Теплофизика и аэромеханика, 2008, Том 15, № 4

УДК 536.3+536.42

Анализ свойств теплового излучения осесимметричных полупрозрачных систем с проницаемыми границами*

Н.А. Рубцов, С.Д. Слепцов

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

E-mail: sleptsov@itp.nsc.ru

Представлен численный анализ полусферических значений поглощательной, пропускательной и отражательной способностей плоского слоя и поглощательной способности сферы в зависимости от оптической толщины и показателя преломления.

Ключевые слова: тепловое излучение, полупрозрачная среда, проницаемые границы.

Рассматриваются осесимметричные системы в виде плоского слоя, составленного из излучающей и поглощающей сред с проницаемыми для теплового излучения границами. Проницаемая граница не поглощает излучение, выделяя рассматриваемую систему с показателем преломления n из окружающей среды с показателем преломления n_0. Излучение является монохроматическим, либо интегральным. Анализ проводится на основе результатов, представленных в работе [1].

Основная идея получения указанных результатов сводится к использованию интегральных уравнений излучения в замкнутых излучающих (и поглощающих) системах с непроницаемой границей для анализа термодинамически равновесного состояния системы.

В этой связи привлекались интегральные уравнения состояния системы, записанные относительно плотности потока полусферического результирующего, $E_{\text{рез}}$, излучения в исходной —

$$E_{\text{рез}}(M) = \left(1 - R(M)\right)\int\limits_F E_{\text{эф}}(N)Q(M,N)dF_N + \left(1 - R(M)\right)\int\limits_V \eta_{\text{соб}}(P)L(M,P)dV_P - $$
$$ - E_{\text{соб}}(M), \quad M \in F, \qquad (1)$$

и разрешающей —

$$E_{\text{рез}}(M) = \left(1 - R(M)\right)\int\limits_F E_{\text{соб}}(N)\Gamma(M,N)dF_N + \left(1 - R(M)\right)\int\limits_V \eta_{\text{соб}}(P)Z(M,P)dV_P - $$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (МК-601.2008.8) и РФФИ (грант № 08-08-00527-а).

$$-E_{\text{соб}}(M), \quad M \in F, \qquad (2)$$

формах [2]. Здесь

$$\Gamma(M,N) = Q(M,N) + \int_F R(P)Q(M,P)\Gamma(P,N)dF_P, \ \ M \in F, \ \ N \in F, \qquad (3)$$

$$Z(M,P) = L(M,P) + \int_F R(N)\Gamma(M,N)L(N,P)dF_N, \ \ M \in F, \ \ P \in V \qquad (4)$$

— разрешающие ядра интегрального уравнения излучения (2), учитывающие многократные отражения от внутренней поверхности системы F, исходящие из элементарной площадки с точкой $M \in F$ и попадающие либо снова на элементную площадку с точкой $N \in F$, либо — в элементарный объем $P \in V$.

$$Q(M,N) = e^{-h}\frac{\cos(s,n_M)\cos(s,n_N)}{\pi r_{MN}^2}, \ \ L(M,P) = e^{-\Delta h}\frac{\cos(s,n_M)}{4\pi r_{MP}^2} \qquad (5)$$

— исходные ядра интегрального уравнения (1), определяющие прямое, без промежуточных отражений, взаимодействие $Q(M, N)$ с площадками с точками $M \in F$ и $N \in F$, а $(L(M, P))$ — с точками $M \in F$ и элементарного объема $P \in V$. $E_{\text{рез}}$, $E_{\text{эф}} = \left(E_{\text{соб}} + E_{\text{отр}}\right)$, $E_{\text{отр}} = RE_{\text{пад}}$, $E_{\text{пад}}$, $E_{\text{соб}} = (1-R)E_{\text{в}}$ — плотности потоков полусферических излучений: результирующего, эффективного, собственного, отраженного, падающего и равновесного соответственно, R — коэффициент полусферического отражения от внутренней поверхности системы, $\eta_{\text{соб}} = \alpha'\eta_{\text{в}} = 4\alpha E_{\text{в}}$ — плотность потока сферического собственного излучения. В уравнении (5) $h = \int_0^r \alpha(s)ds$, $\Delta h = \int_{r^*}^r \alpha(s)ds$, α — коэффициент объемного поглощения излучения, r^*, r — фиксированные и текущие точки, r_{MN}, r_{MP} — расстояния между точками.

Применительно к условиям проницаемой границы системы следует иметь в виду, что плотности потоков собственного объемного $\left(\hat{\eta}_{\text{соб}}\right)$ и поверхностного $\left(\hat{E}_{\text{соб}}\right)$ излучений определяются соответственно как $\hat{\eta}_{\text{соб}} = n^2\eta_{\text{соб}} = 4\alpha n^2 E_{\text{в}}$ и $\hat{E}_{\text{соб}} = n^2 E_{\text{соб}} = n^2 A E_{\text{в}} = n^2 \varepsilon E_{\text{в}}$, где $A = 1-R$, $\varepsilon = A$, а граница системы является проницаемой по отношению к внешнему и внутреннему излучениям.

Система с проницаемой для излучения границей обладает способностью поглощать излучение, проникающее через ее внешнюю поверхность, пропускать излучение, проникшее в систему и выходящее через ее внутреннюю поверхность, а также отражать падающее на систему излучение наружной и внутренней поверхностями границы.

На проницаемой и непоглощающей границе системы справедливо условие инвариантности встречных потоков излучения:

$$E_{\text{пад}}(M)n^2\left(1-R(M)\right) = E^*_{\text{пад}}(M)n_0^2\left(1-R_0(M)\right), \ \ M \in F, \qquad (6)$$

где $E_{\text{пад}}(M)$, $E^*_{\text{пад}}(M)$ — плотности потоков излучения, падающего на элементарную площадку с точкой $M \in F$ изнутри и снаружи системы соответственно.

В рассматриваемых осесимметричных системах полагаем $R(M) = R$, $R_0(M) = R_0$, $E_{\text{пад}}(M) = E_{\text{пад}}$, $E^*_{\text{пад}}(M) = E^*_{\text{пад}}$. В состоянии термодинамического равновесия системы и окружающей среды $E_{\text{пад}} = E^*_{\text{пад}} = E_{\text{в}}$, а из уравнения (6) вытекает оптический инвариант излучения

$$n^2\left(1-R\right) = n_0^2\left(1-R_0\right), \tag{7}$$

определяющий соотношение между коэффициентами отражения на внутренней (R) и наружной (R_0) поверхностях при условии $n_0 < n$.

Соотношение (7) справедливо для условий сопряжения двух полубесконечных сред. При этом R_0 для невогнутой поверхности определяется соотношением Уолша–Данкла [3], вытекающим из формулы Френеля.

Плотность потока излучения, выходящего из системы после однократного отражения от внутренней поверхности и пропуска отраженного излучения средой с учетом (6), определяется следующим образом:

$$RdE_{\text{пад}}n^2\left(1-R\right) = RdE^*_{\text{пад}}n_0^2\left(1-R_0\right). \tag{8}$$

Здесь

$$d \equiv d(F,F) = \frac{1}{F}\int\limits_F\int\limits_F Q(M,N)dF_N dF_M \tag{9}$$

— интегральное значение пропускательной способности среды, вытекающее из интегрального уравнения (1), которое будучи проинтегрированным по поверхности и рассматриваемым в условиях термодинамического равновесия (при котором $E_{\text{рез}} = 0$, $E_{\text{пад}} = E_{\text{эф}} = E_{\text{в}}$, $\eta_{\text{соб}} = 4\alpha E_{\text{в}}$) вырождается в уравнение замкнутости,

$$d(F,F) + a(F,V) = 1, \tag{10}$$

где

$$a(F,V) = \frac{1}{F}\int\limits_F\int\limits_V \alpha(P)L(M,P)dV_P dF_M \tag{11}$$

— осредненная по поверхности поглощательная способность среды, заполняющей систему [2].

Из анализа соотношений (6) и (8) следует, что плотность потока собственного излучения проницаемой границы $E_{\text{соб}}$ формально подразделяется на две составляющие

$$\hat{E}_{\text{соб}} = \hat{E}^{(1)}_{\text{соб}} + \hat{E}^{(2)}_{\text{соб}}, \tag{12}$$

где

$$\hat{E}^{(1)}_{\text{соб}} = \frac{E^*_{\text{пад}}\left(1-R_0\right)n_0^2}{1+Rd}, \quad \hat{E}^{(2)}_{\text{соб}} = \frac{RdE^*_{\text{пад}}\left(1-R_0\right)n_0^2}{1+Rd}. \tag{13}$$

Используя представление формулы (12) для $E_{\text{соб}}(N)$ под знаком интеграла в выражении (2), а также интегрируя это выражение по поверхности системы, получаем:

$$E_{\text{рез}} = \frac{1}{F}\left(1-R\right)\int\limits_F\int\limits_F \hat{E}^{(1)}_{\text{соб}}(N)\Gamma(M,N)dF_N dF_M + \frac{1}{F}\left(1-R\right)\int\limits_F\int\limits_F \hat{E}^{(2)}_{\text{соб}}(N)\Gamma(M,N)dF_N dF_M +$$
$$+\frac{1}{F}\left(1-R\right)\int\limits_F\int\limits_V \hat{\eta}_{\text{соб}}(P)Z(M,P)dV_P dF_M - E^*_{\text{пад}}\left(1-R_0\right)n_0^2. \tag{14}$$

В состоянии термодинамического равновесия излучающей (поглощающей) системы и окружающей среды $E_{\text{рез}} \equiv 0$, $E_{\text{в}}(P) = E_{\text{в}}$, $E^{*}_{\text{пад}} = E_{\text{в}}$, $\alpha(P) = \alpha$, $\hat{\eta}_{\text{соб}}(P) = \hat{\eta}_{\text{соб}} = 4n^2\alpha E_{\text{в}}$, при этом двойные интегралы, учитывающие процессы многократного отражения от внутренней поверхности рассматриваемых осесимметричных систем, определяются простейшими соотношениями [1]:

$$\frac{1}{F}\int_F\int_F \Gamma(M,N)dF_N dF_M = \frac{d}{1-Rd}, \tag{15}$$

$$\frac{4\alpha}{F}\int_F\int_V Z(M,P)dV_P dF_M = \frac{1-d}{1-Rd}. \tag{16}$$

На основании этих соображений, а также учитывая выражение оптического инварианта (7) из уравнения (14), получаем уравнение замкнутости. Оно записывается в форме балансового соотношения относительно интегральных значений поглощательной A^*, пропускательной D^* и отражательной R^* способностей осесимметричной системы, обладающей поглощательной способностью α и коэффициентом преломления n [1]:

$$A^* + D^* + R^* = 1. \tag{17}$$

Здесь

$$A^* = \frac{(1-R)n^2(1-d)}{1-Rd}, \tag{18}$$

$$D^* = \frac{(1-R)^2 n^2 d}{1-R^2d^2}, \tag{19}$$

$$R^* = 1-(1-R)n^2 + \frac{R(1-R)^2 n^2 d^2}{1-R^2d^2}, \tag{20}$$

где $d = d(\alpha L)$, L — характерный размер системы.

Ниже проводится анализ оптических свойств осесимметричных систем, представленных плоским слоем и сферой. В случае плоского слоя [2]

$$d = 2K_3(h_0), \tag{21}$$

где $K_3(h_0) = \int_0^1 e^{-h_0/\mu}\mu d\mu$ — экспоненциальный интеграл от оптической толщины $h_0 = \alpha L$ (L — толщина слоя). В случае сферы [2]

$$d = \frac{1}{2h_0}\left[1-(1+2h_0)e^{-2h_0}\right], \tag{22}$$

где $h_0 = \alpha\rho_c$ — оптическая толщина сферы (ρ_c — радиус сферы).

Формулы (18)–(20) справедливы в рамках применимости оптического инварианта (7), используемого при рассмотрении процессов отражения на вогнутых поверхностях. Для учета влияния вогнутости система уравнений (7), (18)–(20) дополняется обобщенным оптическим инвариантом, предложенным в [1], и записывается в виде:

$$\left(1-R_{эф}\right)n^2=\left(1-R^*\right)n_0^2. \qquad (23)$$

Здесь $R_{эф}$ — эффективное значение полусферического коэффициента отражения на внутренней, вогнутой поверхности.

Таким образом, вычисление оптических свойств рассматриваемых осесимметричных систем осуществляется в следующем порядке:

– по формуле Уолша–Данкла [3]

$$R_0=\frac{1}{2}+\frac{(n-1)(3n+1)}{6(n+1)^2}-\frac{2n^3\left(n^2+2n-1\right)}{\left(n^2+1\right)\left(n^4-1\right)}+\frac{8n^4\left(n^4+1\right)}{\left(n^2+1\right)\left(n^4-1\right)^2}\ln(n)+\frac{n^2\left(n^2-1\right)^2}{\left(n^2+1\right)^3}\ln\frac{n-1}{n+1},$$

для заданного значения n/n_0 вычисляется R_0,

– с помощью оптического инварианта (7) определяется значение коэффициентов отражения R на внутренней поверхности системы,

– по формулам (18)–(20), с учетом (21), (22) для вычисления d рассматриваемой конфигурации, вычисляются значения A^*, D^*, R^* в первом приближении;

– по найденному значению R^* с помощью (23) вычисляется эффективное значение коэффициента отражения $R_{эф}$ на внутренней поверхности системы;

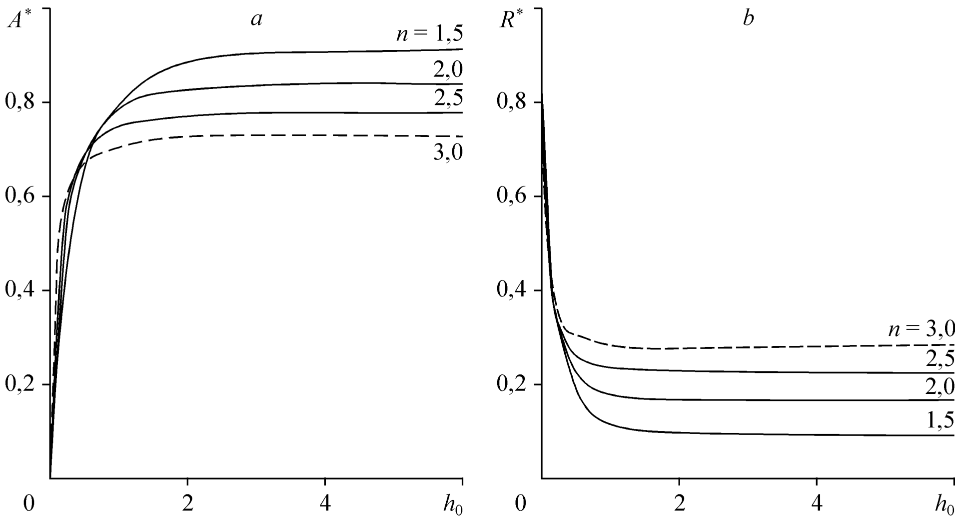
– по формулам (18)–(20), в которых R заменяется на $R_{эф}$, вычисляются уточненные, таким образом, значения A^*, D^*, R^*,

– в качестве критерия оценки точности расчетов привлекается условие (17).

Ниже представлены результаты численного анализа оптических свойств плоского слоя и сферы, образованных средами с оптической толщиной $h_0=0-6,0$ и показателями преломления $n=1,5$, 2,0, 2,5, 3,0 при $n_0=1$.

На рис. 1 представлены зависимости $A^*=A^*(h_0)$, $D^*=D^*(h_0)$ и $R^*=R^*(h_0)$ в плоском слое для указанных выше значений *n*. Видно, что поглощательная способность слоя монотонно увеличивается с ростом его оптической толщины, а уровень ее значений понижается по мере увеличения показателя преломления (см. рис. 1, *a*). Отражательная способность резко падает при увеличении оптической толщины от нуля до $h_0=1$ и остается практически неизменной при $h_0>1$. Уровень ее значений монотонно увеличивается вместе с показателем преломления (рис. 1, *b*). Пропускательная способность внутренней границы D^* монотонно падает при росте оптической толщины, причем ее нулевые значения смещаются в область меньших значений (от $h_0=4,0$ до $h_0=2$) по мере увеличения показателя преломления (см. рис. 1, *c*).

На рис. 2 представлена зависимость $A^*=A^*(n)$, $R^*=R^*(n)$, $D^*=D^*(n)$ для значений от $h_0=0$ до 1,0. При росте оптической толщины поглощательная способность параметра A^* монотонно увеличивается с увеличением показателя преломления (см. рис. 2, *a*). Однако начиная с $h_0=0,2$ возникает экстремальная область значений, смещающаяся по оси *n* в область малых значений по мере увеличения h_0. Начиная от значений $h_0\le 0,5$, поглощательная способность A^* падает по мере увеличения *n*. При $h_0\sim 0,6$ значения A^* слабо зависят от *n*.



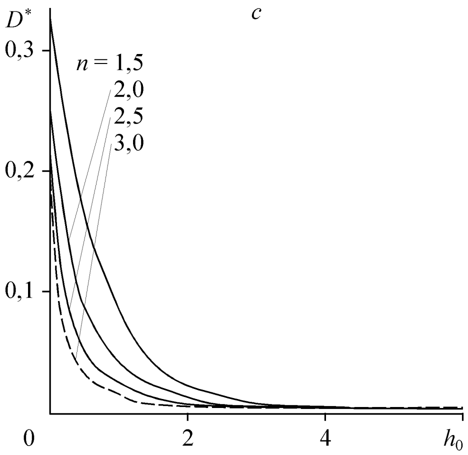


Рис. 1. Зависимость характеристик излучения плоского слоя от оптической толщины при разных значениях коэффициентов преломления.

Отражательная способность R^* с ростом n монотонно увеличивается в области значений $h_0 = 1,0$. При $h_0 > 1,0$ значения $R^* = R^*(n)$ слабо отличаются от значений $R^*(n)$ при $h_0 = 1,0$. Однако по мере уменьшения оптической толщины h_0 зависимость R^* от n ослабевает. При $h_0 = 0,15$ значения R^* практически не зависят от n и при $h_0 \sim 0,1$ зависимость $R^* = R^*(n)$ приобретает немонотонный характер. При $h_0 = 0$ R^* вновь монотонно увеличивается с ростом n (см. рис. 2, *b*).

Пропускательная способность D^* монотонно падает при росте n во всем диапазоне значений h_0.

На рис. 3, *a* представлена зависимость $R_{эф}$ от внутренней поверхности слоя как от оптической толщины слоя (см. рис 3, *a*) для двух значений показателя преломления ($n = 1,5$ и 2,0), так и от показателя преломления (см. рис 3, *b*) при $h_0 = 0,1$, 1,0 и 2,0. Как видно, $R_{эф}$ определяется значениями n, существенно зависящими от h_0 в области ее малых значений ($h_0 \le 1,0$, см. рис. 3, *a*), и монотонно растет для выделенных значений h_0 с ростом показателя преломления n (см. рис. 3, *b*).

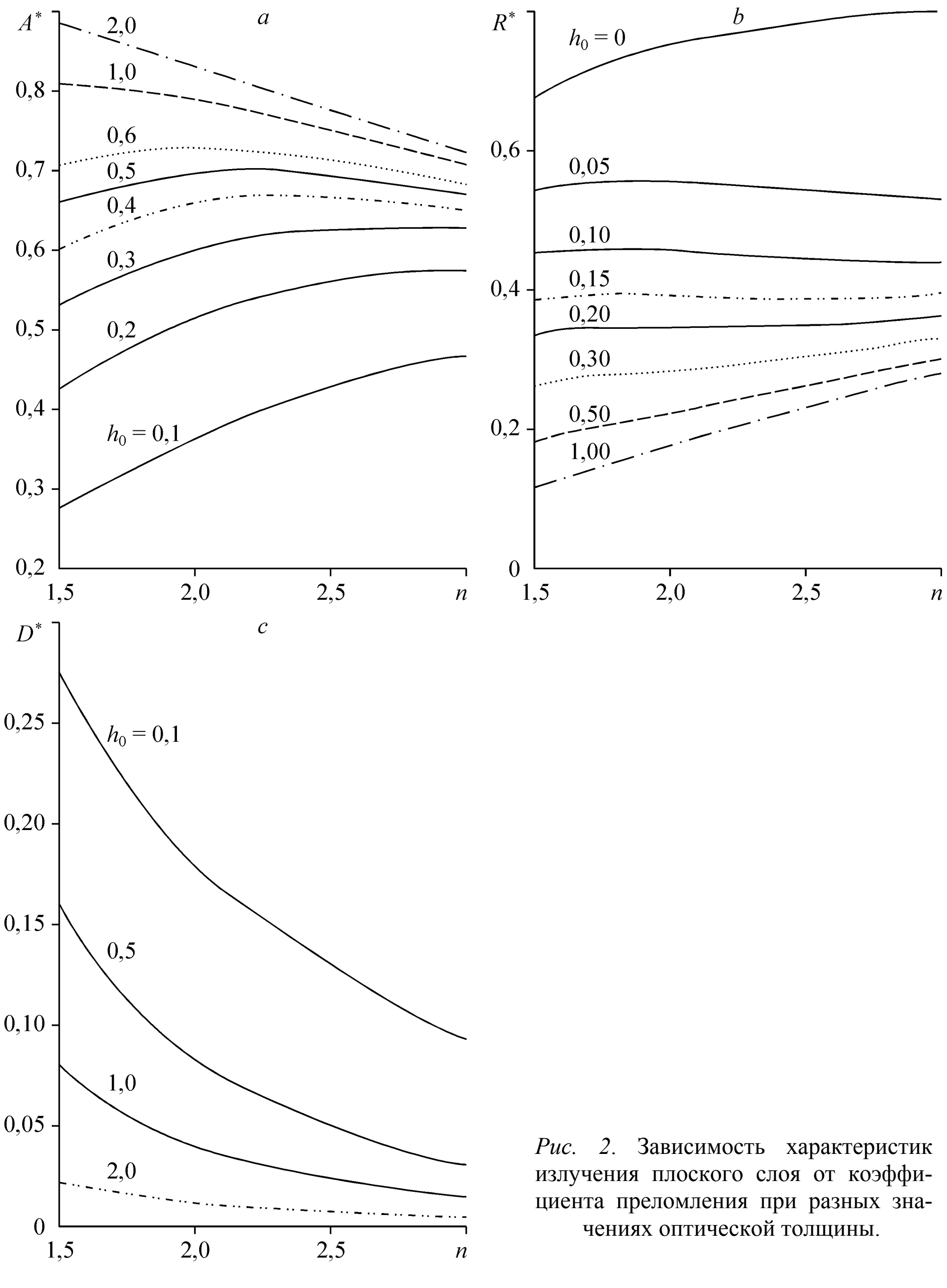


Рис. 2. Зависимость характеристик излучения плоского слоя от коэффициента преломления при разных значениях оптической толщины.

На рис. 4 представлены результаты расчета зависимости поглощательной способности сферического объема A^* от его оптической толщины для показателей преломления $n = 1,5$ (см. рис. 4, *a*) и $n = 2,0$ (см. рис. 4, *b*). При этом пропускательная способность среды d определялась по формуле (22). Приводятся результаты расчетов с учетом R и $R_{эф}$, полученные значения A^* хорошо согласуются между собой. Здесь же даются значения степени черноты $\varepsilon \equiv A$, приведенные в работе [4]. Как видно, при n = 1,5 отмечается совпадение результатов (см. рис. 4, *a*). Однако при n = 2 отмечается качественное согласование и некоторое количественное расхождение.

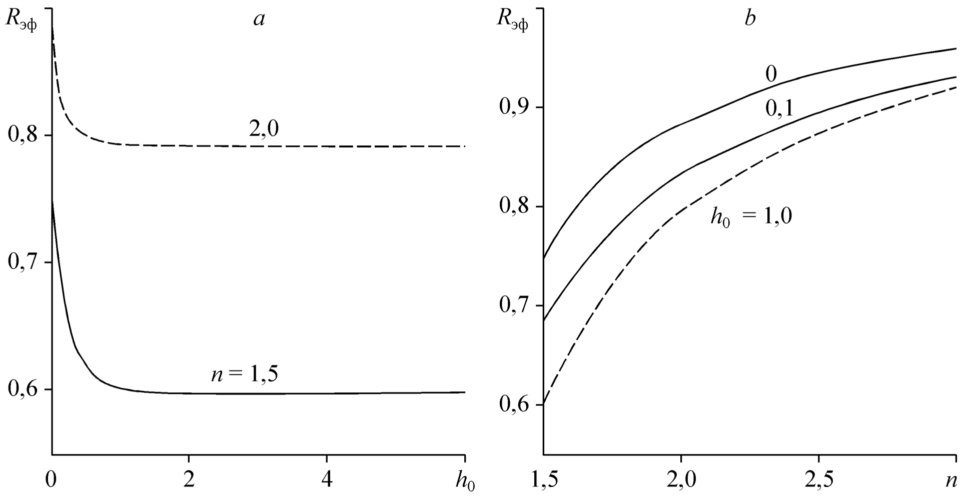


Рис. 3. Зависимость эффективного коэффициента отражения внутренней поверхности $R_{эф}$ плоского слоя: от оптической толщины при двух значениях коэффициента преломления n (*a*) и от показателя преломления при трех значениях оптической толщины h_0 (*b*).

Представленный анализ говорит о неоднозначном влиянии на свойства теплового излучения рассматриваемых осесимметричных систем показателя преломления, коэффициента объемного поглощения и геометрии. Использование оптического инварианта (7) для установления связи между коэффициентом полусферического отражения наружных и внешних поверхностей границы является приближенным подходом в той мере, в какой оказывается использование приближения геометрической оптики. Указанные соображения относятся и к привлечению обобщенного инварианта излучения (23). Тем не менее, описанный выше анализ свидетельствует о применимости подобного подхода в приближенном анализе свойств теплового излучения рассматриваемых систем.

Следует обратить внимание на корректный учет объемного поглощения (излучения) и процессов многократного отражения, вытекающий из интегральных уравнений излучения (1) и (2).

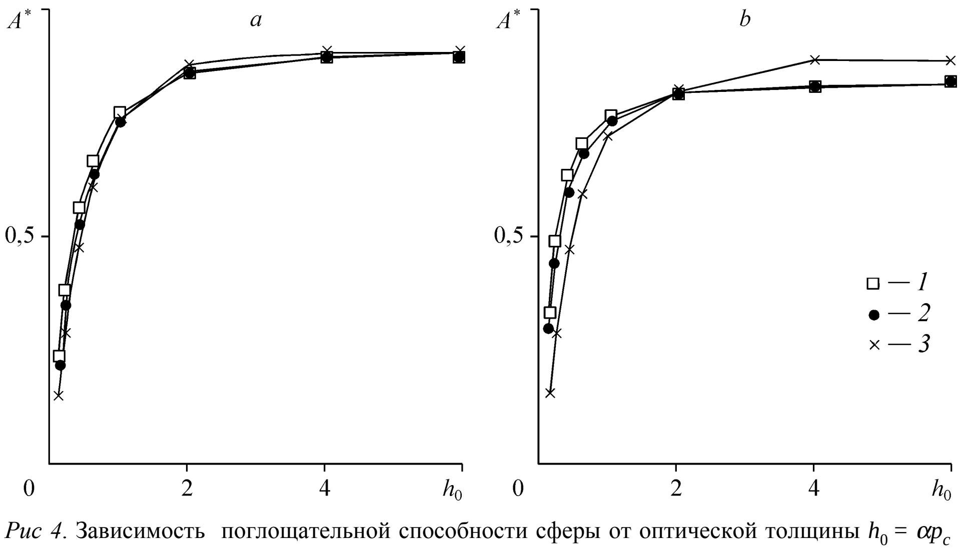


Рис 4. Зависимость поглощательной способности сферы от оптической толщины $h_0 = \alpha \rho_c$ для двух значений показателя преломления n = 1,5 (*a*) и 2,0 (*b*) с учетом: значения R (*1*), значения $R_{эф}$ (*2*), данных работы [4] (*3*).

Поскольку в работе анализируется монохроматическое излучение, то приводимые результаты могут быть обобщены и на интегральное по спектру излучение.

Учет зависимости эффективного коэффициента отражения от показателя преломления и оптической толщины системы принципиально важен при рассмотрении нестационарных краевых задач о радиационно-кондуктивном теплообмене в системах с проницаемыми для теплового излучения границами, претерпевающими фазовый переход. В частности, при рассмотрении однофазной задачи Стефана в плоском слое изменение оптической толщины слоя в процессе его плавления может приводить к существенному увеличению эффективного коэффициента отражения от внутренних поверхностей и снижению роли теплового излучения в процессах теплообмена в образующемся при оплавлении оптически тонком слое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рубцов Н.А.** Тепловое излучение осесимметричных полупрозрачных систем // Теплофизика и аэромеханика. — 2008. — Т. 15, № 2. — С. 313–323.
2. **Рубцов Н.А.** Тепловое излучение в сплошных средах. — Новосибирск: Наука, Сибирское отделение. — 1984. — 277 с.
3. **Оцисик М.Н.** Сложный теплообмен. — М.: Изд-во Мир, 1976. — 616 с.
4. **Домбровский Л.А.** Тепловое излучение сферической частицы из полупрозрачного материала // Теплофизика высоких температур. — 1999. — Т. 37, № 3. — С. 284–293.

Статья поступила в редакцию 4 июля 2008 г.