ПМТФ, № 3, 1966

О ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

Р. В. Бирих

(Пермь)

Найдено точное решение уравнений свободной конвекции для плоского горизонтального слоя жидкости с постоянным градиентом температуры на границах слоя. Рассмотрены два случая граничных условий для скорости: 1) жидкость ограничена двумя твердыми плоскостями, 2) верхняя граница жидкости свободна и коэффициент поверхностного натяжения жидкости зависит от температуры.

Движение рассматриваемого типа возникает, например, в средней части широкой прямоугольной кюветы с плоским горизонтальным дном. Если одна вертикальная стенка кюветы горячая, а противоположная — холодная, то равновесие жидкости невозможно и движение возникает при сколь угодно малой разности температур. Имеются два механизма, вызывающих конвекцию. Плотность жидкости у горячей стенки меньше, чем у холодной (при нормальном тепловом расширении), и под действием подъемной силы возникает движение. Коэффициент поверхностного натяжения жидкости убывает с ростом температуры, поэтому под действием капиллярных сил жидкость также движется вдоль поверхности к холодной стенке; в нижней части жидкости, прилегающей к твердому дну, возникает компенсирующее движение в противоположную сторону. Какой из этих механизмов является главным в конвекции — зависит от толщины слоя жидкости. Чисто капиллярная конвекция рассматривалась ранее В. Г. Левичем [1].

В средней по длине части кюветы градиент температуры на границах жидкости можно считать постоянным, а движение жидкости — параллельным дну. Это позволяет — для нахождения вида движения жидкости в этой области — перейти к рассмотрению конвекции в бесконечном плоскопараллельном горизонтальном слое жидкости с постоянным горизонтальным градиентом температуры на границах слоя.

1. Пусть толщина слоя жидкости $d = 2h$. Ось x направлена вертикально вверх, ось z — от горячей стенки к холодной, начало координат — в центре слоя жидкости. От координаты y, перпендикулярной плоскости xz, движение не зависит.

Граничные условия для температуры в этих координатах можно записать так:

$$T = -Az \quad \text{при } x = \pm h \tag{1.1}$$

Здесь T — температура, отсчитываемая от среднего значения, A — горизонтальный градиент температуры на границах жидкости.

Скорость стационарного движения жидкости будем искать в виде

$$v_x = 0,\ v_y = 0,\ v_z = v(x) \tag{1.2}$$

Уравнения свободной конвекции с учетом (1.2) принимают вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = g\beta T, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{1.3}$$

$$v\frac{\partial T}{\partial z} = \chi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{1.4}$$

Здесь p — давление, ρ — средняя плотность жидкости, ν — кинематическая вязкость, β и χ — коэффициенты теплового расширения и температуропроводности соответственно, g — ускорение силы тяжести.

Уравнение непрерывности выполняется тождественно. Необходимо также написать условие замкнутости потока

$$\int_{-h}^{h} v(x)\,dx = 0 \tag{1.5}$$

Из уравнений (1.3) можно исключить давление. Получим

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \frac{g\beta}{\nu}\frac{\partial T}{\partial z} \tag{1.6}$$

Левая часть этого уравнения зависит только от x, это означает, что температура является линейной функцией z. Для нахождения $\partial T / \partial z$ продифференцируем уравнение (1.4) по z и дважды проинтегрируем по x. Получим

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\nu}{g\beta}(c_1 x + c_2) \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.6) и интегрируя по x, получим

$$v = c_1\frac{x^4}{4!} + c_2\frac{x^3}{3!} + c_3\frac{x^2}{2!} + c_4 x + c_5 \tag{1.8}$$

Интегрируя (1.7) по z, получим распределение температуры

$$T = \frac{\nu}{g\beta}(c_1 x + c_2) z + f(x) \tag{1.9}$$

где функция $f(x)$ должна быть найдена из (1.4)

$$\chi\frac{d^2 f}{dx^2} = v\frac{\partial T}{\partial z} \tag{1.10}$$

с известной правой частью. Все константы c_i в (1.8) и (1.9) должны быть найдены из граничных условий и (1.5).

Из граничного условия (1.1) с учетом (1.9) находим

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = -Ag\beta / \nu; \qquad f(\pm h) = 0 \tag{1.11}$$

Как видно, поставленное выше граничное условие (1.1) приводит к тому, что выражение для $\partial T / \partial z$ (см. (1.7)) становится четной функцией x. Заметим, что рассматриваемую задачу можно также решить для случая, когда горизонтальный градиент температуры на границах слоя различен.

2. Рассмотрим свободную конвекцию в случае, когда границами жидкости служат твердые плоскости. Условие прилипания жидкости на твердых границах дает

$$v = 0 \quad \text{при } x = \pm h \tag{2.1}$$

Условия (1.5), (1.11) и (2.1) однозначно определяют все константы интегрирования. После несложных вычислений получим скорость и температуру жидкости

$$\begin{gathered} v = \frac{\nu}{h}\frac{G}{6}(\xi - \xi^3) \qquad \left(G = \frac{Ag\beta h^4}{\nu^2}\right) \qquad \left(\xi = \frac{x}{h}\right) \\ T = Ah\left[\frac{GP}{360}(3\xi^5 - 10\xi^3 + 7\xi) - \frac{z}{h}\right] \qquad \left(P = \frac{\nu}{\chi}\right) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь G — число Грассгофа, P — число Прандтля.

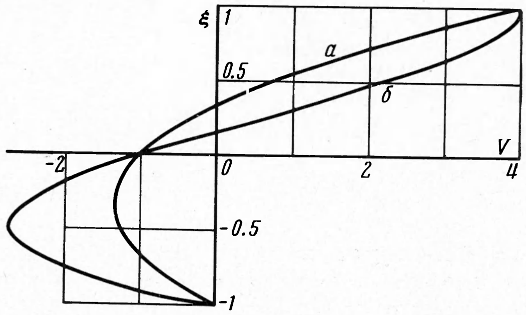
Вычислим поток тепла в рассматриваемом слое жидкости. Поток тепла Q (на единицу длины вдоль оси y) в горизонтальном направлении складывается из двух частей: потока, обусловленного теплопроводностью жидкости, и конвективного теплового потока:

$$Q = -\varkappa \int_{-h}^{h} \frac{\partial T}{\partial z} dx + \rho c_p \int_{-h}^{h} vT\, dx = 2\varkappa A h \left[1 + \frac{(GP)^2}{4725}\right] \qquad (2.3)$$

где $\varkappa$ и c_p — теплопроводность и теплоемкость жидкости.

Кроме горизонтального потока тепла, имеется также вертикальный тепловой поток, вызванный движением жидкости. Вертикальный поток тепла может быть найден по градиенту температуры у границы жидкости. Поток через единичную площадку поверхности $x = h$ равен

$$Q_1 = -\varkappa \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=h} = \frac{\varkappa AGP}{45} \qquad (2.4)$$



Фиг. 1

Такое же количество тепла проходит через единичную площадку поверхности $x = -h$.

Интересно отметить, что профиль скорости (2.2) совпадает с профилем скорости стационарной конвекции между вертикальными пластинами, нагретыми до разных температур [2].

3. Рассмотрим теперь движение жидкости в случае, когда верхняя граница слоя свободна. На свободной поверхности жидкости сумма всех сил, действующих на единичную площадку поверхности, должна обращаться в нуль. Кроме силы трения, определяемой тензором вязких напряжений, на свободной поверхности действуют капиллярные силы, вызванные неоднородностью коэффициента поверхностного натяжения. Условие равновесия сил может быть записано в виде (см. [1])

$$\rho\nu \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=h} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} \qquad (3.1)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, который будем считать линейно зависящим от температуры.

На нижней границе слоя будем по-прежнему требовать исчезновения скорости жидкости, т. е.

$$v = 0 \quad \text{при } x = -h \qquad (3.2)$$

Используя (3.1), (3.2) вместе с (1.5), из (1.8) и (1.9) получим

$$v = \frac{\nu}{h}\left[\frac{G}{24}(-4\xi^3 + 3\xi^2 + 6\xi - 1) + \frac{G_\sigma}{24}(3\xi^2 + 2\xi - 1)\right]$$

$$T = Ah\left[\frac{GP}{480}(4\xi^5 - 5\xi^4 - 20\xi^3 + 10\xi^2 + 16\xi - 5) + \right. \qquad (3.3)$$

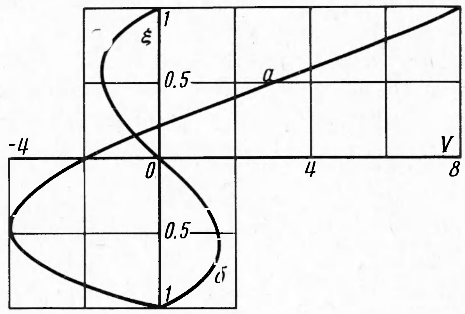
$$\left. + \frac{G_\sigma P}{288}(-3\xi^4 - 4\xi^3 + 6\xi^2 + 4\xi - 3) - \frac{z}{h}\right] \qquad \left(G_\sigma = \frac{3Ah^2}{\rho\nu^2}\left(-\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)\right)$$

Здесь безразмерный параметр G_σ характеризует интенсивность капиллярного движения жидкости.

Отношение

$$\frac{G_\sigma}{G} = \frac{3}{\rho g \beta h^2}\left(-\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right) \qquad (3.4)$$

определяет, какая из двух сил — сила Архимеда или капиллярная сила — является доминирующей в конвекции. Если $G_\sigma / G \gg 1$, то первым слагаемым в выражениях (3.3) для скорости и температуры можно пренебречь, что соответствует чисто капиллярной конвекции; профиль скорости этого движения показан линией (*а*), на фиг. 1. Если $G_\sigma/G \ll 1$, то основной вклад в скорость движения жидкости и в поле температур дают первые члены (3.3). Это — чисто тепловая конвекция. Профиль скорости этого движения изображен на фиг. 1 линией (*б*).



Фиг. 2

На фиг. 2 изображены для примера профили скорости конвективного движения в случае, когда оба механизма дают одинаковый вклад в конвекцию. Линия (*а*) этой фигуры соответствует нормальному тепловому расширению, $G_\sigma = G$. Линия (*б*) соответствует аномальному тепловому расширению ($\beta < 0$) и $G_\sigma = -G$. В этом случае профиль скорости и распределение температур, как легко видеть, совпадают с (2.2).

Отношение (3.4) для конкретной жидкости зависит лишь от одного параметра — толщины слоя жидкости $d = 2h$. Характерная толщина d_*, для которой $G_\sigma / G = 1$, определяется формулой

$$d_* = \left(-\frac{12}{\rho g \beta}\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)^{1/2} \qquad (3.5)$$

Жидкость	d_* *см*
Вода H_2O	2.72
Глицерин $C_3H_5(OH)_3$	1.02
Метиловый спирт CH_3OH	1.04
Бутиловый спирт C_4H_9OH	1.13
Диэтиловый эфир $C_2H_5OC_2H_5$	1.12
Ртуть Hg	1.06

Здесь справа приведены значения d_*, вычисленные для некоторых жидкостей при средней температуре 25°С; параметры жидкостей были взяты в основном из [3].

При $d \gg d_*$ конвекция чисто тепловая, если $d \ll d_*$, основной вклад в движение дает капиллярная конвекция.

Поступила 6 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Л е в и ч В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959.
2. Г е р ш у н и Г. З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости. Ж. техн. физ., 1953, т. 23, № 10.
3. В а р г а ф т и к Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. Физматгиз, 1963.