2021

№ 3

УДК 622.831

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ОБРАЗЦОВ СОЛЯНЫХ ПОРОД

А. А. Барях, А. А. Цаюков, А. В. Евсеев, И. С. Ломакин

Горный институт УрО РАН, E-mail: bar@mi-perm.ru, ул. Сибирская, 78а, 614007, г. Пермь, Россия

Рассмотрен процесс нагружения образцов кубической формы одноосным сжатием и измерено смещение в среднем поперечном сечении на различном удалении от боковых граней. Математическое описание процесса деформирования соляных образцов основано на упругопластической модели среды с линейным изотропным упрочнением при ассоциированном законе пластического течения. В качестве условия пластичности использован объемный критерий прочности горных пород, отражающий разрушение за счет сдвига и отрыва. Трехмерная численная реализация математического моделирования выполнена методом конечных элементов в перемещениях с дискретизацией области на 8-узловые изопараметрические элементы гексаэдрической формы. По результатам расчетов откалибрована математическая модель процесса деформирования и разрушения образцов соляных пород. Показано, что упругопластическая модель с линейным изотропным упрочнением обеспечивает приемлемое соответствие экспериментальных и теоретических результатов и может использоваться для анализа устойчивости междукамерных целиков, оценки критической скорости их поперечного деформирования и остаточного срока службы.

Соляные породы, междукамерные целики, механические испытания, упругопластическая модель, упрочнение, численное моделирование, деформации, разрушение

DOI: 10.15372/FTPRPI20210302

Соляные породы относятся к классу структурно-неоднородных геоматериалов, которые проявляют квазипластичный характер деформирования, обладают выраженными реологическими свойствами и специфической реакцией на различные внешние воздействия [1-3]. Особенности поведения их под нагрузкой представляют интерес для геологов, горняков, специалистов в области создания подземных хранилищ углеводородного сырья и радиоактивных отходов [4-11].

При строительстве подземных сооружений в соляных формациях, ведении горных работ на месторождениях солей лабораторные испытания в основном проводятся для параметрического обеспечения стандартных геомеханических расчетов, согласно требованиям нормативных документов [12, 13]. Значительная часть исследований процессов деформирования и раз-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 19-77-30008).

рушения соляных пород при различных режимах нагружения связана с построением их феноменологических моделей и критериев разрушения [14, 15]. Реже лабораторные испытания используются для настройки математических моделей применительно к описанию устойчивости горнотехнических конструкций и прогноза изменения их состояния во времени. Такие исследования являются своего рода аналогом физического моделирования даже в случае несоблюдения критериев подобия.

Специфическое поведение соляных пород под нагрузкой (квазипластичность, проявление реологических свойств) создает определенные сложности в описании характера деформирования и разрушения несущих элементов камерной системы разработки соляных месторождений [16]. В [17] для оперативного контроля состояния междукамерных целиков, обеспечивающих поддержание вышележащей толщи пород при подземной разработке солей, предложено использовать их поперечную деформацию. Методами математического моделирования дана предварительная оценка критической скорости поперечного деформирования междукамерных целиков. Цель настоящей работы — уточнение математической модели деформирования и разрушения целиков, ее параметрическая настройка по результатам испытания образцов соляных пород большого размера.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Междукамерные целики различной пространственной конфигурации деформируются преимущественно в условиях одноосного сжатия. Физическое моделирование процесса их разрушения основывалось на одноосном сжатии соляных образцов кубической формы размера 300 × 300 × 300 мм (рис. 1). Испытание проводилось в условиях относительно жесткого нагружения в режиме заданных продольных деформаций на гидравлическом прессе ToniNorm с максимальной нагрузкой 5000 кН. В процессе нагружения регистрировалась абсолютная продольная деформация образца и измерялись смещения в его среднем поперечном сечении на различном удалении от боковых граней. Для изучения развития поперечных деформаций внутри образца закреплялись специальные глубинные марки. Контроль деформаций образца и перемещения глубинных марок в процессе испытаний осуществлялись с помощью бесконтактной трехмерной оптической системы Vic-3D фирмы "Correlated Solutions". Схема проведения эксперимента показана на рис. 2.



Рис. 1. Соляные образцы большого размера

Горизонтальные смещения марок 0, 5 и 10 см измерялись относительно центральной точки, расположенной на расстоянии 15 см от боковой грани образца (рис. 2a). Это позволило контролировать развитие процесса трещинообразования по ширине образца (рис. 2δ). Абсолютная продольная деформация образца определялась смещением точки 0 относительно точки 15.



Рис. 2. Схема определения перемещения реперных марок (*a*) и характер разрушения образца в процессе эксперимента (δ): *P* — нагрузка, действующая на образец; Δy — изменение высоты образца

По результатам испытаний крупномасштабных образцов построены диаграммы их нагружения и зависимости поперечных перемещений от продольных на различных расстояниях от боковых граней образца (рис. 3). Данная информация представляет экспериментальную основу для настройки математической модели разрушения соляного образца.



Рис. 3. Диаграммы нагружения соляного образца (*a*) и зависимости его поперечных деформаций от продольных (*б*): сплошная — эксперимент; штриховая — математическое моделирование; *l* — контур; *2* — марка 10 см; *3* — марка 5 см

На рис. 4. показано соотношение продольных и поперечных деформаций образца, полученное при лабораторных исследованиях. Эти результаты хорошо согласуются с данными натурных измерений деформаций междукамерных целиков, выполненных на замерных станциях, оснащенных системой контурных и глубинных реперов [18]. Приведенное соответствие является косвенным свидетельством адекватности деформационных процессов, протекающих в образце и целике, в условиях одноосного сжатия.



Рис. 4. Соотношение продольных и поперечных деформаций при испытании образцов больших размеров и в натурных измерениях деформаций междукамерных целиков: *1* — лабораторный эксперимент; *2* — рудник БКПРУ-4, 10 ЮВП; *3* — рудник БКПРУ-4, 1 ЮЗП

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Математическое описание процесса разрушения соляных образцов основывалось на упругопластической модели среды с линейным изотропным упрочнением при ассоциированном законе пластического течения. Использование неассоциированных моделей пластического течения [19–21] в определенной степени оказалось затруднительным в связи с отсутствием адекватного параметрического обеспечения, особенно при решении задачи в трехмерной постановке.

В качестве условия пластичности применялся объемный критерий прочности горных пород, предложенный в [22]. Данный критерий отражает разрушение за счет сдвига и отрыва, и в пространстве главных напряжений $\sigma_{1,2,3}$ имеет следующий вид:

$$F = 0.5[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \sigma_c \sigma_t,$$
(1)

где σ_c , σ_t — соответственно пределы прочности на одноосное сжатие и растяжение.

Предельная поверхность (F = 0), описываемая критерием (1), определяется параболоидом вращения относительно оси $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (рис. 5*a*). Внутренние точки (F < 0) соответствуют упругому режиму деформирования, а внешние (F > 0) — пластическому. Такая поверхность характеризует разрушение вследствие сдвига. Разрушению породы за счет растяжения и сдвига соответствует видоизмененная предельная поверхность: параболоид вращения принимает форму усеченного плоскостями $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 = 0$ параболоида (рис. 5*6*).



Рис. 5. Предельные поверхности текучести в пространстве главных напряжений при разрушении за счет сдвига (a) и за счет сдвига и отрыва (δ)

Граничные условия определялись в соответствии с выполненными экспериментальными исследованиями (рис. 2). На нижней грани кубического образца вертикальные перемещения принимались равными нулю. По периметру верхней и нижней граней ограничивались горизонтальные перемещения (соблюдалось условие полного сцепления образца с плитами пресса). На верхней грани задавались вертикальные смещения, соответствующие условиям нагружения образца.

Трехмерная численная реализация математического моделирования осуществлялось методом конечных элементов в перемещениях. В качестве элементов дискретизации области решения применялись 8-узловые трехмерные изопараметрические элементы гексаэдрической формы [23] с восемью точками интегрирования. Область решения (300 × 300 × 300 мм) разбита на кубические элементы со стороной 10 мм.

Решение систем нелинейных конечно-элементных уравнений проводилось по модифицированной схеме Ньютона–Рафсона (метод начальных напряжений) в инкрементальной форме с постоянной матрицей жесткости системы [24]. Численное интегрирование пластических определяющих соотношений выполнялось по явной схеме алгоритма обратного отображения [25].

При изотропном упрочнении поверхность текучести изменяет свою форму, что соответствует равномерному расширению исходной предельной поверхности [25]. Упрочнение происходит за счет изменения параметров внутреннего состояния материала, которое при использовании критерия разрушения (1) определяется двумя параметрами: пределами прочности на сжатие σ_c и растяжение σ_t . При разрушении за счет сдвига значение σ_t не изменяется, а при разрушении за счет отрыва принимается равным нулю. Таким образом, расширение предельной поверхности может быть реализовано только путем изменения параметра σ_c . В этом случае система уравнений алгоритма обратного отображения, описывающая изотропное расширение поверхности текучести, примет вид:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} - \lambda N_{n}, \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{c} = \boldsymbol{\sigma}_{n}^{c} + \lambda H, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n}^{e} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = D \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e}. \\ F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{c}) = 0, \end{cases}$$
(2)

Здесь ε , σ — векторы главных деформаций и напряжений; D — матрица упругости элемента; N — вектор пластических деформаций; λ — пластический множитель. Индексы n, n+1 — предыдущий и текущий шаги интегрирования.

Компоненты вектора главных деформаций $\mathcal{E}^{e \text{ trial}}$ соответствуют главным деформациям, полученным из упругого пробного решения, компоненты вектора \mathcal{E}^{e} — скорректированным в результате процедуры алгоритма обратного отображения. Символом σ^{c} обозначается текущее значение параметра прочности на сжатие, H — модуль упрочнения. Система (2) решается относительно λ , \mathcal{E}_{n+1}^{e} и σ_{n+1}^{c} и сводится к квадратному уравнению относительно λ :

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0.$$
⁽³⁾

Для различных видов напряженного состояния в результате очередного пробного решения уравнение (3) будет определяться разными коэффициентами. Напряженному состоянию $\sigma_{1,2,3} < 0$ соответствуют коэффициенты:

......

1 - 2

Е

$$A = d_{1}[v^{2} - 3(N_{1}N_{2} + N_{2}N_{3} + N_{1}N_{3})] - d_{2}vH,$$

$$B = d_{1}[ev - 3(N_{1}\varepsilon_{1,n+1}^{e \text{ trial}} + N_{2}\varepsilon_{2,n+1}^{e \text{ trial}} + N_{3}\varepsilon_{3,n+1}^{e \text{ trial}})] + d_{2}[eH + v(\sigma_{t} - \sigma_{n}^{c})] - H\sigma_{t},$$

$$C = d_{1}[e^{2} - 3(\varepsilon_{1,n+1}^{e \text{ trial}}\varepsilon_{2,n+1}^{e \text{ trial}} + \varepsilon_{3,n+1}^{e \text{ trial}} + \varepsilon_{3,n+1}^{e \text{ trial}} + \varepsilon_{3,n+1}^{e \text{ trial}})] + d_{2}e(\sigma_{n}^{c} - \sigma_{t}) - \sigma_{t}\sigma_{n}^{c},$$

....

где

$$d_{1} = (D_{11} - D_{12})^{2},$$

$$d_{2} = D_{11} + 2D_{12},$$

$$v = N_{1} + N_{2} + N_{3},$$

$$= \varepsilon_{1,n+1}^{e \text{ trial}} + \varepsilon_{2,n+1}^{e \text{ trial}} + \varepsilon_{3,n+1}^{e \text{ trial}}$$

Компоненты вектора пластических деформаций для ассоциированного закона пластического течения имеют вид

$$N_{1} = 2\sigma_{n}^{1} - \sigma_{n}^{2} - \sigma_{n}^{3} + \sigma_{n}^{c} - \sigma_{t},$$

$$N_{2} = 2\sigma_{n}^{2} - \sigma_{n}^{1} - \sigma_{n}^{3} + \sigma_{n}^{c} - \sigma_{t},$$

$$N_{3} = 2\sigma_{n}^{3} - \sigma_{n}^{1} - \sigma_{n}^{2} + \sigma_{n}^{c} - \sigma_{t}.$$
(4)

Если в результате очередного пробного решения первая компонента главных напряжений оказывается положительной, а остальные — отрицательными ($\sigma_1 > 0, \sigma_{2,3} < 0$), то необходимо проверить следующее условие:

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_t = 0 \to F > 0.$$

В случае его выполнения уравнение (3) определяется следующими коэффициентами:

$$A = d_1(N_2^2 + N_3^2) - d_2N_2N_3 + d_3H(N_2 + N_3),$$

$$B = -2d_1(N_2\varepsilon_{2,n+1}^{e \text{ trial}} + N_3\varepsilon_{3,n+1}^{e \text{ trial}}) + d_2(N_3\varepsilon_{2,n+1}^{e \text{ trial}} + N_2\varepsilon_{3,n+1}^{e \text{ trial}}) + d_3[\sigma_n^c(N_2 + N_3) - H(\varepsilon_{2,n+1}^{e \text{ trial}} + \varepsilon_{3,n+1}^{e \text{ trial}})],$$

$$C = d_1(\varepsilon_{2,n+1}^{e \text{ trial}} + \varepsilon_{3,n+1}^{e \text{ trial}}) - d_2\varepsilon_{2,n+1}^{e \text{ trial}}\varepsilon_{3,n+1}^{e \text{ trial}} - d_3\sigma_n^c(\varepsilon_{2,n+1}^{e \text{ trial}} + \varepsilon_{3,n+1}^{e \text{ trial}}),$$

где

$$d_{1} = c + 3ab,$$

$$d_{2} = c - 3ab^{2},$$

$$d_{3} = 2b^{2}D_{11} - D_{11} - D_{12}$$

И

$$a = (D_{11} - D_{12})^2, \quad b = \frac{D_{12}}{D_{11}}, \quad c = \frac{a^2}{D_{11}^2}.$$

Иначе пластический множитель λ считается равным нулю. Компоненты главных деформаций вычисляются из следующих соотношений:

$$\varepsilon_{1,n+1}^{e} = -\frac{D_{12}}{D_{11}}(\varepsilon_{2,n+1}^{e} + \varepsilon_{3,n+1}^{e}), \quad \varepsilon_{2,n+1}^{e} = \varepsilon_{2,n+1}^{e \text{ trial}} - \lambda N_{2}, \quad \varepsilon_{3,n+1}^{e} = \varepsilon_{3,n+1}^{e \text{ trial}} - \lambda N_{3}.$$

Компоненты вектора пластических деформаций рассчитываются согласно выражению (4).

18

Для напряженного состояния, при котором первые две компоненты главных напряжений в результате очередного пробного решения являются положительными, а третья — отрицательной ($\sigma_{1,2} > 0, \sigma_3 < 0$), проверяется дополнительное условие $\sigma_3^{\text{trial}} < -\sigma_n^c$. Если оно выполняется, то коэффициенты уравнения (3) находятся так:

$$A = d_1 N_3 (d_1 N_3 - H),$$

$$B = d_1 [(H - 2d_1 N_3) \mathcal{E}_{3,n+1}^{e \text{ trial}} - \sigma_n^c N_3],$$

$$C = d_1 \mathcal{E}_{3,n+1}^{e \text{ trial}} (d_1 \mathcal{E}_{3,n+1}^{e \text{ trial}} + \sigma_n^c),$$

где

$$d_1 = \frac{D_{11}^2 + D_{11}D_{12} - 2D_{12}^2}{D_{11} + D_{12}}$$

Иначе пластический множитель λ считается равным нулю. Компоненты главных деформаций:

$$\varepsilon_{1,n+1}^{e} = \varepsilon_{2,n+1}^{e} = -\frac{D_{12}}{D_{11} + D_{12}} \varepsilon_{3,n+1}^{e}, \quad \varepsilon_{3,n+1}^{e} = \varepsilon_{3,n+1}^{e \text{ trial}} - \lambda N_{3}.$$

Компонента вектора пластических деформаций N_3 определяется по формуле (4). Если на очередном шаге пробного решения все компоненты главных напряжений оказываются положительными ($\sigma_{1,2,3} > 0$), то на текущем шаге интегрирования $\sigma_{1,2,3} = 0$. Таким образом, в результате решения квадратного уравнения (3) с коэффициентами, соответствующими одному из описанных напряженных состояний, находится пластический множитель λ , удовлетворяющий условию $\lambda = \min_{\lambda_{1,2} \ge 0} (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения (3). Главные напряжения, лежащие на предельной поверхности, вычисляются по закону Гука. Текущий параметр прочности на сжатие σ^c рассчитывается согласно соотношению системы (2).

Калибровка математической модели по результатам физических экспериментов проводилась в два этапа. Сначала на стадии упругого деформирования (примерно до 1200 кН, рис. 3) подбирался соответствующий модуль продольной упругости. Затем при нагрузках более 1200 кН путем вариации пределов прочности σ_c , σ_t и модуля упрочнения описывался переход от упругого режима деформирования к пластическому. Установленные по результатам математического моделирования механические параметры соляных образцов (модуль Юнга 6.7 ГПа, коэффициент Пуассона 0.3, $\sigma_c = 15$ МПа, $\sigma_t = 1$ МПа) в целом соответствуют значениям свойств соляных пород, определяемым в обычных лабораторных экспериментах. Расчетная диаграмма нагружения приведена на рис. 3*a*. Как и следовало ожидать, она довольно точно описывает все этапы деформирования соляного образца кубической формы. Более интересным представляется сопоставление результатов оценки экспериментальных и теоретических зависимостей поперечных деформаций образца от продольных (рис. 3*б*). Здесь наблюдается весьма приемлемое согласование деформаций реперных точек, полученных в модельных испытаниях и рассчитанных методом математического моделирования. Это свидетельствует об адекватности математической модели и ее успешной калибровке по экспериментальным данным.

АНАЛИЗ РАЗРУШЕНИЯ

На рис. 6*а* представлено распределение горизонтальных напряжений растяжения в поперечном сечении образца, ориентированном вкрест расположения реперных точек (рис. 2*a*). На этапе перехода от упругой стадии деформирования к пластической в приконтурной зоне образца формируются области концентрации напряжений растяжения, интенсивность которых повышается с увеличением действующей нагрузки. Учитывая, что соли характеризуются низким пределом прочности на растяжение, это указывает на потенциальную возможность образования трещин отрыва в пределах боковых граней образца. Аналогичная картина наблюдается и в распределении горизонтальных деформаций растяжения (рис. 6*б*). Здесь растяжение реализуется в приконтурной зоне образца, при этом горизонтальные деформации превышают предельные для соляных пород значения 0.1 - 0.2%. Факт формирования поверхностной субвертикальной трещиноватости подтверждается результатами механических испытаний (см. рис. 2*б*) и отмечается при визуальном обследовании реальных горнотехнических конструкций.



Рис. 6. Распределение горизонтальных напряжений (*a*) и деформаций (б) растяжения в поперечном сечении образца: 1, 2 — этапы нагружения образца

Динамика разрушения образца за счет образования трещин сдвига и отрыва показана на рис. 7. Развитие процесса разрушения начинается с угловых зон. Трещины отрыва, как уже отмечалось, формируются в приповерхностных частях образца. Сдвиг реализуется во внутренней области, образуя характерную для объемного напряженного состояния конусообразную форму разрушения. Несмотря на активную стадию пластического деформирования (интенсивное трещинообразование), несущая способность образца сохраняется. Ее снижение происходит уже на этапе диспергирования соляных пород под нагрузкой.



Рис. 7. Динамика разрушения образца за счет отрыва и сдвига (черный и серый цвета соответственно)

выводы

По результатам механических испытаний крупномасштабных соляных образцов откалибрована математическая модель процесса их деформирования и разрушения. Упругопластическая модель соляных пород с линейным изотропным упрочнением при ассоциированном законе пластического течения обеспечивает приемлемое соответствие экспериментальных данных и результатов численных расчетов. Это относится к теоретическому описанию характера разрушения соляных образцов и зависимости поперечных деформаций от продольных, которые согласуются с натурными измерениями деформаций междукамерных целиков.

Предложенная модель с базовым параметрическим обеспечением может использоваться для анализа устойчивости междукамерных целиков, оценки критической скорости их поперечного деформирования и остаточного срока службы, что является крайне важным для обеспечения безопасности ведения горных работ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. The mechanical behavior of Salt IX, Pros. of the 9th Conf. on the Mechanical behavior of salt (SaltMech IX), Hannover, Germany, 2018. 1024 p.
- 2. He M. M., Ren J., Su P., Li N., and Chen Y. H. Experimental investigation on fatigue deformation of salt rock, J. Soil Mech. and Found. Eng., 2020, Vol. 56, No. 6. P. 402–409.
- **3.** Dubey R. K. and Gairola V. K. Influence of structural anisotropy on the uniaxial compressive strength of pre-fatigued rocksalt from Himachal Pradesh, India, J. Rock Mech. Min. Sci., 2000, Vol. 37, No. 6. P. 993–999.
- 4. Závada P., Desbois G., Urai J. L., Schulmann K., Rahmati M., Lexa O., and Wollenberg U. Impact of solid second phases on deformation mechanisms of naturally deformed salt rocks (Kuh-e-Namak, Dashti, Iran) and rheological stratification of the Hormuz Salt Formation, J. Structural Geol., 2015, Vol. 74. P. 117–144.
- 5. Chemia Z., Koyi H., and Schmeling H. Numerical modelling of rise and fall of a dense layer in salt diapirs, Geophysical J. Int., 2008, Vol. 172, No. 2. P. 798-816.
- 6. Baryakh A. A., Lobanov S. Y., and Lomakin I. S. Analysis of time-to-time variation of load on interchamber pillars in mines of the Upper Kama potash salt deposit, J. Min. Sci., 2015, Vol. 51, No. 4. P. 696–706.
- Pałac-Walko B. and Pytel W. Geomechanical risk assessment for saltrock underground workings, using strength theories based on selected 2D and true 3D triaxial compression laboratory tests, Int. Multidisciplinary Scientific GeoConf. Surveying Geol. and Min. Ecol. Management, SGEM, 2019, Vol. 19, Issue 1.3. — P. 307-314.
- Wang Q. and Hesser J. Determination of the deformation behaviour of salt rock by evaluation of convergence measurements in shafts, Rock Characterisation, Modelling and Engineering Design Methods — Proceedings of the 3rd ISRM SINOROCK 2013 Symp., 2013. — P. 805–810.
- 9. Deng J. Q., Yang Q., Liu Y. R., and Pan Y. W. Stability evaluation and failure analysis of rock salt gas storage caverns based on deformation reinforcement theory, Comp. and Geotech., 2015, Vol. 68. P. 147–160.
- Yin H., Yang C., Ma H., Shi X., Zhang N., Ge X., Li H., and Han Y. Stability evaluation of underground gas storage salt caverns with micro-leakage interlayer in bedded rock salt of Jintan, China, Acta Geotechnica, 2020, Vol. 15, Issue 3. — P. 549–556.

- Tsang C. F., Bernier F., and Davies C. Geohydromechanical processes in the excavation damaged zone in crystalline rock, rock salt, and indurated and plastic clays — in the context of radioactive waste disposal, J. Rock Mech. Min. Sci., 2005, Vol. 42. — P. 109–125.
- 12. Указания по защите рудников от затопления и охране подрабатываемых объектов на Верхнекамском месторождении калийно-магниевых солей. — Пермь: Березники, 2014. — 130 с.
- 13. BS EN 1918-3: Gas infrastructure underground gas storage. P. 3. Functional recommendations for storage in solution-mined salt caverns, British Standards Institution, London, 2016. 42 p.
- Heusermann S., Rolfs O., and Schmidt U. Nonlinear finite-element analysis of solution mined storage caverns in rock salt using the LUBBY2 constitutive model, Computers and Structures, 2003, Vol. 81, Issue 8-11. — P. 629-638.
- **15.** Hou Z. Mechanical and hydraulic behavior of rock salt in the excavation disturbed zone around underground facilities, J. Rock Mech. Min. Sci., 2003, Vol. 40, No. 5. — P. 725–738.
- 16. Барях А. А., Бельтюков Н. Л., Самоделкина Н. А., Токсаров В. Н. Обоснование возможности повторной отработки запасов калийных руд // ФТПРПИ. 2020. № 3. С. 85–97.
- Baryakh A., Lobanov S., Lomakin I., and Tsayukov A. Mathematical modelling of limit states for load bearing elements in room-and-pillar mining of saliferous rocks, EUROCK 2018: Geomechanics and Geodynamics of Rock Masses, 2018, Taylor and Francis Group, London. — P. 767–773.
- Evseev A., Asanov V., Lomakin I., and Tsayukov A. Experimental and theoretical studies of undermined strata deformation during room and pillar mining, EUROCK 2018: Geomechanics and Geodynamics of Rock Masses, 2018, Taylor and Francis Group, London. — P. 985–990.
- 19. Гарагаш И. А., Николаевский В. Н. Неассоциированные законы течения и локализация пластической деформации // Успехи механики. — 1989. — Т. 12. — № 1. — С. 131–183.
- **20.** Стефанов Ю. П. Локализация деформаций и разрушение в геоматериалах. Численное моделирование // Физ. мезомеханика. 2002. № 5. С. 107–118.
- **21.** Стефанов Ю. П., Евсеев В. Д. Численное исследование деформации и разрушения горных пород под действием жесткого штампа // Изв. ТПУ. 2009. Т. 315. № 1. С. 77–81.
- **22.** Baryakh A. A. and Samodelkina N. A. About one criteria of strength of rocks, Chebyshevskii Sbornik, 2017, Vol. 18, Issue 3. P. 72–87.
- 23. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., and Zhu J. Z. The finite element method: its basis and fundamentals, 2013, Butterworth-Heinemann, Oxford. 756 p.
- 24. Фадеев А. Б. Метод конечных элементов в геомеханике. М.: Недра, 1987. 221 с.
- **25.** Eduardo A. de Souza Neto, Djordje Peric, and David R. J. Owen. Computational methods for plasticity: theory and applications, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, 2008. 814 p.

Поступила в редакцию 11/III 2021 После доработки 17/V 2021 Принята к публикации 24/V 2021