) r^2 dr. \quad (39)$$

Таким образом, для описания в условиях ползучести процесса релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненном полем цилиндре с начальным напряженно-деформированным состоянием, определяемым тензорами (9), (10), может быть использована следующая расчетная схема:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 t & \longrightarrow & p_z(r, t), p_\theta(r, t), p_r(r, t), \gamma^p(r, t) & \xrightarrow{(34)} & g(r, t) & \xrightarrow{(35)} & & & & & \\
 \sigma_r(r, t) & \xrightarrow{(36)} & \sigma_\theta(r, t) & \xrightarrow{(37)} & \varepsilon_z(t) & \xrightarrow{(26)} & \sigma_z(r, t) & \xrightarrow{(39)} & \theta(t) & \xrightarrow{(38)} & \tau(r, t).
 \end{array} \quad (40)$$

**4. Определение компонент тензора напряжений после разгрузки.** Предположим, что после окончания процесса ползучести при  $t = t^*$  происходит температурно-силовая разгрузка в момент времени  $t = t^* + 0$ . Вследствие силовой разгрузки происходит ступенчатое изменение компонент тензора напряжений на величину рабочих напряжений. Поскольку полагается, что при температурной разгрузке от значения  $T_1$  до значения  $T_0$  компоненты тензоров пластических деформаций и деформаций ползучести не меняются, для определения компонент тензора напряжений в момент времени  $t = t^* + 0$  необходимо умножить значения полученных величин на коэффициент  $E_0/E_1$  (обратный коэффициенту при температурном нагружении):

$$\begin{aligned}
 \sigma_z(r, t^* + 0) &= \frac{E_0}{E_1} \left( \sigma_z(r, t^* - 0) - \frac{F}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \right), \\
 \sigma_\theta(r, t^* + 0) &= \frac{E_0}{E_1} \left[ \sigma_\theta(r, t^* - 0) - \frac{qR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( 1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right) \right], \\
 \sigma_r(r, t^* + 0) &= \frac{E_0}{E_1} \left[ \sigma_r(r, t^* - 0) - \frac{qR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( 1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right) \right], \\
 \tau(r, t^* + 0) &= \frac{E_0}{E_1} \left( \tau(r, t^* - 0) - \frac{M}{J} r \right).
 \end{aligned}$$

**5. Реологическая модель.** При решении рассматриваемой краевой задачи необходимо выбрать модель ползучести материала. Для определения реологических компонент  $p_z$ ,  $p_\theta$ ,  $p_r$ ,  $\gamma^p$  в расчетной схеме (40) можно использовать любую теорию ползучести, адекватно описывающую экспериментальные данные. В настоящей работе в рассматриваемых примерах используются квазилинейные уравнения установившейся ползучести

$$\dot{p}_{ij} = \frac{3}{2} c S^{m-1} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (41)$$

где  $S$  — интенсивность напряжений;  $c$ ,  $m$  — константы материала.

**6. Результаты расчетов.** Как отмечалось выше, непосредственные экспериментальные исследования релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненном полем цилиндре в условиях ползучести при комбинированном нагружении осевой растягивающей нагрузкой, крутящим моментом и внутренним давлением не проводились.

В данной работе рассматривается толстостенный цилиндр из сплава ЖС6КП с радиусами  $R_1 = 2$  мм и  $R_2 = 3,76$  мм, упрочненный путем пневмодробеструйной обработки поверхности при температуре  $T_0 = 26$  °С и подвергнутый комбинированному воздействию внешних сил при температуре  $T_1 = 900$  °С. В работе [15] приведена полученная с использованием этой технологии упрочнения экспериментальная эпюра остаточных напряжений  $\sigma_z^{res} = \sigma_z^{res}(r)$  для сплошного цилиндрического образца радиусом 3,76 мм из сплава ЖС6КП, которая в данной работе используется для полого цилиндра (точки на рис. 1). Поскольку при дробеструйной обработке образца коэффициент анизотропии  $\alpha = 1$ , а эпюры остаточных напряжений  $\sigma_\theta^{res} = \sigma_\theta^{res}(r)$  и  $\sigma_z^{res} = \sigma_z^{res}(r)$  практически совпадают [6,

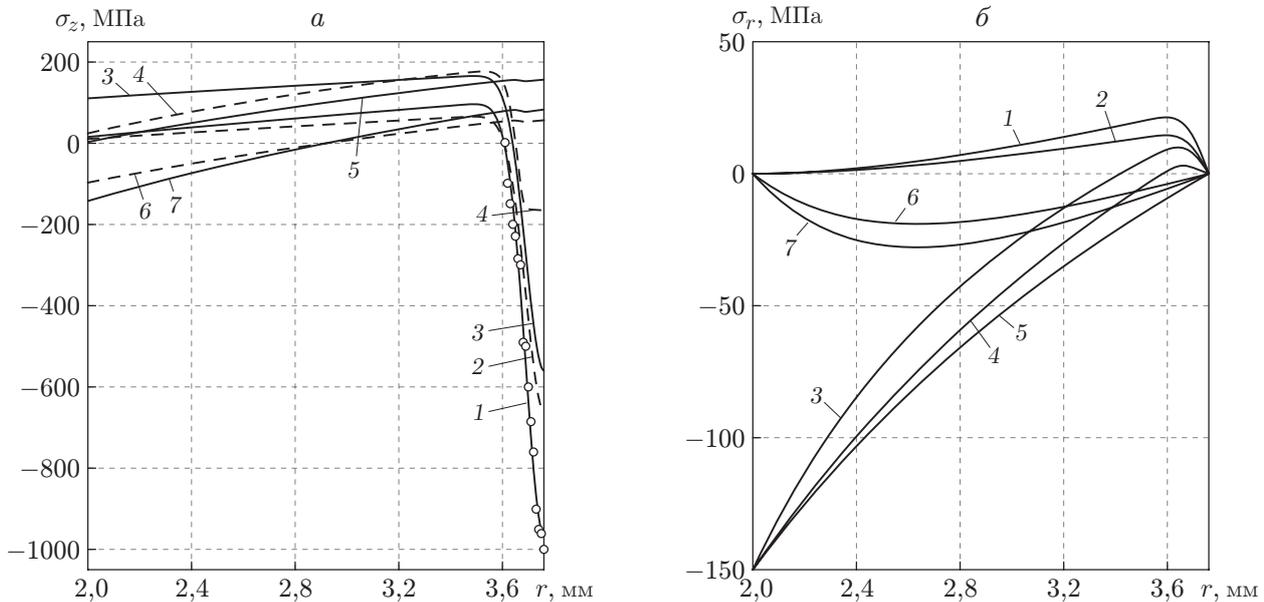


Рис. 1. Эпюры релаксации напряжений  $\sigma_z(r, t)$  (а) и  $\sigma_r(r, t)$  (б) в полном поверхностно упрочненном цилиндрическом образце из сплава ЖС6КП в различные моменты времени:

1 — после процедуры упрочнения при  $t = 0 - 0$ ; 2 — после температурного нагружения от значения  $T_0 = 26^\circ\text{C}$  до значения  $T_1 = 900^\circ\text{C}$  при  $t = 0 + 0$ ; 3 — после приложения при  $t = 0 + 0$  осевой силы  $F = 3184,8\text{ Н}$  и внутреннего давления  $q = 150\text{ МПа}$ ; 4 — в процессе ползучести в момент времени  $t = 20\text{ ч}$ ; 5 — после окончания процесса ползучести при  $T_1 = 900^\circ\text{C}$  в течение  $t = 300 - 0\text{ ч}$ ; 6 — после силовой разгрузки в момент времени  $t = 300 + 0\text{ ч}$ ; 7 — после температурной разгрузки от значения  $T_1 = 900^\circ\text{C}$  до значения  $T_0 = 26^\circ\text{C}$  в момент времени  $t = 300 + 0\text{ ч}$ ; точки — экспериментальные данные

14, 23], экспериментальные данные [15] использовались для аппроксимации эпюры зависимостью (7), при этом получены следующие значения параметров:  $\sigma_0 = 61,9\text{ МПа}$ ,  $\sigma_1 = 621,5\text{ МПа}$ ,  $b = 0,102\text{ мм}$ ,  $h^* = 0$ . Значения параметров квазилинейных уравнений установившейся ползучести (41) при  $T_1 = 900^\circ\text{C}$  приведены в [6]:  $c = 1,5 \cdot 10^{-20}\text{ (МПа)}^{-m}$ ,  $m = 6,62$ .

При реализации изложенной методики задача ползучести в соответствии со схемой (40) решалась численно с использованием шагов по времени. Для этого выполнялась дискретизация отрезка  $[R_1, R_2]$  точками  $R_1 = r_0 < r_1 < \dots < r_k < r_{k+1} < \dots < r_n = R_2$ , а процесс реологического деформирования во времени разбивался на отрезки  $[t_j, t_{j+1}]$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ), в пределах которых характеристики напряженно-деформированного состояния в каждой точке  $r = r_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) полагались постоянными, соответствующими моменту времени  $t = t_j$ , а приращения компонент тензора деформаций ползучести на этом интервале вычислялись путем численного интегрирования уравнений (41) с помощью метода Эйлера. Все производные аппроксимировались соответствующими разностными соотношениями, а интегралы вычислялись по квадратурным формулам численного интегрирования.

Ниже приводятся результаты расчетов. На рис. 1 приведены теоретические распределения напряжений  $\sigma_z = \sigma_z(r, t)$  и  $\sigma_r = \sigma_r(r, t)$  (графики для компоненты  $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r, t)$  аналогичны графикам для компоненты  $\sigma_z = \sigma_z(r, t)$ ) для поверхностно упрочненного цилиндра в условиях ползучести при совместном действии осевой растягивающей силы  $F = 3184,8\text{ Н}$  и внутреннего давления  $q = 150\text{ МПа}$ . На рис. 2 представлены распределения компо-

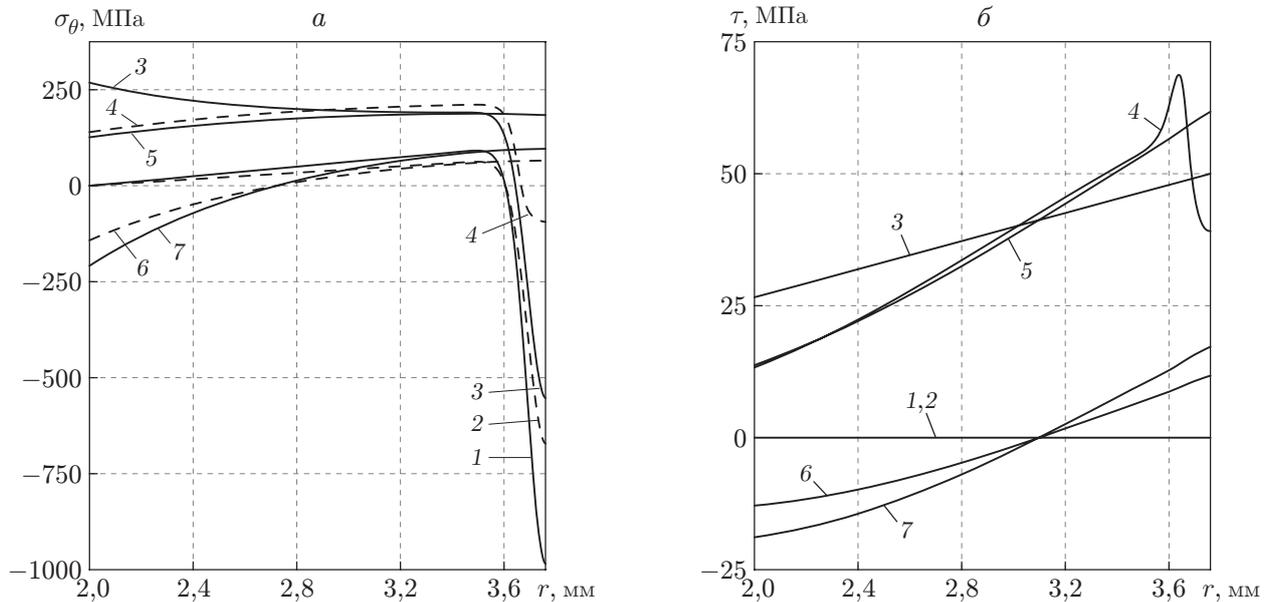


Рис. 2. Расчетные эпюры релаксации напряжений  $\sigma_\theta(r, t)$  (а) и  $\tau(r, t)$  (б) в полном поверхностно упрочненном цилиндрическом образце из сплава ЖС6КП в различные моменты времени:

1 — после процедуры упрочнения при  $t = 0 - 0$ ; 2 — после температурного нагружения от значения  $T_0 = 26^\circ\text{C}$  до значения  $T_1 = 900^\circ\text{C}$  при  $t = 0 + 0$ ; 3 — после приложения при  $t = 0 + 0$  крутящего момента  $M = 3840,8 \text{ Н}\cdot\text{мм}$  и внутреннего давления  $q = 150 \text{ МПа}$ ; 4 — в процессе ползучести в момент времени  $t = 20 \text{ ч}$ ; 5 — после окончания процесса ползучести при  $T_1 = 900^\circ\text{C}$  в течение  $t = 300 - 0 \text{ ч}$ ; 6 — после силовой разгрузки в момент времени  $t = 300 + 0 \text{ ч}$ ; 7 — после температурной разгрузки от значения  $T_1 = 900^\circ\text{C}$  до значения  $T_0 = 26^\circ\text{C}$  в момент времени  $t = 300 + 0 \text{ ч}$

нент  $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r, t)$  и  $\tau = \tau(r, t)$  при комбинированном воздействии крутящего момента  $M = 3840,8 \text{ Н}\cdot\text{мм}$  и внутреннего давления  $q = 150 \text{ МПа}$  в течение 300 ч. Анализ кривых на рис. 1 и рис. 2, а показывает, что приложение только температурной нагрузки при  $t = 0 + 0$  (линии 2) приводит к изменению распределения остаточных напряжений.

Следует отметить, что на стадии установившейся ползучести при  $t \rightarrow +\infty$  (при численной реализации рассмотренных примеров расчеты проводились для времени в диапазоне от нуля до нескольких тысяч часов) все компоненты тензоров напряжений в упрочненных образцах соответствовали компонентам тензора напряжений в неупрочненных образцах при тех же нагрузках, т. е. произошла полная релаксация первоначального напряженного состояния, имевшего место после упрочнения. Этот результат позволяет сделать вывод об адекватности разработанного метода расчета кинетики напряженно-деформированного состояния упрочненных цилиндров при рассмотренных комбинированных режимах нагружения.

Из рис. 2 следует, что в случае комбинированного воздействия внутреннего давления и крутящего момента помимо релаксации нормальных компонент тензора напряжений в тонком упрочненном слое происходит перераспределение касательной компоненты  $\tau$  (см. рис. 2, б). При этом в соответствии с формулой (38) при  $\gamma^p(r, 0) = 0$  после приложения к образцу крутящего момента при  $t = 0 + 0$  распределение касательного напряжения  $\tau = \tau(r, t)$  по радиусу образца задается линейной функцией аргумента  $r$ . Однако в процессе ползучести, в частности при  $t = 20 \text{ ч}$ , эта зависимость не является монотонной функцией  $r$ , что обусловлено достаточно большими значениями интенсивности напряжений в тонком

поверхностном слое  $r = 3,60 \div 3,76$  мм. Тем не менее к моменту окончания процесса ползучести  $t = 300 - 0$  ч касательные напряжения в поверхностном слое релаксировали до значений, соответствующих установившемуся (асимптотическому) состоянию, что также свидетельствует об адекватности метода расчета кинетики остаточных напряжений и для данного напряженного состояния.

Разработанный метод решения задач ползучести и релаксации в поверхностно упрочненных полых цилиндрических изделиях может быть использован в различных отраслях промышленности, в которых поверхностное упрочнение является часто используемой технологической процедурой.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Биргер И. А.** Остаточные напряжения. М.: Машгиз, 1963.
2. **Гринченко И. Г.** Упрочнение деталей из жаропрочных и титановых сплавов. М.: Машиностроение, 1971.
3. **Кравченко Б. А.** Термопластическое упрочнение — резерв повышения прочности и надежности деталей машин / Б. А. Кравченко, В. Г. Круцило, Г. Н. Гутман. Самара: Сам. гос. техн. ун-т, 2000.
4. **Сулима А. М.** Поверхностный слой и эксплуатационные свойства деталей машин / А. М. Сулима, В. А. Шувалов, Ю. Д. Ягодкин. М.: Машиностроение, 1988.
5. **Павлов В. Ф.** Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочненных деталей по остаточным напряжениям / В. Ф. Павлов, В. А. Кирпичев, В. С. Вакулук. Самара: Сам. науч. центр РАН, 2012.
6. **Радченко В. П.** Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях / В. П. Радченко, М. Н. Саушкин. М.: Машиностроение-1, 2005.
7. **Altenberger I., Nalla R. K., Sano Y., et al.** On the effect of deep-rolling and laser-peening on the stress-controlled low- and high-cycle fatigue behavior of Ti-6Al-4V at elevated temperatures up to 550 °C // Intern. J. Fatigue. 2012. V. 44. P. 292–302.
8. **Brockman R. A., Braisted W. R., Olson S. E., et al.** Prediction and characterization of residual stresses from laser shock peening // Intern. J. Fatigue. 2012. V. 36, N 1. P. 96–108.
9. **Soady K. A.** Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. 1. Effect of shot peening on fatigue resistance // Materials Sci. Technol. 2013. V. 29, N 6. P. 637–651.
10. **Terres M. A., Laalai N., Sidhom H.** Effect of nitriding and shot-peening on the fatigue behavior of 42CrMo4 steel: Experimental analysis and predictive approach // Materials Design. 2012. V. 35. P. 741–748.
11. **Радченко В. П., Саушкин М. Н., Цветков В. В.** Влияние термоэкспозиции на релаксацию остаточных напряжений в упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 3. С. 196–207.
12. **Радченко В. П., Саушкин М. Н., Бочкова Т. И.** Математическое моделирование и экспериментальное исследование формирования и релаксации остаточных напряжений в плоских образцах из сплава ЭП742 после ультразвукового упрочнения в условиях высокотемпературной ползучести // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. 2016. № 1. С. 93–112.
13. **Радченко В. П., Саушкин М. Н.** Прямой метод решения краевой задачи релаксации остаточных напряжений в упрочненном изделии цилиндрической формы при ползучести // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 6. С. 90–99.

14. **Радченко В. П., Саушкин М. Н.** Феноменологический метод расчета остаточных напряжений и пластических деформаций в полом поверхностно упрочненном цилиндрическом образце // Прикл. математика и механика. 2013. Т. 77, № 1. С. 143–152.
15. **Радченко В. П., Кочеров Е. П., Саушкин М. Н., Смыслов В. А.** Экспериментальное и теоретическое исследование влияния растягивающей нагрузки на релаксацию остаточных напряжений в упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести // ПМТФ. 2015. Т. 56, № 2. С. 169–177.
16. **Радченко В. П., Морозов А. П., Саушкин М. Н.** Стохастическая модель для расчета остаточных напряжений в поверхностно упрочненном полом цилиндре в условиях ползучести // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. 2017. № 1. С. 181–207.
17. **Сазанов В. П., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С., Павлов В. Ф.** Определение первоначальных деформаций в упрочненном слое цилиндрической детали методом конечно-элементного моделирования с использованием расчетного комплекса PATRAN/NASTRAN // Вестн. Уфим. гос. авиац. техн. ун-та. 2015. Т. 19, № 2. С. 35–40.
18. **Келлер И. Э., Трофимов В. Н., Владыкин А. В. и др.** К вопросу о реконструкции остаточных напряжений и деформаций пластины после дробеструйной обработки // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 1. С. 40–64.
19. **Радченко В. П., Афанасьева О. С., Глебов В. Е.** Исследование влияния остаточных напряжений на геометрические параметры поверхностно упрочненного бруса // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 464–478.
20. **Jebahi M., Gakwaya A., Levesque J., et al.** Robust methodology to simulate real shot peening process using discrete-continuum coupling method // Intern. J. Mech. Sci. 2016. V. 107. P. 21–33.
21. **Gallitelli D., Boyer D., Gelineau M., et al.** Simulation of shot peening: From process parameters to residual stress fields in a structure // Comptes Rendus Mécanique. 2016. V. 344, N 4/5. P. 355–374.
22. **Musinski W. D., McDowell D. L.** On the eigenstrain application of shot-peened residual stresses within a crystal plasticity framework: Application to Ni-base superalloy specimens // Intern. J. Mech. Sci. 2015. V. 100. P. 195–208.
23. **Саушкин М. Н., Радченко В. П., Павлов В. Ф.** Метод расчета полей остаточных напряжений и пластических деформаций в цилиндрических образцах с учетом анизотропии процесса поверхностного упрочнения // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 2. С. 173–182.
24. **Радченко В. П., Павлов В. Ф., Саушкин М. Н.** Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в поверхностно упрочненных втулках с учетом остаточных касательных напряжений // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. 2019. № 1. С. 138–150.

*Поступила в редакцию 24/I 2020 г.,  
после доработки — 24/I 2020 г.  
Принята к публикации 2/III 2020 г.*

---