

AMS subject classification: 65L05, 65M06, 65N20, 93C10

Математическое исследование систем с двумя переменными с использованием адаптивных численных методов

К.М. Оволаби^{1,2}

¹Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of the Western Cape Private Bag X17, Bellville 7535, South Africa

²Department of Mathematical Sciences, Federal University of Technology, Akure PMB 704, Akure, Ondo State, Nigeria
E-mails: mkowolax@yahoo.com; kowolabi@uwc.ac.za; kmowolabi@futa.edu.ng

Оволаби К.М. Математическое исследование систем с двумя переменными с использованием адаптивных численных методов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 3. — С. 281–295.

В данной статье рассматриваются системы реакции–диффузии, возникающие из двухкомпонентных моделей хищник–жертва с использованием функционального отклика роста Смита. Используемый здесь математический подход является двояким, поскольку эти зависящие от времени дифференциальные уравнения в частных производных имеют как линейные, так и нелинейные члены. Мы дискретизируем жесткий или умеренно жесткий член разностным оператором четвертого порядка, рассчитываем полученную в результате нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи семейства из двух конкурирующих семейств экспоненциальных временных разностных (ЭВР) схем и анализируем их устойчивость. Также представлено численное сравнение этих двух методов для решения различных моделей популяций хищник–жертва. Численные результаты показывают, что для этих методов требуется меньше вычислений. Кроме того, в численных результатах обнаружены некоторые новые пространственные структуры.

DOI: 10.15372/SJNM20160304

Ключевые слова: модель хищник–жертва, ЭВР-методы, нелинейный, образование структур, реакция–диффузия, устойчивость, зависящие от времени дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП), неустойчивость по Тьюрингу.

Owolabi Kolade M. Mathematical study of two-variable systems with adaptive numerical methods // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 3. — P. 281–295.

In this paper, we consider reaction-diffusion systems arising from two-component predator-prey models with Smith growth functional response. The mathematical approach used here is twofold, since the time-dependent partial differential equations consist of both linear and nonlinear terms. We discretize the stiff or moderately stiff term with a fourth-order difference operator, advance the resulting nonlinear system of ordinary differential equations with a family of two competing exponential time differencing (ETD) schemes, and analyze them for stability. A numerical comparison of these two methods for solving various predator-prey population models with functional responses is also presented. Numerical results show that the techniques require less computational work. Also in the numerical results, some emerging spatial patterns are unveiled.

Keywords: predator-prey model, ETD methods, nonlinear, pattern formation, reaction-diffusion, stability, time-dependent PDE, Turing instability.

1. Введение

Взаимодействия между видами экологических систем и их естественной средой в основном моделируются при помощи дифференциальных уравнений, которые главным образом имеют вид уравнений реакции–диффузии. Задачи реакции–диффузии — важный тип зависящих от времени дифференциальных уравнений в частных производных, используемых для моделирования некоторых физических, химических, биологических и экологических процессов, встречающихся в различных областях науки и техники. В литературе системы реакции–диффузии использовались различным образом для моделирования некоторых важных физических процессов.

Одним из наиболее важных является понятие хищничества, при помощи которого моделируется взаимодействие видов в экологическом исследовании. Оно описывает процесс, происходящий между высшими видами организмов (называемыми хищниками), которые для выживания питаются исключительно низшими видами (называемыми жертвами). Исследование моделей хищник–жертва имеет давнюю историю, начало которой было положено в пионерских работах Лотки [18] и Вольтерры [28, 29], которым уделялось большое внимание со времени появления экологической науки [3, 27]. С тех пор проводились многочисленные исследования взаимодействий между хищниками и жертвами [5, 12, 17] на основе модели Лотки–Вольтерры.

Данная статья состоит из 5 пунктов. В пункте 2 рассмотрен анализ устойчивости общих систем с двумя переменными. Численные методы в пространстве и времени представлены в п. 3, а численные эксперименты и результаты — в пункте 4. Заключительные замечания приведены в п. 5.

2. Общие системы реакции–диффузии с двумя переменными

В данной статье основное внимание уделяется системам реакции–диффузии с двумя переменными. Мы будем следовать методу локального анализа устойчивости n -видовой динамики и адаптируем его к системам с двумя переменными. Пусть u и v — это переменные, представляющие два вида типа хищник–жертва Лотки–Вольтерры. В принятых здесь обозначениях v — хищник, а u — жертва. Общую двухвидовую модель можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{du}{dt} = F(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = G(u, v), \quad (1)$$

состояния равновесия которой задаются как $F(\hat{u}, \hat{v}) = 0$, $G(\hat{u}, \hat{v}) = 0$. Устойчивость установившихся состояний определяется матрицей сообщества, обозначаемой якобианом

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{cc} \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{(\hat{u}, \hat{v})} & \left. \frac{\partial F}{\partial v} \right|_{(\hat{u}, \hat{v})} \\ \left. \frac{\partial G}{\partial u} \right|_{(\hat{u}, \hat{v})} & \left. \frac{\partial G}{\partial v} \right|_{(\hat{u}, \hat{v})} \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Модель (1) есть система *чистого типа хищник–жертва*, если якобиан соответствует структуре следующего вида:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \quad (3)$$

то есть

$$\mathbf{J}_{11} > 0, \quad \mathbf{J}_{22} < 0, \quad \mathbf{J}_{12} < 0, \quad \mathbf{J}_{21} > 0.$$

Модель (1) есть система *перекрестного типа хищник–жертва*, если якобиан имеет структуру, задаваемую путем

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}, \quad (4)$$

то есть

$$\mathbf{J}_{11} > 0, \quad \mathbf{J}_{22} < 0, \quad \mathbf{J}_{12} > 0, \quad \mathbf{J}_{21} < 0.$$

Вообще говоря, характеристический многочлен уравнений Лотки–Вольтерры, описывающих динамику с двумя переменными, — это квадратичное уравнение

$$\lambda^2 - T\lambda + \det \mathbf{J} = 0, \quad (5)$$

где $T = \text{tr} \mathbf{J} = \mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{22}$ — след якобиана, и $\det \mathbf{J} = \mathbf{J}_{11}\mathbf{J}_{22} - \mathbf{J}_{12}\mathbf{J}_{21}$. Запишем корни характеристического многочлена (5) следующим образом:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[T \pm \sqrt{T^2 - 4 \det \mathbf{J}} \right]. \quad (6)$$

Из (6) следует, что собственные значения якобиана системы хищник–жертва (1) имеют отрицательную действительную часть и устойчивы, если $T < 0$ и $\det \mathbf{J} > 0$. Отсылаем читателей к [1, 19, 24, 26], где имеется детальный анализ различных моделей хищник–жертва.

2.1. Диффузионная зависящая от отношения модель хищник–жертва Холлинга–Тэннера с функциональным откликом роста Смита

Для данного примера и по предложению многих авторов [9, 10, 25, 31] мы рассматриваем диффузионную зависящую от отношения модель хищник–жертва Холлинга–Тэннера с функциональным откликом роста Смита:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \delta_1 \nabla u + \tau u \frac{\kappa - u}{\kappa + \mu u} - \frac{\omega uv}{u + \alpha v}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \delta_2 \nabla v + \gamma v \left(1 - \frac{\phi v}{u} \right), \quad (7)$$

где $u(t)$ и $v(t)$ в момент времени $t > 0$ — плотности жертв и хищников, $\tau > 0$ и $\gamma > 0$ — истинные скорости роста жертв и хищников соответственно, $\kappa > 0$ — переносимый объём, $\omega > 0$ — скорость захвата, $\alpha > 0$ — постоянная насыщения для половины скорости захвата, $\phi > 0$ — скорость преобразования жертв в хищников, отношение $\tau/\mu > 0$ — массовая замена в популяции, $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ — коэффициенты диффузии жертв и хищников соответственно. Система хищник–жертва с кинетикой роста Смита использовалась для описания эффектов пищевой цепочки стресса окружающей среды, вызываемого ядовитыми веществами.

Для исследования неустойчивости по Тьюрингу необходимо проанализировать локальную устойчивость непространственной системы (7). То есть, когда $\delta_1 = \delta_2 = 0$, мы получим соответствующую недиффузионную систему:

$$u' = \tau u \frac{\kappa - u}{\kappa + \mu u} - \frac{\omega uv}{u + \alpha v}, \quad v' = \gamma v \left(1 - \frac{\phi v}{u}\right). \quad (8)$$

При исследовании устойчивости обсуждавшейся ранее недиффузионной системы легко убедиться в том, что система (8) имеет три положительных состояний равновесия (\hat{u}, \hat{v}) , два из которых — тривиальные, а одно — нетривиальное. Точка $(\hat{u}, \hat{v}) = (0, 0)$ обозначает полное вымирание жертв–хищников, а точка $(\hat{u}, \hat{v}) = (\kappa, 0)$ является седловой, что соответствует вымиранию хищников. Третья точка $(\hat{u}, \hat{v}) = (\bar{u}, \bar{v})$ является точкой внутреннего равновесия, управляющей существованием жертв и хищников, где

$$\bar{u} = \frac{((\alpha + \phi)\tau - \omega)\kappa}{(\alpha + \phi)\tau + \mu\omega}, \quad \bar{v} = \frac{\bar{u}}{\phi}.$$

Соответствующая матрица Якоби в точке внутреннего равновесия задается следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ \frac{\gamma}{\phi} & -\gamma \end{pmatrix}_{(\hat{u}, \hat{v})}, \quad (9)$$

где

$$p_1 = \frac{(\alpha\tau(1 - \mu) + \mu\omega + 2\phi\tau)\omega}{(\mu + 1)(\alpha + \phi)^2\tau} - \frac{\tau}{\mu + 1} \quad \text{и} \quad p_2 = -\frac{\omega\phi^2}{(\alpha + \phi)^2}.$$

При помощи простых вычислений мы получим детерминант

$$\det(\mathbf{A}) = \frac{(\alpha + \phi)\tau - \omega((\alpha + \phi)\tau + \mu)\gamma}{(\alpha + \phi)^2(\mu + 1)\tau} > 0$$

и след

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \frac{(\alpha\tau(1 - \mu) + \mu\omega + 2\phi\tau)\omega - (\alpha + \phi)^2(\tau + (\mu + 1)\gamma)\tau}{(\alpha + \phi)^2(\mu + 1)\tau}.$$

Если $\text{tr}(\mathbf{A}) < 0$, мы можем сказать, что точка внутреннего равновесия (\bar{u}, \bar{v}) является локально асимптотически устойчивой, если

$$(\alpha\tau(1 - \mu) + \mu\omega + 2\phi\tau)\omega < (\alpha + \phi)^2(\tau + (\mu + 1)\gamma)\tau$$

и неустойчивой, если

$$(\alpha\tau(1 - \mu) + \mu\omega + 2\phi\tau)\omega > (\alpha + \phi)^2(\tau + (\mu + 1)\gamma)\tau.$$

На рис. 1 показаны плотности распределения популяций и фазовые портреты модели (8) при $\alpha = 0.45$, $\tau = 0.98$, $\phi = 0.6$, $\omega = 1$, $\mu = 0.81$, $\gamma = 0.47$, $\kappa = 3.88$ и $t = 20$. Точка $(u_0, v_0) = (0.5, 0.5)$ является локально асимптотически устойчивой.

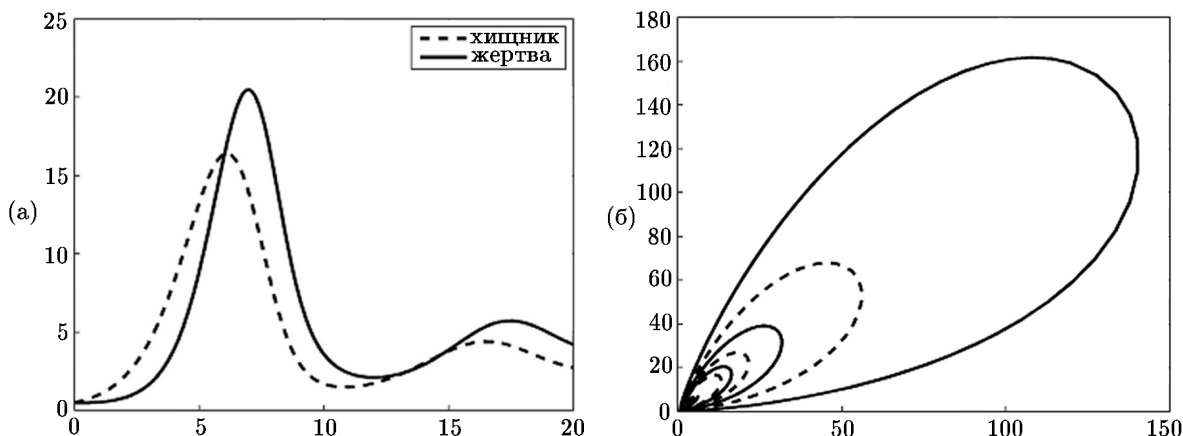


Рис. 1. (а) — плотности распределения популяций и (б) — фазовые портреты модели (8)

2.2. Анализ устойчивости диффузионной модели (7)

Здесь мы хотим исследовать влияние диффузии в точке внутреннего равновесия, управляющей существованием видов. Этого можно достигнуть путем введения некоторых параметров возмущения в окрестности точки положительного равновесия $(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$ следующего вида:

$$U(x, t) = u(x, t) - \bar{u}, \quad V(x, t) = v(x, t) - \bar{v}.$$

Тогда уравнение (7) становится линеаризованным

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \delta_1 \nabla U + p_1 U + p_2 V, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \delta_2 \nabla V + \frac{\gamma}{\phi} U - \gamma V, \tag{10}$$

где p_1, p_2 остаются такими же, как определено ранее. Теперь найдем режим, соответствующий системе (10), следующим образом:

$$\varpi(x, t) = [U(x, t), V(x, t)] = \tau_{\mathbf{h}} e^{\lambda_{\mathbf{h}} t} e_{\mathbf{h}}(x),$$

$\tau_{\mathbf{h}}$ — векторный член, зависящий от \mathbf{h} . После подстановки мы имеем

$$\lambda_{\mathbf{h}} \tau_{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} -\delta_1 h^2 + p_1 & p_2 \\ \frac{\gamma}{\phi} & -\delta_2 h^2 - \gamma \end{pmatrix} \tau_{\mathbf{h}}, \tag{11}$$

где $h^2 = h_1^2 + h_2^2$ для $h = (h_1, h_2) \in \Omega$. Задав

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_{\mathbf{h}} \delta_1 h^2 - p_1 & -p_2 \\ -\frac{\gamma}{\phi} & \lambda_{\mathbf{h}} \delta_2 h^2 + \gamma \end{pmatrix} = 0, \tag{12}$$

мы получим нетривиальный режим, приводящий к дисперсионному уравнению

$$\lambda_{\mathbf{h}}^2 + \varphi_1 \lambda_{\mathbf{h}} + \varphi_2 = 0, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \delta_1 h^2 + \delta_2 h^2 - p_1 + \phi, \\ \varphi_2 &= \delta_1 \delta_2 h^4 + \delta_1 \gamma h^2 - \delta_2 p_1 h^2 + p_2 \phi \gamma^{-1} - p_1 \gamma.\end{aligned}$$

Очевидно, мы можем сказать, что положительное равновесие системы (7) является неустойчивым по Тьюрингу. Это означает, что модель (8) представляет собой асимптотически устойчивое стационарное решение. Тьюринговская неустойчивость возникает, если

$$\varphi_1 < 0 \quad \text{или} \quad \varphi_2 > 0.$$

Ясно, что для $\gamma - p_1 < 0$ условие $\varphi_1 < 0$ сохраняется. Диффузионная неустойчивость возникает только при $\varphi_2 > 0$. В результате можно заключить, что условие $\delta_1 \gamma < \delta_2 p_1$ необходимо для возникновения устойчивости.

3. Численные методы

Зависящие от времени дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП) в (7) можно записать в следующем компактном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = D \nabla \mathbf{u} + F(\mathbf{u}), \quad (14)$$

где $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ — группа биологических видов, а $D \in \mathbf{R}^{m \times m}$ — диффузионная постоянная матрица. Задача ДУЧП, описанная в (14), позволяет использовать две классические математические идеи, поскольку ее можно разбить на линейные и нелинейные члены. В результате, сначала мы используем технику метода прямых (МП) [20–22], в которой оператор Лапласа считается второй производной и дискретизируется с четвертым порядком точности в пространстве с использованием центральной конечно-разностной аппроксимации. Полученные в результате нелинейные системы ДУЧП рассчитываются при помощи схемы ETDRK4.

Пусть параметры M и N — положительные целые числа, а a и b — действительные числа такие, что $a < b$ и $T > 0$. Аппроксимируем решение уравнения (14) в пространственном интервале $x \in [a, b]$ по времени T , дискретизируем пространственную область путем однородного разбиения $a = x_0(t) < x_1(t) < x_2(t) < \dots < x_{N-1}(t) < x_N = b$, где a, b — две конечные точки, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{M-1} < t_M = T$ для начального и конечного моментов времени в $[0, T]$. Определим размер шага $\Delta x = h = (b - a)/N$ и временной шаг $\Delta t = k = T/M$. Теперь пространственная производная второго порядка аппроксимируется в пространстве с использованием центрального разностного оператора

$$\nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \underbrace{\frac{-u_{i+2,j} + 16u_{i+1,j} - 30u_{i,j} + 16u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{12h^2}}_{L}, \quad (15)$$

где $u_{i,j}$ — численная аппроксимация $u(x_i, t_j)$ для $0 \leq i \leq N$ и $j = 0, 1, \dots, M$.

После аппроксимации пространственной производной второго порядка в (14) центральным конечно-разностным оператором четвертого порядка (15) полученная в результате система обыкновенных дифференциальных уравнений может быть записана в компактной форме:

$$\frac{du}{dt} = Lu + F(u, t), \quad (16)$$

где \mathbf{L} — пятидиагональная матрица, полученная в результате центральной аппроксимации четвертого порядка, содержащая линейную часть, а \mathbf{F} становится вектором, содержащим нелинейный оператор. Основная цель дискретизации наших зависящих от времени задач с помощью конечно-разностных схем — получение задачи, которая может быть решена с использованием конечной процедуры, поскольку она может использоваться для аппроксимации любой непрерывной функции для получения конечной системы уравнений. Анализ конечно-разностных схем при применении для аппроксимации систем ДУЧП можно найти в работе [15].

3.1. Экспоненциальные временные разностные схемы

Здесь мы заинтересованы только в том, чтобы дать краткое введение в построение ЭВР-схем типа Адамса и Рунге–Кутты. Будет исследоваться анализ устойчивости этих схем. Следуя [2, 4, 6–8, 13, 14], можно построить ЭВР-методы путем вариации формул для постоянных, которые могут быть получены интегрированием дифференциального уравнения (16) по единичному временному шагу, определяемому h , для получения

$$u(t_{n+1}) = e^{\mathbf{L}\Delta t}u(t_n) + e^{\mathbf{L}\Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{L}\tau} \mathbf{F}(u(t_n + \tau), t_n + \tau) d\tau. \quad (17)$$

Уравнение (17) является точным [16]. Аппроксимация интеграла различными методами квадратур приводит к различным ЭВР-схемам. Например, для построения ЭВР-схем пусть $u_j = u(t_j)$ и $u_{n+1} \approx u(t_{n+1})$, так что

$$u_{n+1} = e^{\mathbf{L}\Delta t}u_n \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{L}(\Delta t - \tau)} \Phi_{n,s-1}(t_n + \tau) d\tau, \quad (18)$$

где $\Phi_{n,s-1}$ — интерполяционный многочлен Лагранжа для точек

$$(t_{n-s+1}, \mathbf{F}(t_{n-s+1}, u_{n-s+1})), \dots, (t_n, \mathbf{F}(t_n, u_n)),$$

определяемый путем

$$\Phi_{n,s-1}(t_n + \vartheta\Delta t) = \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^j \binom{-\vartheta}{j} \nabla^j \mathbf{F}_j, \quad \mathbf{F}_j = \mathbf{F}(t_j, u_j), \quad (19)$$

где ∇ — оператор обратной разности. Подставив (19) в (18), мы получим схему:

$$u_{n+1} = e^{\mathbf{L}\Delta t}u_n + \Delta t \sum_{j=0}^{s-1} \xi_j(\mathbf{L}\Delta t) \nabla^j \mathbf{F}_n, \quad (20)$$

где

$$\xi_j(z) = (-1)^j \int_0^1 e^{(1-\vartheta)z} \binom{-\vartheta}{j} d\vartheta.$$

Теперь мы можем представить весовую функцию (20) в виде φ -функций:

$$\varphi_j(z) = \frac{1}{(j-1)!} \int_0^1 e^{(1-\vartheta)z} \vartheta^{j-1} d\vartheta, \quad j \geq 0. \quad (21)$$

Первые четыре весовые функции ЭВР-схем Адамса задаются следующим образом:

$$\xi_0 = \varphi_1, \quad \xi_1 = \varphi_2, \quad \xi_2 = \frac{1}{2}(2\varphi_3 + \varphi_2), \quad \xi_3 = \frac{1}{3}(3\varphi_4 + 3\varphi_3 + \varphi_2).$$

Интерес в данной работе представляет использование схем высокого порядка как во времени, так и в пространстве. Это значит, что мы не собираемся представлять схемы, порядок которых меньше четырех. Таким образом, для $s = k$ в (20) мы получаем ЭВР-схему Адамса четвертого порядка, обозначаемую здесь как ETDADAMS4:

$$u_{n+1} = e^{L\Delta t}u_n + \Delta t\xi_0(L\Delta t)\mathbf{F} + \xi_1(L\Delta t)(\mathbf{F}_n - \mathbf{F}_{n-1}) + \xi_2(L\Delta t)(\mathbf{F}_n - 2\mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{F}_{n-2}) + \xi_3(L\Delta t)(\mathbf{F}_n - 3\mathbf{F}_{n-1} + 3\mathbf{F}_{n-2} - \mathbf{F}_{n-3}). \quad (22)$$

Аналогичным образом, путем введения дополнительного параметра в стандартную схему Рунге–Кутты четвертого порядка, мы получим экспоненциальную разностную схему четвертого порядка Кокса и Мэттьюса [8], также обозначаемую нами ETD RK4 для краткости:

$$u_{n+1} = e^{L\Delta t}u_n + \mathbf{F}_n[-4 - L\Delta t + e^{L\Delta t}(4 - 3L\Delta t + L^2\Delta t^2)] + 2(\mathbf{F}(a_n, t_n + \Delta t/2) + \mathbf{F}(b_n, t_n + \Delta t/2))[2 + L\Delta t + e^{L\Delta t}(-2 + L\Delta t)] + \mathbf{F}(c_n, t_n + \Delta t)[-4 - 3L\Delta t - L^2\Delta t^2 + e^{L\Delta t}(4 - L\Delta t)]/L^3\Delta t^2, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= e^{L\Delta t/2}u_n + (e^{L\Delta t/2} - \mathbf{I})\mathbf{F}_n/L, \\ b_n &= e^{L\Delta t/2}u_n + (e^{L\Delta t/2} - \mathbf{I})\mathbf{F}(a_n, t_n + \Delta t/2)/L, \\ c_n &= e^{L\Delta t/2}u_n + (e^{L\Delta t/2} - \mathbf{I})(2\mathbf{F}(b_n, t_n + \Delta t/2) - \mathbf{F}_n)/L. \end{aligned}$$

Члены a_n и b_n аппроксимируют значения u при $t_n + \Delta t/2$, тогда как член c_n аппроксимирует значение u при $t_n + \Delta$. Формула (23) является квадратурной формулой для (17), полученной из квадратичной интерполяции через точки t_n , $t_n + \Delta t/2$ и $t_n + \Delta t$, когда среднее значение \mathbf{F} используется при a_n и b_n .

Чтобы избежать потери точности ошибок при вычитании, связанных с методами ETD RK4 и ETDADAMS4, используем идею сложных контурных интегралов

$$f(\mathbf{L}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(t)(t\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} dt \quad (24)$$

для вычисления коэффициентов в этой формуле. Для подробной информации о применениях см. [16, 23].

3.2. Анализ устойчивости ЭВР-схем

Здесь мы исследуем линейную устойчивость ETDADAMS4 и ETD RK4 для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (16), линеаризованных в фиксированной точке u_0 такой, что $\mathbf{L}u_0 + \mathbf{F}(u_0) = 0$. Мы имеем

$$\frac{du}{dt} = \mathbf{L}u + \lambda u(t), \quad (25)$$

где u становится возмущением для u_0 , а $\lambda = \left. \frac{dF u(t)}{du} \right|_{u(t)=u_0}$ есть диагональная матрица, содержащая собственные значения F . Чтобы точка u_0 была устойчивой для всех λ , необходимо, чтобы $\text{Re}(\mathbf{L} + \lambda) < 0$. Следует отметить, что фиксированные точки ЭВР-схем (22) и (23) такие же, что и для нелинейной автономной системы ОДУ (16). Видно, что область устойчивости является четырехмерной, если как \mathbf{L} , так и λ комплексные. Однако в ситуации, когда \mathbf{L} и λ являются чисто вещественными или мнимыми [8, 11], или если фиксированное \mathbf{A} является вещественным, а λ комплексным, мы можем сказать, что область устойчивости двумерная.

3.2.1. Устойчивость схемы ETDADAMS4

Применив ETDADAMS4 (22) к линеаризованной задаче (25), получим полиномиальное уравнение четвертого порядка следующего вида:

$$u_4 r^4 + u_3 r^3 + u_2 r^2 + u_1 r + u_0 = 0, \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned} u_4 &= 6y^4, \\ u_3 &= -6y^6 e^y + [(-6y^3 - 11y^2 - 12y - 6)e^y + 24y^3 + 26y^2 - 18y + 6]x, \\ u_2 &= [(18y^2 + 30y + 12)e^y - 36y^3 - 57y^2 - 48y - 18]x, \\ u_1 &= [(-9y^2 - 24y - 18)e^y + 24y^3 + 42y^2 + 42y + 18]x, \\ u_0 &= [(2y^2 + 6y + 6)e^y - 6y^3 - 11y^2 - 12y - 6]x. \end{aligned}$$

В вещественной (x, y) плоскости соответствующая правая граница для подстановки $r = 1$ в (26) находится на линии $x + y = 0$, тогда как левая граница для $r = -1$ задается следующей кривой:

$$x = -\frac{3y^4(e^y + 1)}{(3y^3 + 20y^2 + 36y + 24)e^y - 45y^3 - 68y^2 - 60y - 24}. \tag{27}$$

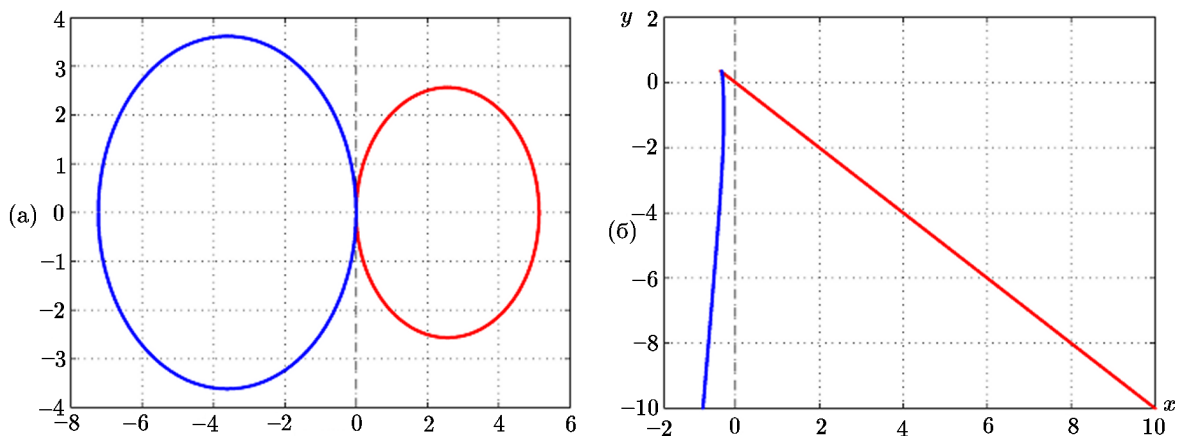


Рис. 2. Области устойчивости схемы ETDADAMS4 в (22) в комплексной x плоскости (а) и вещественной (x, y) плоскости (б). Схема является устойчивой и неустойчивой слева и справа от начала координат (вдоль горизонтальной оси) соответственно

На рис. 2 схема ETDADAMS4 является устойчивой слева от начала координат как для комплексной x плоскости, так и для вещественной $(x - y)$ плоскости.

3.2.2. Устойчивость схемы ETD RK4

Применение метода ETD RK4 (23) к (25) приводит к рекуррентному соотношению

$$r = \frac{u_{n+1}}{u_n} = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + L_3 x^3 + L_4 x^4, \quad (28)$$

где

$$L_0 = e^y,$$

$$L_1 = -\frac{4}{y^3} + \frac{8e^{y/2}}{y^3} - \frac{8e^{3y/2}}{y^3} + \frac{4e^{2y}}{y^3} - \frac{1}{y^2} + \frac{4e^{y/2}}{y^2} - \frac{6e^y}{y^2} + \frac{4e^{3y/2}}{y^2} - \frac{e^{2y}}{y^2},$$

$$L_2 = -\frac{8}{y^4} + \frac{16e^{y/2}}{y^4} - \frac{16e^{3y/2}}{y^4} + \frac{8e^{2y}}{y^4} - \frac{5}{y^3} + \frac{12e^{y/2}}{y^3} - \frac{10e^y}{y^3} + \frac{4e^{3y/2}}{y^3} - \frac{e^{2y}}{y^3} - \frac{1}{y^2} + \frac{4e^{y/2}}{y^2} - \frac{e^{y/2}}{y^2},$$

$$L_3 = \frac{4}{y^5} - \frac{16e^{y/2}}{y^5} + \frac{16e^y}{y^5} + \frac{8e^{3y/2}}{y^5} - \frac{20e^{2y}}{y^5} + \frac{8e^{5y/2}}{y^5} + \frac{2}{y^4} - \frac{10e^{y/2}}{y^4} + \frac{16e^y}{y^4} - \frac{12e^{3y/2}}{y^4} + \frac{6e^{2y}}{y^4} - \frac{2e^{5y/2}}{y^4} - \frac{2e^{y/2}}{y^3} + \frac{4e^y}{y^3} - \frac{2e^{3y/2}}{y^3},$$

$$L_4 = \frac{8}{y^6} - \frac{24e^{y/2}}{y^6} + \frac{16e^y}{y^6} + \frac{16e^{3y/2}}{y^6} - \frac{24e^{2y}}{y^6} + \frac{8e^{5y/2}}{y^6} + \frac{6}{y^5} - \frac{18e^{y/2}}{y^5} + \frac{20e^y}{y^5} - \frac{12e^{3y/2}}{y^5} + \frac{6e^{2y}}{y^5} - \frac{2e^{5y/2}}{y^5} + \frac{4}{y^4} - \frac{6e^{y/2}}{y^4} + \frac{6e^y}{y^4} - \frac{2e^{3y/2}}{y^4}$$

при $x = \lambda h$, $y = Lh$ (поскольку задача рассматривается в одном измерении). Следует отметить, что при вычислении L_1 , L_2 , L_3 и L_4 наблюдается вычислительная неустойчивость для значений y , равных нулю или приближающихся к нулю. Поэтому необходимо искать их асимптотическое разложение. Это приводит к

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{13y^4}{320} + \frac{7y^5}{960} + \mathcal{O}(y^6), \\ L_2 &= \frac{1}{2} + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{247y^3}{2880} + \frac{131y^4}{5760} + \frac{479y^5}{96768} + \mathcal{O}(y^6), \\ L_3 &= \frac{1}{6} + \frac{y}{6} + \frac{61y^2}{720} + \frac{y^3}{36} + \frac{1441y^4}{241920} + \frac{67y^5}{120960} + \mathcal{O}(y^6), \\ L_4 &= \frac{1}{24} + \frac{y}{32} + \frac{7y^2}{640} + \frac{19y^3}{11520} + \frac{25y^4}{64512} + \frac{311y^5}{860160} + \mathcal{O}(y^6). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Мы можем определить множитель перехода для ETD RK4 $r(x, y)$ для $y > 0$. Если $y = 0$, множитель перехода принимает вид $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{24}$. Здесь мы видим, что кривая устойчивости ETD RK4 при $y = 0$ совпадает с кривой для соответствующего метода Рунге–Кутты четвертого порядка. Используя (28) и (29), мы видим, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} r(x, y) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

Кроме того,

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} \partial_y r(x, y) = -1, \quad \lim_{x, y \rightarrow 0} \partial_x r(x, y) = -1,$$

и абсолютное значение множителя перехода задается как $|r(x, y)| \leq 1$. Граница области устойчивости определяется при задании $r = e^{i\theta}$ для $\theta \in [0, 2\pi]$. Изобразим область устойчивости в комплексной x -плоскости (см. рис. 3, где горизонтальная и вертикальная оси представляют вещественную и мнимую части x соответственно). Следовательно, из рис. 3 мы можем заключить, что устойчивость метода ETDRK4 увеличивается при $y \rightarrow -\infty$. Кривая на рис. 3(а) обозначает случай $y = 0$; видно, что область устойчивости схемы ETDRK4 совпадает с областью соответствующего порядка классического метода Рунге–Кутты четвертого порядка (RK4), а на рис. 3(б) показывает границу области устойчивости ETDRK4 для некоторых отрицательных значений y . Кривые соответствуют $y = -24, -18, -12, -6$ и $y = 0$ (от внешних кривых к внутренним).

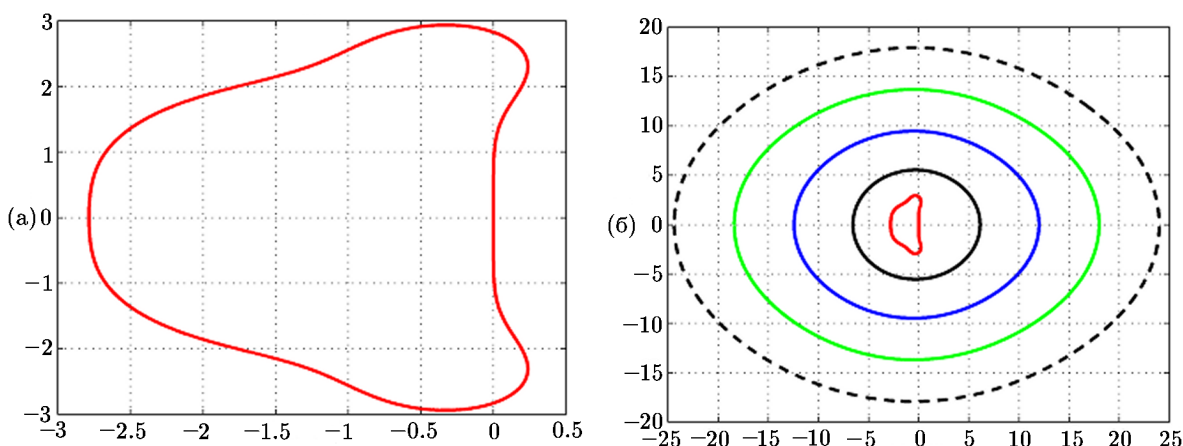


Рис. 3. Граница областей устойчивости в комплексной x -плоскости для схемы ETDRK4 (23)

4. Численные эксперименты

В данном пункте будет проведено подробное численное моделирование двух пространственных моделей, рассмотренных выше в двумерном пространстве. Здесь представлены качественные результаты. Мы используем ненулевое начальное условие для положительного стационарного решения и граничные условия нулевого потока для пространственной области с размерами 250×250 , используя конечно-разностную схему четвертого порядка из [22] для дискретизации пространственных производных второго порядка в этих системах. Со схемой ETDRK4 мы продвигаемся во времени с временным шагом $1/32$. Для численных экспериментов мы используем граничные условия:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{(x,y)} = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{(x,y)} = l, \quad (x, y) \in [0, l], \quad t > 0, \quad (30)$$

и задаем ненулевые начальные условия вида:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \hat{u} - (2 \cdot 10^{-7})(x - 0.1y - 225)(x - 0.1y - 675), \\ v(x, y, 0) &= \hat{v} - (3 \cdot 10^{-5})(x - 450) - (1.2 \cdot 10^{-4})(y - 150) \end{aligned} \quad (31)$$

для того, чтобы получить нетривиальное стационарное состояние.

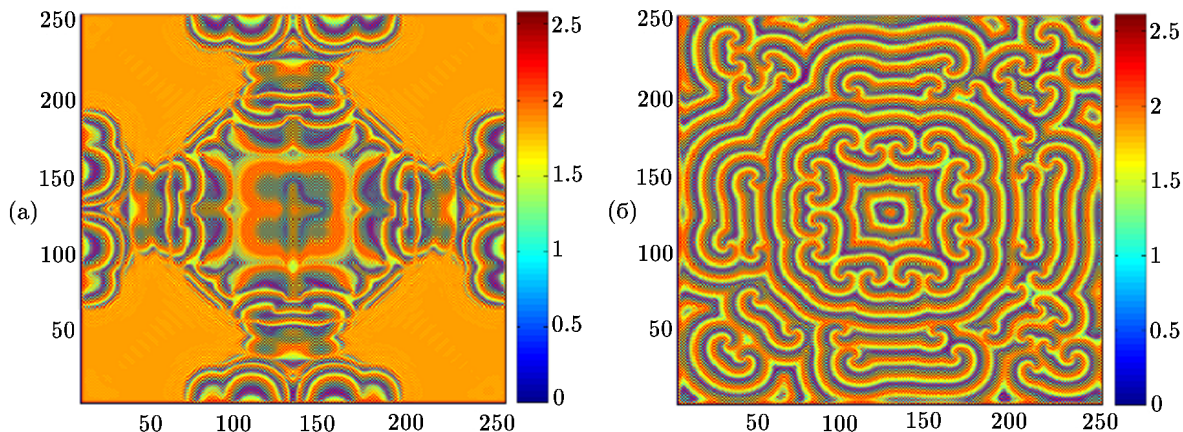


Рис. 4. Образование пространственно-временных структур для модели (7): (а) при $t = 600$, $\gamma = 1.2$; (б) при $t = 7000$, $\gamma = 1.5$ для $\delta_1 = 2 \times 10^{-5}$ и $\delta_2 = 10^{-5}$. Значения других параметров фиксированы в (32)

Численное моделирование показало различные типы динамического поведения. В результате было обнаружено, что распределения хищников и жертв — одного типа. Следовательно, мы ограничим анализ образования структур одним распределением. Затем мы хотим показать структуры Тьюринга для различных значений контрольного параметра γ . Численное моделирование также показало, что динамика модели (7) обнаруживает сложность пространственно-временного образования структур. Это очевидно на рис. 4. Используются следующие параметры:

$$\tau = 2.125, \quad \kappa = 4, \quad \omega = 1, \quad \mu = 1.8, \quad \alpha = 0.4, \quad \phi = 1.05. \quad (32)$$

Из рис. 4 очевидно, что при увеличении контрольного параметра γ , скажем, с 1.2 до 1.5 и выше, имеется тенденция получения некоторой последовательности структур от полос до пятен. Мы хотим сказать, что структура модели хищник-жертва Холлинга–Тэннера непростая, но богатая и сложная.

Теперь обоснуем эффективность и точность наших численных алгоритмов, приведя относительные ошибки каждой из схем:

$$\text{относительная ошибка} = \frac{\max |\bar{\nu}_j - \nu_j|}{\max |\bar{\nu}|}, \quad (33)$$

где $\bar{\nu}_j$ и ν_j — точное и численные значения ν в точке j . Результаты, представленные в табл. 1, показывают, как работают вычислительные методы по сравнению с “золотым стандартом”, получаемым с использованием схем ETDRK4 и ETDAMSA4 и временного шага $\Delta t = k = 1/2048$, который служит в качестве точного решения.

Таблица 1. Относительные ошибки зависящей от отношения модели хищник–жертва Холлинга–Тэннера (7) с функциональным откликом Смита при $\delta_1 = 0.01$, $\delta_2 = 0.05$, $k = 1/128$ и $\gamma = 1.5$. Значения других параметров такие же, как в (32)

N	ETDADAMS4			
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
100	2.4219E-12	7.8813E-11	1.1017E-09	6.6608E-08
200	5.3882E-12	1.4608E-10	5.0312E-09	7.5099E-08
300	4.1762E-11	4.3030E-10	8.5537E-09	8.9354E-08
400	6.0059E-11	3.1667E-10	2.6120E-08	8.6425E-08
N	ETDRK4			
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
100	4.9009E-13	1.0026E-11	4.7801E-11	4.5214E-10
200	1.6050E-12	4.3681E-11	7.8840E-11	3.9132E-10
300	1.2793E-12	2.8607E-11	3.9026E-10	3.4051E-10
400	1.1101E-12	1.2669E-11	3.1897E-10	2.8948E-10

В табл. 2 сравним работу схем ETDRK4 и ETDADAMS4 с использованием классического метода Рунге–Кутты четвертого порядка (RK4) и схемы Адамса–Башфорта–Моултона четвертого порядка (ABM4), в которой используется четырехшаговый метод Адамса–Башфорта четвертого порядка в качестве предиктора в сочетании с трехшаговым методом Адамса–Моултона в качестве корректора. Значения параметров следующие: $\kappa = 4$, $\omega = 1$, $\mu = 1.8$, $\alpha = 0.4$, $\phi = 1.05$, $\delta_1 = 0.01$, $\delta_2 = 0.05$ и $\gamma = 1.5$ при временном шаге $k = 0.25$ для $N = 100$.

Таблица 2. Относительные ошибки зависящей от отношения модели хищник–жертва Холлинга–Тэннера для различных значений t and τ

t	τ	ETDRK4	ETDADAMS4	RK4	ABM4
1.00	0.5	2.7346E-09	1.5680E-08	2.7884E-05	7.5115E-04
	1.5	1.3923E-08	1.6344E-07	1.1120E-04	0.0021
	2.0	5.8786E-08	1.4713E-06	4.4045E-04	0.0087
5.00	0.5	7.0128E-09	6.0830E-08	5.0126E-04	0.0172
	1.5	3.1890E-08	6.3446E-07	9.8110E-04	0.0330
	2.0	6.2033E-08	4.9201E-06	0.0013	0.0616

5. Заключительные замечания

В данной статье мы изучили все богатство пространственно-временных явлений динамики диффузионных систем хищник–жертва с двумя переменными. Был проведен анализ неустойчивости по Тьюрингу этих моделей путем анализа их линейной устойчивости. Кроме выполнения аналитического исследования таких моделей, мы представили два важных семейства экспоненциальных временных разностных схем, которые могут использоваться вместе с конечно-разностными схемами для прямого численного моделирования диффузионных систем.

Представленные результаты показывают, что схема ETDRK4 является наиболее надежной и эффективной в контексте данной статьи. Мы надеемся, что результаты данной статьи пригодятся для исследования пространственно-временных явлений, возникающих в математической экологии.

Литература

1. **Allen L.J.S.** An Introduction to Mathematical Biology. — New Jersey: Pearson Education, Inc., 2007.
2. **Bao G., Wei G.W., and Zhao S.** Numerical solution of the Helmholtz equation with high wave numbers // *Int. J. of Numerical Methods in Engineering*. — 2004. — Vol. 59. — P. 389–408.
3. **Baurmann M., Gross T., and Feudel U.** Instabilities in spatially extended predator-prey systems: spatio-temporal patterns in the neighborhood of Turing-Hopf bifurcations // *J. of Theoretical Biology*. — 2007. — Vol. 245. — P. 220–229.
4. **Beylkin G., Keiser J.M., and Vozovoi L.** A new class of time discretization schemes for the solution of nonlinear PDEs // *J. of Computational Physics*. — 1998. — Vol. 147. — P. 362–387.
5. **Boukal D.S., Sabelisc M.W., and Berec L.** How predator functional responses and Allee effects in prey affect the paradox of enrichment and population collapses // *Theoretical Population Biology*. — 2007. — Vol. 72. — P. 136–147.
6. **Calvo M., Palencia C.** A class of explicit multi-step exponential integrators for semilinear problems // *Numerical Mathematics*. — 2006. — Vol. 102. — P. 367–381.
7. **Certaine J.** The solution of ordinary differential equations with large time constants // *Mathematical Methods for Digital Computers*. — New York: Wiley, 1960. — P. 128–132.
8. **Cox S.M., Matthews P.C.** Exponential time differencing for stiff systems // *J. of Computational Physics*. — 2002. — Vol. 176. — P. 430–455.
9. **Fan M., Wang K.** Periodicity in a food-limited population model with toxicants and time delays // *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*. — 2002. — Vol. 18, № 2. — P. 309–314.
10. **Feng W., Lu X.** On diffusive population models with toxicants and time delays // *J. of Mathematical Analysis and Applications*. — 1999. — Vol. 233. — P. 373–386.
11. **Fornberg B., Driscoll T.A.** A fast spectral algorithm for nonlinear wave equations with linear dispersion // *J. of Computational Physics*. — 1999. — Vol. 155. — P. 456–467.
12. **Garvie M.R.** Finite-difference schemes for reaction-diffusion equations modeling predator-prey interactions in MATLAB // *Bull. of Mathematical Biology*. — 2007. — Vol. 69. — P. 931–956.
13. **Grooms I., Julien K.** Linearly implicit methods for nonlinear PDEs with linear dispersion and dissipation // *J. of Computational Physics*. — 2011. — Vol. 230, № 9. — P. 3630–3560.
14. **Hochbruck M., Ostermann A.** Exponential multistep methods of Adams-type // *BIT Numerical Mathematics*. — 2011. — Vol. 51. — P. 889–908.
15. **Javanović B.S., Süli E.** Analysis of Finite Difference Schemes: For Linear Partial Differential Equations With Generalized Solutions. — London: Springer-Verlag, 2014.
16. **Kassam A.-K., Trefethen L.N.** Fourth-order time-stepping for stiff PDEs // *SIAM J. on Scientific Computing*. — 2005. — Vol. 26. — P. 1214–1233.
17. **Lian X., Yue Y., and Wang H.** Pattern formation in a cross-diffusive ratio-dependent predator-prey model // *Discrete Dynamics in Nature and Society*. — 2012. — P. 1–13. — Article ID 814069.
18. **Lotka A.J.** Elements of Physical Biology. — Baltimore: Williams and Wilkins, 1925.
19. **Murray J.D.** Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications. — Berlin: Springer-Verlag, 2003.
20. **Owolabi K.M.** Robust numerical solution of the time-dependent problems with blow-up // *Int. J. of Bioinformatics and Biomedical Engineering*. — 2015. — Vol. 1. — P. 53–63.
21. **Owolabi K.M., Patidar K.C.** Numerical solution of singular patterns in one-dimensional Gray-Scott-like models // *Int. J. of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. — 2014. — DOI:10.1515/ijnsns-2013-0124.

22. **Owolabi K.M., Patidar K.C.** Higher-order time-stepping methods for time-dependent reaction-diffusion equations arising in biology // *Applied Mathematics and Computation*. — 2014. — Vol. 240. — P. 30–50.
23. **Owolabi K.M.** Efficient Numerical Methods to Solve Some Reaction-Diffusion Problems Arising in Biology: PhD thesis. — University of the Western Cape, 2013.
24. **Petrovskii S.V., Morozov A.Y., and Venturino E.** Allee effect makes possible patchy invasion in a predator-prey system // *Ecology Letters*. — 2002. — Vol. 5. — P. 345–352.
25. **Smith F.E.** Population dynamics in *Daphnia Magna* and a new model for population growth // *Ecology*. — 1963. — Vol. 44. — P. 651–663.
26. **Sun G., Jin Z., Liu Q., and Li L.** Dynamical complexity of a spatial predator-prey model with migration // *Ecological Modelling*. — 2008. — Vol. 219. — P. 248–255.
27. **Sun G., Zhang G., Jin Z., and Li L.** Predator cannibalism can give rise to regular spatial patterns in a predator-prey system // *Nonlinear Dynamics*. — 2009. — Vol. 58. — P. 75–84.
28. **Volterra V.** Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically // *Nature*. — 1926. — Vol. 118. — P. 558–560.
29. **Volterra V.** Variations and Fluctuations of the Number of Individuals in Animal Species Living Together. — New York: McGraw-Hill, 1926. — (Reprinted in R.N. Chapman, *Animal Ecology*, 1931).
30. **Xue L.** Pattern formation in a predator-prey model with spatial effect // *Physica A*. — 2012. — Vol. 391. — P. 5987–5996.
31. **Yang B.** Pattern formation in a diffusive ratio-dependent Holling-Tanner predator-prey model with Smith growth // *Discrete Dynamics in Nature and Society*. — 2013. — Article ID 454209, DOI:10.1155/2013/454209.

*Поступила в редакцию 8 сентября 2015 г.,
в окончательном варианте 2 ноября 2015 г.*

